JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH BERTRAND

Mémoire sur quelques-unes des formes les plus simples que puissent présenter les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un point matériel

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 113-140.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__113_0>

MÉMOIRE

SUR

QUELQUES-UNES DES FORMES LES PLUS SIMPLES

QUE PUISSENT PRÉSENTER

LES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL;

PAR M. JOSEPH BERTRAND.

J'ai démontré, dans un Mémoire publié dans le tome XVII de ce Journal, que, connaissant une intégrale des équations différentielles d'un problème de mécanique, et sachant seulement que les forces s'expriment en fonction des coordonnées de leurs points d'application, on peut trouver quel est le problème, et déterminer les composantes de la force qui sollicite chaque point; il est même important de remarquer que souvent la solution conduit à des résultats contradictoires, et qu'une équation écrite au hasard ne peut être, en général, l'intégrale d'aucun problème du genre que nous considérons.

Je me propose, dans ce Mémoire, de développer quelques conséquences de cette remarque, et de chercher, parmi les formes les plus simples, quelles sont celles qui peuvent se présenter comme intégrales et à quels problèmes elles répondent.

Je considère le cas d'un point matériel mobile dans un plan, et j'étudie les intégrales entières et rationnelles par rapport aux composantes de la vitesse. Les cas dans lesquels il existe de telles intégrales sont extrêmement particuliers; je fais connaître les conditions que doivent remplir les composantes de la force accélératrice pour que l'intégrale soit du premier, du second ou du troisième degré. J'étudie aussi les intégrales fractionnaires de la forme la plus simple, et je trouve tous les problèmes qui admettent une intégrale dans laquelle la constante est égalée à une fraction dont les deux termes soient du premier degré par rapport aux composantes de la vitesse.

En étudiant les intégrales entières et rationnelles du second degré par rapport aux composantes de la vitesse, on est conduit à un résultat digne de remarque.

Le problème, résolu par Euler et Lagrange, du mouvement d'un point attiré vers deux centres fixes, suivant la loi de la nature, et sollicité en outre par une force proportionnelle à la distance dirigée vers un troisième centre situé au milieu de la droite qui joint les deux premiers, offre le seul cas dans lequel les équations du mouvement d'un point attiré vers des centres fixes, par des forces fonctions de la distance à ces centres, puissent avoir une intégrale entière et du second degré par rapport aux composantes de la vitesse.

Les problèmes qui sont résolus dans ce Mémoire ne forment qu'une bien minime partie des questions analogues que l'on pourrait se proposer. Quelques-unes de ces questions particulières pourront devenir fort difficiles, et la lecture de ce Mémoire prouvera, j'espère, que cette nouvelle manière d'aborder la question peut conduire à des problèmes d'analyse dignes d'intérêt.

I.

Je chercherai d'abord dans quel cas les équations différentielles

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$

auxquelles conduit l'étude du mouvement d'un point matériel, peuvent avoir une intégrale de la forme

$$(1)\qquad \alpha = Px' + Qy' + R,$$

P, Q, R désignant, ainsi que X et Y, des fonctions quelconques des coordonnées x et y.

En différentiant l'équation (1) et en ayant égard aux équations différentielles du mouvement, on trouve

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = x'^2 \dfrac{dP}{dx} + y'^2 \dfrac{dQ}{dy} + x'y'\left(\dfrac{dP}{dy} + \dfrac{dQ}{dx}\right) \\ \qquad + \dfrac{dR}{dx}x' + \dfrac{dR}{dy}y' + PX + QY. \end{cases}$$

Cette équation doit avoir lieu identiquement, car on peut attribuer à x, y, x', y' des valeurs arbitraires; on en conclut

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = 0, \quad \dfrac{dQ}{dy} = 0, \quad \dfrac{dP}{dy} + \dfrac{dQ}{dx} = 0, \\ \dfrac{dR}{dx} = 0, \quad \dfrac{dR}{dy} = 0, \quad PX + QY = 0, \end{cases}$$

les trois premières équations montrent immédiatement que P et Q sont respectivement de la forme

$$P = cy + c', \quad Q = -cx + c'',$$

c, c', c'' désignant des constantes.

La troisième et la quatrième équation montrent que R est une constante que l'on peut faire passer dans le premier membre et réunir à α, et enfin l'équation

$$PX + QY = 0$$

devient

$$(4)\qquad X(cy + c') + Y(-cx + c'') = 0,$$

et l'intégrale (1) est de la forme

$$(5)\qquad (cy + c')x' - (cx - c'')y' = \alpha.$$

C'est l'intégrale fournie par le principe des aires, lorsque, comme l'exprime l'équation (4), la force qui sollicite le point matériel est dirigée vers un point fixe dont les coordonnées sont

$$x_1 = \frac{c''}{c},$$

$$y_1 = -\frac{c'}{c},$$

II.

Supposons actuellement qu'une intégrale soit de la forme

$$(1)\qquad \alpha = Px'^2 + Qx'y' + Ry'^2 + Sy' + Tx' + K,$$

P, Q, R, S, T, K désignant des fonctions quelconques de x et de y. En appliquant la même méthode que dans le cas précédent, on trouvera que les forces X et Y doivent rendre identique la relation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = {} & x'^3\frac{dP}{dx} + y'^3\frac{dR}{dy} + x'^2y'\left(\frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}\right) + y'^2x'\left(\frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dx}\right)\\ & + 2Px'X + Q(x'Y + y'X) + 2Ry'Y + \frac{dS}{dy}y'^2\\ & + \frac{dT}{dx}x'^2 + x'y'\left(\frac{dS}{dx}+\frac{dT}{dy}\right) + \frac{dK}{dx}x' + \frac{dK}{dy}y'\\ & + SY + TX = 0.\end{aligned}\right.$$

Égalons d'abord à zéro les termes du troisième degré par rapport à x' et à y', nous obtiendrons, entre P, Q, R, les relations suivantes :

$$\frac{dP}{dx}=0,\qquad \frac{dR}{dy}=0,\qquad \frac{dP}{dy}+\frac{dQ}{dx}=0,\qquad \frac{dQ}{dy}+\frac{dR}{dx}=0;$$

des deux premières équations, on conclut que P est indépendant de x et Q indépendant de y. Posons donc

$$P = f(y),\qquad Q = \varphi(x),$$

et en égalant les valeurs de $\frac{d^2Q}{dx\,dy}$ déduites des deux équations suivantes, on trouve

$$\frac{d^2P}{dy^2} = \frac{d^2R}{dx^2};$$

les fonctions $f''(y)$ et $\varphi''(x)$ sont, par conséquent, deux constantes égales, et l'on a

$$P = f(y) = ay^2 + by + c,$$
$$R = \varphi(x) = ax^2 + b'x + c',$$

a, b, c désignant des constantes. Si l'on reprend alors les équations

$$\frac{dQ}{dy} = -\frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} = -\frac{dR}{dy},$$

on en déduit

$$Q = -2axy - b'y - bx + c_1;$$

c_1 étant une constante.

D'après ces résultats, les termes du second degré dans l'intégrale (1) doivent être de la forme

$$(ay^2 + by + c)x'^2 + (ax^2 + b'x + c')y'^2 \\ + (-2axy - b'y - bx + c_1)x'y',$$

et l'on peut les grouper de la manière suivante :

$$a(yx' - xy')^2 + (bx' + b'y')(yx' - xy') \\ + cx'^2 + c'y'^2 + c_1x'y'.$$

Si nous égalons actuellement à zéro les termes de l'équation (2), qui sont du second degré par rapport à x' et à y', nous trouverons

$$\frac{dS}{dy} = 0, \quad \frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0;$$

de ces équations on déduit, en nommant m, p, q trois constantes,

$$S = mx + p,$$
$$T = -my + q.$$

Si l'on écrit enfin que les termes indépendants de x' et de y' ont une somme nulle dans l'équation (2), on obtiendra la relation

$$SY + TX = 0,$$

qui devient, en vertu des précédentes,

$$Y(mx + p) - X(my - q) = 0.$$

Ce qui prouve que la force dont les composantes sont X et Y est dirigée vers un point fixe ayant pour coordonnées $\frac{-p}{m}$ et $\frac{q}{m}$. Et si l'on veut exclure ce cas particulier, il faut supposer

$$m = 0, \quad p = 0, \quad q = 0,$$

et par conséquent supprimer dans l'intégrale (1) les termes du premier degré en x', y'.

Si nous faisons cette hypothèse, il nous restera à écrire que dans l'équation (2) les coefficients de x' et de y' sont séparément nuls, ce qui donnera

$$2\,PX + QY + \frac{dK}{dx} = 0, \tag{3}$$

$$2\,RY + QX + \frac{dK}{dy} = 0. \tag{4}$$

On voit donc que K pourra être choisi arbitrairement, et ces deux équations du premier degré feront connaître X et Y.

Si l'on veut qu'il existe une *fonction des forces* et que, par conséquent, X et Y soient de la forme

$$X = \frac{dU}{dx},$$

$$Y = \frac{dU}{dy},$$

les équations (3) et (4) permettent de former une équation aux différentielles partielles à laquelle doit satisfaire la fonction U; il suffit, en effet, de différentier la première de ces équations par rapport à y, la seconde par rapport à x, et d'égaler les deux valeurs de $\frac{d^2K}{dx\,dy}$ qu'elles fournissent, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} 2\,P\frac{d^2U}{dx\,dy} + 2\frac{dU}{dx}\frac{dP}{dy} + Q\frac{d^2U}{dy^2} + \frac{dQ}{dy}\frac{dU}{dy} \\ = 2\,R\frac{d^2U}{dx\,dy} + 2\frac{dR}{dx}\frac{dU}{dy} + \frac{dQ}{dx}\frac{dU}{dx} + Q\frac{d^2U}{dx^2}, \end{aligned}$$

et en remplaçant P, Q, R par leurs valeurs trouvées plus haut, on obtient l'équation suivante :

$$(5)\left\{\begin{aligned}&\frac{d^2U}{dy^2}(-2axy-by-b'x+c_1)+\frac{d^2U}{dx^2}(2axy+by+b'x-c_1)\\&\quad-2\frac{d^2U}{dx\,dy}(ay^2-ax^2+by-b'x+c-c')+\frac{dU}{dx}(6ay+3b)\\&\quad+\frac{dU}{dy}(-6ax-3b')=0.\end{aligned}\right.$$

Je n'ai pas réussi à trouver l'intégrale de cette équation, mais on peut cependant en déduire la solution du problème suivant :

Dans quels cas la fonction U *peut-elle être de la forme*

$$\varphi[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]?$$

Ces cas sont évidemment ceux où la force accélératrice est dirigée vers un centre fixe et fonction de la distance à ce centre. Si l'on trouve plusieurs solutions, on pourra adopter pour U leur somme, et l'on obtiendra ainsi le cas le plus général dans lequel les équations différentielles du mouvement d'un point attiré vers plusieurs centres fixes par des forces fonctions de la distance à ces centres, puissent avoir une intégrale du second degré par rapport aux composantes de la vitesse.

En posant

$$U=\varphi[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2],$$

on trouve

$$\frac{dU}{dx}=2(x-\alpha)\varphi'[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2],$$

$$\frac{dU}{dy}=2(y-\beta)\varphi'[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2],$$

$$\frac{d^2U}{dx^2}=4(x-\alpha)^2\varphi''+2\varphi',$$

$$\frac{d^2U}{dy^2}=4(y-\beta)^2\varphi''+2\varphi',$$

$$\frac{d^2U}{dx\,dy}=4(x-\alpha)(y-\beta)\varphi'',$$

et l'équation en U devient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\varphi''\left[\begin{aligned} &4(y-\beta)^2(-2axy-b'y-bx+c_1)\\ &+4(x-\alpha)^2(2axy+b'y+bx-c_1)\\ &+8(x-\alpha)(y-\beta)(ay^2-ax^2-by-b'x+c-c')\end{aligned}\right]\\ &+\varphi'[2(x-\alpha)(6ay+3b)-2(y-\beta)(6ax-3b')]=0.\end{aligned}\right.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut que le rapport des coefficients de φ'' et de φ' soit une fonction de $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$, car ce rapport, en vertu de l'équation même, doit être égal à

$$-\frac{\varphi''[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]}{\varphi'[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]}.$$

Or, examinant les degrés de chacun de ces coefficients, on reconnaît que la condition ne peut être remplie que si le premier est, à un facteur constant près, le produit du second par $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$; l'équation de condition est donc, en réduisant les deux polynômes,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &-[(2ax+b')y+bx-c_1](y^2-2\beta y+\beta^2-x^2-\alpha^2+2\alpha x)\\ &+2(ay^2-by-ax^2-b'x+c-c')[y(x-\alpha)-\beta x+\beta\alpha)]\\ &=[-(2a\alpha+b')y+2a\beta x+bx-\alpha b-\beta b'][(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2],\end{aligned}\right.$$

et en effectuant les calculs, on voit que cette équation sera identique si l'on a les deux relations suivantes :

$$(8)\qquad 2a\alpha\beta+b\alpha+b'\beta=c_1,$$

$$(9)\qquad 2a(\alpha^2-\beta^2)-2\beta b+2\alpha b'=2(c-c'),$$

desquelles on déduira pour α et β deux systèmes de valeurs réelles, comme on le voit en remarquant que les équations précédentes peuvent être considérées comme représentant deux hyperboles équilatères concentriques, et dont l'une a pour axes les asymptotes de l'autre. On peut, par conséquent, admettre deux centres fixes et pas davantage. En introduisant dans l'équation (6) la relation exprimée par l'équation (7), on obtient

$$(10)\qquad 2\varphi''.[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]+3\varphi'=0,$$

ou, en posant $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=z$,

$$2z\frac{d^2\varphi}{dz^2}+3\frac{d\varphi}{dz}=0;$$

d'où l'on déduit

$$\varphi(z)=\mathrm{U}=\frac{c}{\sqrt{z}}+c'=\frac{c}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}+c',$$

et, par conséquent, la fonction des forces est inversement proportionnelle à la distance : ce qui a lieu, comme on sait, lorsque la loi d'attraction est celle de la nature.

On peut obtenir une troisième forme de φ qui satisfasse à l'équation (6) en écrivant que, dans cette équation, le coefficient de

$$\varphi'[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]$$

est égal à zéro. On aura ainsi

$$-(2a\alpha+b')y+2a\beta x+bx-\alpha b+\beta b'=0;$$

et comme cette équation doit être identique,

$$2a\alpha+b'=0,\qquad 2a\beta+b=0,\qquad \alpha b=\beta b'.$$

La troisième équation est une conséquence des deux autres, lesquelles donnent

$$\alpha=-\frac{b'}{2a},\qquad \beta=-\frac{b}{2a},$$

et montrent, comme on s'en assure facilement, que ce nouveau centre d'attraction doit être placé au centre commun des hyperboles représentées par les équations (8) et (9), et par suite au milieu de la ligne qui joint les deux autres centres. Dans ce cas, l'équation (6) qui définit la fonction des forces devient

$$\varphi''[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]=0;$$

en sorte que la fonction φ est proportionnelle au carré de la distance et correspond, par conséquent, à une loi d'attraction proportionnelle à la distance.

On peut donc conclure enfin que le seul cas dans lequel les équations différentielles du mouvement d'un point attiré vers des centres fixes puissent avoir une intégrale rationnelle et du second degré par rapport aux composantes de la vitesse, est le cas d'un point attiré vers deux centres fixes suivant la loi de la nature, et, proportionnellement à la distance, vers un troisième centre situé au milieu de la droite qui joint les deux autres.

Les équations

$$2\,\mathrm{PX} + \mathrm{QY} = -\frac{d\mathrm{K}}{dx},$$

$$2\,\mathrm{RY} + \mathrm{QX} = -\frac{d\mathrm{K}}{dy},$$

feraient facilement connaître la forme de K, et achèveraient de déterminer l'intégrale; mais comme elle est bien connue des géomètres, nous nous dispenserons de la former, et il nous suffit d'avoir montré que le problème résolu par Lagrange est le seul qui puisse en présenter de ce genre.

III.

Considérons en particulier le cas où tous les termes du second degré, dans l'intégrale précédente, seraient égaux à zéro, à l'exception du premier, et cherchons les problèmes qui peuvent conduire à une intégrale de la forme

$$(xy' - yx')^2 + \mathrm{F}(x, y) = \alpha. \tag{1}$$

Cette équation étant différentiée donne la relation

$$2\,(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})(xy' - yx') + \frac{d\mathrm{F}}{dx}x' + \frac{d\mathrm{F}}{dy}y' = 0,$$

et comme elle doit être identiquement satisfaite, on en conclut

$$2\,(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,x + \frac{d\mathrm{F}}{dy} = 0,$$

$$-\,2\,(x\mathrm{Y} - y\mathrm{X})\,y + \frac{d\mathrm{F}}{dx} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\frac{y}{x},$$

ou

$$x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} = 0,$$

et l'on en conclut que F est une fonction homogène de degré 0 de la forme $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, les seules intégrales de la forme (1) sont donc comprises dans la formule

$$(2)\qquad (xy' - yx')^2 + \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \alpha,$$

et elles conviennent à tout problème pour lequel les composantes X et Y de la force satisfont à l'équation

$$2(xY - yX) + \frac{1}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Cette relation étant la seule que l'on doive établir entre X et Y, l'intégrale (2) convient à un nombre infini de problèmes différents.

IV.

Lorsque nous avons cherché la forme possible des intégrales qui sont du second degré par rapport à x' et à y', nous avons prouvé d'abord que les termes du second degré doivent être de la forme

$$a(xy' - yx')^2 + (xy' - y'x)(bx' + b'y') + cx'^2 + c'y'^2 + c_1x'y'.$$

Nous avons fait voir ensuite que les termes du premier degré doivent être nuls si le principe des aires n'est pas applicable au problème considéré; afin de n'omettre aucun cas, nous devons maintenant examiner si, parmi les problèmes auxquels s'applique le principe des aires, il en existe dont les équations différentielles admettent en outre une intégrale de la forme considérée.

Nous pouvons admettre, sans diminuer la généralité du résultat, que l'origine des coordonnées soit placée au point vers lequel la force accélératrice est constamment dirigée. La différence $xy' - yx'$ sera alors constante, et dans l'intégrale cherchée, on pourra supprimer le terme $(xy' - yx')^2$ en le réunissant au second membre

L'intégrale prend alors la forme

$$\begin{aligned}(xy' - yx')(bx' + b'y') + cx'^2 + c'y'^2 + c_1 x'y' \\ + Sy' + Tx' + K = \alpha;\end{aligned}$$

en égalant à zéro la dérivée de α et ayant égard à ce que $xy' - yx'$ est constant par hypothèse, il viendra

$$\begin{aligned}&(xy' - yx')(bX + b'Y) + 2cx'X + 2c'y'Y + c_1(x'Y + y'X) \\ &+ SY + TX + y'^2\frac{dS}{dy} + x'^2\frac{dT}{dx} + x'y'\left(\frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dy}\right) \\ &+ \frac{dK}{dx}x' + \frac{dK}{dy}y' = 0.\end{aligned}$$

En égalant à zéro les termes du second degré par rapport à x' et y', on a

$$\frac{dS}{dy} = 0, \quad \frac{dT}{dx} = 0, \quad \frac{dS}{dx} + \frac{dT}{dy} = 0,$$

d'où l'on conclut que S et T sont de la forme

$$S = mx + n, \quad T = -my + n';$$

d'ailleurs les termes indépendants de x' et de y' étant égalés à zéro, donnent

$$SY + TX = 0,$$

et cette condition rapprochée de l'hypothèse

$$Xy - Yx = 0,$$

fait voir que n et n' doivent être nuls, en sorte que les termes du premier degré en x' et y', dans l'intégrale cherchée, se réduisent à

$$m(xy' - yx'),$$

et leur somme étant constante, d'après ce qui a été supposé, on peut les réunir au second membre et raisonner comme si S et T étaient nuls. On obtient alors, en égalant à zéro le coefficient de x' et celui de y',

$$x(bX + b'Y) + 2c'Y + c_1 X + \frac{dK}{dy} = 0,$$
$$-y(bX + b'Y) + 2cX + c_1 Y + \frac{dK}{dx} = 0,$$

et l'on doit joindre à ces deux équations la condition

$$Xy - Yx = 0,$$

qui exprime que la force est dirigée vers l'origine des coordonnées. On en déduit, par l'élimination de X et de Y,

$$\frac{x(bx + b'y) + 2c'y + c_1 x}{-y(bx + b'y) + 2cx + c_1 y} = \frac{\frac{dK}{dy}}{\frac{dK}{dx}},$$

et l'on pourra prendre pour K une intégrale quelconque de cette équation. Comme, en lui conservant toute sa généralité, elle ne semble pas intégrable par les méthodes connues, nous nous bornerons à traiter le cas où l'on a

$$c = c' = c_1 = 0,$$

l'équation en K devient alors

$$\frac{\frac{dK}{dy}}{\frac{dK}{dx}} = -\frac{x}{y},$$

d'où l'on déduit

$$K = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et les valeurs de X et Y seront données par les équations

$$x(bX + b'Y) = -\frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$Xy - Yx = 0,$$

desquelles on déduit

$$X = \frac{-\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}{x(bx + b'y)},$$

$$Y = \frac{-y\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)}{x^2(bx + b'y)},$$

et l'on voit que X et Y sont des fonctions homogènes de degré -2. Ces fonctions sont d'ailleurs entièrement arbitraires, car $\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)$ peut être choisi à volonté. Si l'on veut que la force soit une fonction de la distance, on voit, d'après cela, qu'elle doit être inversement proportionnelle à son carré La loi d'attraction de la nature est donc la seule pour laquelle les équations différentielles du mouvement d'un point attiré vers l'origine des coordonnées puissent avoir une intégrale de la forme

$$(xy' - yx')(bx' + b'y') + F(x, y) = \alpha;$$

on vérifie d'ailleurs bien facilement que les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ont pour intégrale

$$(xy' - yx')(bx' + b'y') + \frac{b'x - by}{\sqrt{x^2+y^2}} = \alpha,$$

quelles que soient les constantes b et b'. Cette intégrale se décompose évidemment en deux autres

$$(xy' - yx')x' - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \beta,$$

$$(xy' - yx')y' + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \gamma,$$

qui ont été données par Jacobi dans son Mémoire sur le mouvement d'un point matériel (*Journal de Crelle*, tome XXIV).

V.

Considérons actuellement les intégrales de la forme

$$(a)\quad \left\{\begin{array}{r} A x'^3 + B x'^2 y' + C x' y'^2 + D y'^3 \\ + A_1 x'^2 + B_1 x' y' + C_1 y'^2 + E x' + F y' + K = \alpha, \end{array}\right.$$

$A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, E, F, K$ désignant des fonctions quelconques de x et de y; en égalant à zéro la dérivée de α, on verra que, dans cette dérivée, les termes du quatrième et du deuxième degré par rapport à x' et y' proviendront de ceux des termes de l'équation (a) qui sont de degré impair par rapport aux mêmes quantités. Les termes de degré pair fourniront au contraire, dans la dérivée, une somme de termes du troisième ou du premier degré; ceux-là devront donc être constants séparément, et, par suite, une intégrale de la forme (a) doit nécessairement se partager en deux autres

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{r} A x'^3 + B x'^2 y' + C y'^2 x' + D y'^3 + E x' + F y' = \alpha_1, \\ A_1 x'^2 + B_1 x' y' + C_1 y'^2 + K = \alpha_2. \end{array}\right.$$

La seconde de ces deux formes ayant déjà été étudiée, nous nous occuperons seulement de la première.

Si l'on prend la dérivée de α_1 par rapport à t, et qu'on égale à zéro les termes du quatrième degré par rapport à x' et à y', on obtiendra les équations suivantes :

$$(c)\quad \frac{dA}{dx} = 0,\quad \frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} = 0,\quad \frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dx} = 0,\quad \frac{dC}{dy} + \frac{dD}{dx} = 0,\quad \frac{dD}{dy} = 0.$$

La première de ces équations montre que A est indépendant de x; posons donc

$$A = \varphi(y),$$

la dernière donnera de même

$$D = f(x);$$

Si, après avoir substitué ces valeurs dans les trois autres, on différentie la seconde deux fois par rapport à y, la quatrième deux fois par rapport à x, et qu'on retranche de la somme des équations obtenues la troisième équation différentiée successivement par rapport à x et par rapport à y, on obtiendra la relation

$$\varphi'''(y) + f'''(x) = 0,$$

d'où l'on conclut que $\varphi'''(y)$ et $f'''(x)$ sont deux constantes égales et de signes contraires; on a par conséquent

$$A = \varphi(y) = ay^3 + by^2 + cy + d,$$
$$D = f(x) = -ax^3 + b'x^2 + c'x + d',$$

revenant ensuite aux équations

$$\frac{dA}{dy} + \frac{dB}{dx} = 0,$$
$$\frac{dC}{dy} + \frac{dD}{dx} = 0,$$

on en conclura

$$B = -3ay^2x - 2bxy - cx + F(y),$$
$$C = 3ax^2y - 2b'xy + c'y + F_1(x),$$

et, en vertu de l'équation

$$\frac{dB}{dy} + \frac{dC}{dx} = 0,$$

on aura

$$-6axy - 2bx + F'(y) + 6axy - 2b'y + F'_1(x) = 0,$$

d'où l'on conclura

$$F'(y) = 2b'y + c_1,\quad F(y) = b'y^2 + c_1y + c_2,$$
$$F'_1(x) = 2bx - c_1,\quad F_1(x) = bx^2 - c_1x + c_3,$$

et, par suite, l'ensemble des termes du troisième degré dans l'équation (b) doit être de la forme

$$\begin{aligned}
&x'^3(ay^3+by^2+cy+d)\\
&+x'^2y'(-3ay^2x-2bxy-cx+b'y^2+c_1y+c_2)\\
&+x'y'^2(3ax^2y-2b'xy+bx^2-c_1x+c_3)\\
&+y'^3(-ax^3+b'x^2+c'x+d'),
\end{aligned}$$

et l'on peut grouper les termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&a(yx'-xy')^3+(yx'-xy')^2(bx'+b'y')\\
&+(yx'-xy')(cx'^2+c_1x'y'+c'y'^2)\\
&+dx'^3+c_2x'^2y'+c_3x'y'^2+d'y'^3.
\end{aligned}$$

VI.

Le développement des conditions auxquelles sont assujettis les coefficients E et F, donne lieu à des calculs fort longs; nous nous contenterons de les développer dans le cas où les termes du troisième degré se réduisent à

$$a(xy'-yx')^3,$$

l'intégrale est alors de la forme

$$a(yx'-xy')^3+\mathrm{E}x'+\mathrm{F}y'=\alpha. \tag{1}$$

En égalant à zéro la dérivée de α, on obtient

$$\left\{\begin{aligned}
&3a(yx'-xy')^2(y\mathrm{X}-x\mathrm{Y})+\mathrm{EX}+\mathrm{FY}\\
&\qquad+\frac{d\mathrm{E}}{dx}x'^2+\frac{d\mathrm{F}}{dy}y'^2+\left(\frac{d\mathrm{E}}{dy}+\frac{d\mathrm{F}}{dx}\right)x'y'=0,
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

et, en égalant à zéro les coefficients du premier membre ordonné par rapport à x', y', on déduit

$$\left\{\begin{aligned}
&3ay^2(y\mathrm{X}-x\mathrm{Y})+\frac{d\mathrm{E}}{dx}=0,\quad 3ax^2(y\mathrm{X}-x\mathrm{Y})+\frac{d\mathrm{F}}{dy}=0,\\
&\qquad -6axy(y\mathrm{X}-x\mathrm{Y})+\frac{d\mathrm{E}}{dy}+\frac{d\mathrm{F}}{dx}=0,\\
&\qquad\qquad \mathrm{EX}+\mathrm{FY}=0.
\end{aligned}\right. \tag{3}$$

Si l'on pose

$$yX - xY = H,$$

et que l'on différentie la première des équations (3) deux fois par rapport à y, la seconde deux fois par rapport à x, et qu'on retranche de leurs sommes la troisième différentiée une fois par rapport à x et une fois par rapport à y, on obtiendra l'équation

$$y^2\frac{d^2H}{dy^2} + 2xy\frac{d^2H}{dx\,dy} + x^2\frac{d^2H}{dx^2} + 6y\frac{dH}{dy} + 6x\frac{dH}{dx} + 6H = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$H = \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

En reportant ces valeurs de H dans les équations (3), elles deviennent

$$\frac{dE}{dx} = -3a\frac{y^2}{x^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{3ay^2}{x^3}\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{dF}{dy} = -3a\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{3a}{x}\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{dE}{dy} + \frac{dF}{dx} = 6a\frac{y}{x}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + 6a\frac{y}{x^2}\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

et l'on s'assure facilement que ces équations sont satisfaites en prenant

$$E = -3ay\int\varphi\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right) + 3a\int\frac{y}{x}\psi\left(\frac{y}{x}\right)d\frac{y}{x},$$

$$F = -3ax\int\varphi\left(\frac{y}{x}\right)d\left(\frac{y}{x}\right) - 3a\int\psi\left(\frac{y}{x}\right)d\frac{y}{x}.$$

De sorte que, les fonctions φ et ψ restant arbitraires, l'intégrale considérée conviendra toutes les fois que X et Y seront déterminés par les deux équations

$$EX + FY = 0,$$

$$Xy - Yx = H = \frac{1}{x^2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^3}\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

VII.

Cherchons, pour dernier problème, s'il peut exister, des intégrales de la forme

$$\alpha = \frac{Py' + Qx' + R}{Ay' + Bx' + C},$$

A, B, C, P, Q, R désignant des fonctions quelconques de x et de y.

En égalant à zéro la dérivée de α, on trouve

$$\begin{aligned} o = &\left[\frac{dP}{dy}y'^2 + \left(\frac{dP}{dx} + \frac{dQ}{dy}\right)x'y' + \frac{dQ}{dx}x'^2 + PY + QX + \frac{dR}{dx}x' + \frac{dR}{dy}y'\right](Ay' + Bx' + C) \\ -&\left[\frac{dA}{dy}y'^2 + \left(\frac{dA}{dx} + \frac{dB}{dy}\right)x'y' + \frac{dB}{dx}x'^2 + AY + BX + \frac{dC}{dx}x' + \frac{dC}{dy}y'\right](Py' + Qx' + R); \end{aligned}$$

en égalant à zéro les coefficients des termes du troisième degré par rapport à x' et à y', on trouve

$$(2)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dP}{dy} - P\dfrac{dA}{dy} = o, \quad B\dfrac{dQ}{dx} - Q\dfrac{dB}{dx} = o, \\ A\dfrac{dP}{dx} - P\dfrac{dA}{dx} + A\dfrac{dQ}{dy} - Q\dfrac{dA}{dy} + B\dfrac{dP}{dy} - P\dfrac{dB}{dy} = o, \\ B\dfrac{dP}{dx} - P\dfrac{dB}{dx} + B\dfrac{dQ}{dy} - Q\dfrac{dB}{dx} + A\dfrac{dQ}{dx} - Q\dfrac{dA}{dx} = o. \end{cases}$$

Les deux premières équations (2) prouvent que le rapport $\frac{P}{A}$ est indépendant de y et $\frac{Q}{B}$ indépendant de x. Posons donc

$$P = Af(x),$$
$$Q = B\varphi(y);$$

en introduisant ces résultats dans la troisième équation, on obtient

$$(3)\qquad \left(A\frac{dB}{dy} - B\frac{dA}{dy}\right)[\varphi(y) - f(x)] + A^2 f'(x) + AB\varphi'(y) = o,$$

et, en divisant par A^2,

$$\frac{d\frac{B}{A}}{dy}[\varphi(y) - f(x)] + \frac{B}{A}\varphi'(y) + f'(x) = o,$$

équation linéaire du premier ordre dont l'intégrale est

$$(4)\qquad \frac{B}{A}=\frac{F(x)-yf'(x)}{\varphi(y)-f(x)},$$

$F(x)$ désignant une fonction arbitraire de x. En opérant sur la quatrième des équations (2) comme on a opéré sur la troisième, on trouverait

$$\frac{A}{B}=\frac{F_1(y)-x\varphi'(y)}{f(x)-\varphi(y)},$$

et, en multipliant ces équations membre à membre,

$$(5)\qquad [\varphi(y)-f(x)]^2=-[F(x)-yf'(x)][F_1(y)-x\varphi'(y)].$$

Cette équation suffit, comme nous allons le montrer, pour déterminer les fonctions φ et f.

L'équation (5) peut en effet s'écrire

$$(6)\qquad -\frac{[\varphi(y)-f(x)]^2}{F(x)-yf'(x)}=F_1(y)-x\varphi'(y).$$

Si, dans cette équation, on attribue à x une seconde valeur x_1, elle devient

$$(7)\qquad -\frac{[\varphi(y)-f(x_1)]^2}{F(x_1)-yf'(x_1)}=F_1(y)-x_1\varphi'(y),$$

et l'on trouve, en retranchant ces deux équations l'une de l'autre,

$$(8)\qquad -\frac{[\varphi(y)-f(x)]^2}{F(x)-yf'(x)}-\frac{[\varphi(y)-f(x_1)]^2}{F(x_1)-yf'(x_1)}=(x-x_1)\varphi'(y);$$

si, dans cette équation, on remplace x et x_1, qui sont arbitraires, par de nouvelles valeurs x' et x'_1, on aura

$$(9)\qquad \frac{[\varphi(y)-f(x')]^2}{F(x')-yf'(x')}-\frac{\varphi(y)-f(x'_1)^2}{F(x'_1)-yf'(x'_1)}=(x'-x'_1)\varphi'(y);$$

et, en égalant les valeurs de $\varphi'(y)$ fournies par les équations (8) et (9), on a enfin

$$(10)\quad \frac{\frac{[\varphi(y)-f(x)]^2}{F(x)-yf'(x)}-\frac{[\varphi(y)-f(x_1)]^2}{F(x_1)-yf'(x_1)}}{x-x_1}=\frac{\frac{[\varphi(y)-f(x')]^2}{F(x')-yf'(x')}-\frac{[\varphi(y)-f'x'_1)]^2}{F(x'_1)-yf(x'_1)}}{x'-x'_1},$$

équation du second degré de laquelle on pourra déduire la valeur de $\varphi(y)$, cette valeur étant la seule possible, mais pouvant ne pas convenir, car les conditions trouvées sont loin d'être suffisantes.

En résolvant l'équation (10) par rapport à $\varphi(y)$, on trouvera pour cette fonction une valeur qui ne renfermera pas d'autre irrationnelle qu'un radical du second degré : on voit même que ce radical doit disparaître, car, dans l'équation (10), x, x_1, x', x'_1 étant arbitraires, on peut varier à l'infini les coefficients de cette équation et, par suite, $\varphi(y)$ étant racine commune à plusieurs équations du second degré, doit être une fonction rationnelle de leurs coefficients. Mais nous ne ferons pas usage de ce résultat, dont la démonstration n'est pas suffisamment rigoureuse. On peut objecter en effet que les coefficients de l'équation (10) peuvent rester invariables ou conserver des rapports constants lorsque l'on change les valeurs attribuées à x.

Supposons donc que l'on ait

$$\varphi(y)=\frac{\varphi_1(y)+\sqrt{\varphi_2(y)}}{\varphi_3(y)},$$

et que l'on ait trouvé de même

$$f(x)=\frac{f_1(x)+\sqrt{f_2(x)}}{f_3(x)}.$$

Connaissant f et φ, l'équation (5) fera connaître facilement $F_1(y)$ et $F(x)$. Si en effet, dans cette équation, on fait $x=0$, elle deviendra

$$(11)\qquad [\varphi(y)-f(0)]^2=-[F(0)-yf'(0)][F_1(y)],$$

et l'on en déduira $F_1(y)$. L'hypothèse $y=0$ fera de même connaître $F(x)$. Si l'on remet ces valeurs dans l'équation (5), les deux membres contiendront $\sqrt{\varphi_2(y)}$ et $\sqrt{f_2(x)}$; or il est bien facile de voir que l'équation étant vraie pour toutes les valeurs de x et de y, doit être vérifiée quel que soit le signe attribué à chacun des radicaux et que pour chaque système des valeurs de x et de y les deux membres doivent avoir quatre valeurs égales chacune à chacune, car, toutes réductions faites, les termes rationnels doivent être égaux dans les deux membres, et il doit en être de même des coefficients de chaque radical. Cela posé, les deux membres de l'équation

$$(5) \qquad [\varphi(y) - f(x)]^2 = -[\mathrm{F}(x) - yf'(x)][\mathrm{F}(y) - x\varphi'(y)]$$

doivent s'annuler en même temps, et je dis de plus que tout système de valeurs qui annulent un des facteurs du second membre doit en même temps annuler l'autre. Supposons, en effet, s'il est possible, que l'on ait

$$\mathrm{F}(x) = yf'(x)$$

sans avoir en même temps

$$\mathrm{F}(y) = x\varphi'(y),$$

on aura évidemment, pour ces valeurs de x et de y,

$$\varphi(y) - f(x) = 0.$$

Cela posé, changeons infiniment peu y et donnons-lui la valeur $y + dy$, les deux membres devront rester égaux; or le premier deviendra

$$\varphi'(y)^2\,dy^2,$$

et le second sera le produit de

$$f'(x)\,dy$$

par une quantité finie. x et y sont liés l'un à l'autre, mais chacun d'eux isolément est arbitraire; $\varphi'(y)$ et $f'(x)$ ne sont donc ni nuls, ni infinis, et, par suite, les deux membres de notre équation seraient des infiniment petits d'ordre différent et ne peuvent être égaux.

L'équation (5) ayant lieu quel que soit le signe des radicaux contenus dans $f(x)$ et dans $\varphi(y)$, cette démonstration s'applique aux deux valeurs de chacun des facteurs considérés, et, par suite, tout système de valeurs qui annule l'un des facteurs doit annuler en même temps les deux valeurs de l'autre, et comme cela est évidemment impossible, on ne doit pas admettre que les fonctions puissent avoir deux valeurs, et elles sont nécessairement rationnelles.

L'équation (5) ayant lieu entre polynômes rationnels, pour que les deux équations

$$F(x) - yf'(x) = 0,$$
$$F_1(y) - x\varphi'(y) = 0$$

aient les mêmes solutions, il faut nécessairement que la première soit du premier degré par rapport à x et la seconde du premier degré par rapport à y; on doit avoir, par conséquent,

$$\frac{F(x)}{f'(x)} = \frac{Px + Q}{P'x + Q'}, \quad \frac{F_1(y)}{\varphi'(y)} = \frac{Ay + B}{A'y + B'};$$

mais, d'après l'équation (11), $F_1(y)$ est de la forme

$$\frac{[\varphi(y) - c]^2}{my + n},$$

et $F(x)$ sera de même de la forme

$$\frac{[\varphi f(x) - c']^2}{m'x + n'},$$

c, c', m, n, m', n', désignant des constantes; d'après cela les équations précédentes deviennent

$$\frac{[f(x) - c']^2}{f'(x)(m'x + n')} = \frac{Px + Q}{P'x + Q'},$$
$$\frac{[\varphi(y) - c]^2}{\varphi'(y)(my + n)} = \frac{Ay + B}{(A'y + B')};$$

on en déduit

$$\frac{1}{f(x) - c} = \int \frac{c'(P'x + Q')\,dx}{(m'x + n')(px + q)},$$
$$\frac{1}{[\varphi(y) - c]} = \int \frac{c'(A'y + B')\,dy}{(Ay + B)(my + n)},$$

et, d'après les valeurs connues des intégrales de fractions rationnelles, on voit que $\varphi(y)$ et $f(x)$ ne peuvent être rationnels que si les facteurs du dénominateur sont égaux dans les deux différentielles et l'on trouve alors pour ces fractions des expressions de la forme

$$\varphi(y) = \frac{g + hy}{g' + h'y}, \quad f(x) = \frac{k + lx}{k' + l'x};$$

et, en substituant dans l'équation (5), on verra facilement qu'elle est satisfaite par les valeurs de $\varphi(y)$ et $f(x)$, combinées avec celles qui en résultent pour $F(x)$ et $F_1(y)$ pourvu qu'il existe entre h, h', l, l', la relation

$$hl' - lh' = 0.$$

Reprenons actuellement la formule (4), en y introduisant les valeurs de f et φ ainsi que les valeurs qui en résultent pour F et F_1, elle deviendra

$$\frac{B}{A} = \frac{g' + h'y}{k' + l'x},$$

et si l'on reprend les deux formules

$$P = Af(x) = A\frac{k + lx}{k' + l'x},$$

$$Q = B\varphi(y) = B\frac{g + hy}{g' + h'y},$$

on voit que P, Q, A, B sont respectivement proportionnels aux quatre binômes $k + lx$, $g + hy$, $k' + l'x$, $g' + h'y$, en sorte que l'on peut prendre

$$P = k + lx, \quad Q = g + hy,$$

$$A = k' + l'x, \quad B = g' + h'y,$$

et l'intégrale cherchée doit être de la forme

$$\frac{y'(k + lx) + x'(g + hy) + R}{y'(k' + l'x) + x'(g' + h'y) + C} = \alpha,$$

R et C désignant deux fonctions inconnues de x et de y, et les constantes h, h', l, l' satisfaisant à l'équation

$$hl' - h'l = 0.$$

VIII.

Cherchons maintenant quels sont les problèmes dont les équations différentielles admettent une intégrale de la forme

$$(1) \qquad \frac{y'(k+lx)+x'(g+hy)+\mathrm{R}}{y'(k'+l'x)+x'(g'+a'y)+\mathrm{C}}=\alpha.$$

En différentiant cette équation, on obtient

$$(2) \qquad \left\{\begin{aligned} \mathrm{o} = & \left[\mathrm{Y}(k+lx)+y'lx'+\mathrm{X}(g+hy)+hx'y'+\frac{d\mathrm{R}}{dx}x'+\frac{d\mathrm{R}}{dy}y'\right] \\ & \times[y'(k'+l'x)+x'(g'+h'y)+\mathrm{C}] \\ & -\left[\mathrm{Y}(k'+l'x)+y'(l'x')+\mathrm{X}(g'+h'y)+h'x'y'+\frac{d\mathrm{C}}{dx}x'+\frac{d\mathrm{C}}{dy}y'\right] \\ & \times[y'(k+lx)+x'(g+hy)+\mathrm{R}]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on égale à zéro les coefficients de $x'y'^2$ et de x'^2y', on aura

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} &(l+h)(k'+l'x)-(l'+h')(k+lx)=\mathrm{o}, \\ &(l+h)(g'+h'y)-(l'+h')(g+hy)=\mathrm{o}; \end{aligned}\right.$$

en ayant égard à la relation

$$(4) \qquad hl'-lh'=\mathrm{o},$$

ces deux équations deviennent

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &lk'-l'k+hk'-h'k=\mathrm{o}, \\ &lg'-gl'+hg'-gh'=\mathrm{o}; \end{aligned}\right.$$

or l'équation (4) montrant que $\frac{h}{l}$ et $\frac{h'}{l'}$ sont égaux, soit m la valeur commune de ces deux rapports, l'équation (5) devient

$$(lk'-l'k)(1+m)=\mathrm{o}, \quad (hg'-h'g)\left(\frac{1}{m}+1\right)=\mathrm{o};$$

en sorte qu'il faut admettre l'une des deux hypothèses

$$\left\{\begin{aligned} lk'&=l'k, \\ hg'&=h'g, \end{aligned}\right.$$

$$m=-1.$$

La première hypothèse doit être écartée, car, en l'adoptant, on voit sans peine que la division du numérateur de la formule (1) par son dénominateur peut s'effectuer et que la valeur de α serait entière par rapport à x' et à y'; il faut donc admettre $m = -1$, c'est-à-dire

$$h = -l,$$
$$h' = -l',$$

ce qui met l'intégrale sous la forme

$$\frac{l(xy' - yx') + ky' + gx' + R}{l'(xy' - yx') + k'y' + g'x' + C} = \alpha, \tag{6}$$

et l'équation (2) devient

$$\left\{\begin{aligned} 0 = &\left[l(xY - yX) + kY + gX + \frac{dR}{dx}x' + \frac{dR}{dy}y'\right] \\ &\times \left[l'(xy' - yx') + k'y' + g'x' + C\right] \\ &- \left[l'(xY - yX) + k'Y + g'X + \frac{dC}{dx}x' + \frac{dC}{dy}y'\right] \\ &\times \left[l(xy' - yx') + ky' + gx' + R\right]; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

égalons à zéro les coefficients de x'^2, de y'^2 et de $x'y'$, nous aurons

$$(g' - l'y)\frac{dR}{dx} - (g - ly)\frac{dC}{dx} = 0, \tag{8}$$

$$(k' + l'x)\frac{dR}{dy} - (k + lx)\frac{dC}{dy} = 0, \tag{9}$$

$$(g' - l'y)\frac{dR}{dy} - (g - ly)\frac{dC}{dy} + (k' + l'x)\frac{dR}{dx} - (k + lx)\frac{dC}{dx} = 0. \tag{10}$$

Les équations (8) et (9) s'intègrent immédiatement et donnent

$$(g' - l'y)R - (g - ly)C = f(y), \tag{11}$$

$$(k' + l'x)R - (k + lx)C = \varphi(x); \tag{12}$$

si l'on différentie ces deux équations, la première par rapport à y et la seconde par rapport à x, et qu'on les ajoute ensuite, on trouve, en ayant égard à l'équation (10),

$$f'(y) + \varphi'(x) = 0,$$

$f'(y)$ et $\varphi'(x)$ sont donc deux constantes égales et de signes contraires, B et $-$ B; on a donc

$$(13)\qquad (g'-l'y)\mathrm{R}-(g-ly)\mathrm{C}=\mathrm{B}y+\mathrm{D},$$

$$(14)\qquad (k'+l'x)\mathrm{R}-(k+lx)\mathrm{C}=-\mathrm{B}x+\mathrm{D}';$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{R}=\frac{(-\mathrm{B}x+\mathrm{D}')(g-ly)-(k+lx)(\mathrm{B}y+\mathrm{D})}{(gk'-g'k)+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y},$$

$$\mathrm{C}=\frac{-(\mathrm{B}y+\mathrm{D})(k'+l'x)+(-\mathrm{B}x+\mathrm{D}')(g'-l'y)}{(gk'-g'k)+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y};$$

ou, en réduisant,

$$(15)\qquad \mathrm{R}=\frac{\mathrm{D}'g-k\mathrm{D}-(\mathrm{B}k+\mathrm{D}'l)y-(\mathrm{B}g+\mathrm{D}l)x}{(gk'-g'k)+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y},$$

$$(16)\qquad \mathrm{C}=\frac{\mathrm{D}'g'-\mathrm{D}k'-y(\mathrm{B}k'+\mathrm{D}'l')-x(\mathrm{B}g'+\mathrm{D}l')}{gk'-g'k+(l'g-lg')x+(l'k-lk')y};$$

si l'on égale ensuite à zéro les termes en x', les termes en y' et ceux qui sont indépendants de x' et de y' dans l'équation (7), on aura, après quelques réductions,

$$(17)\qquad \mathrm{X}[(lx+k)(l'y-g')-(l'x+k')(ly-g)]=\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dy}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dy},$$

$$(18)\qquad \mathrm{Y}[(ly-g)(l'x+k')-(lx+k)(l'y-g')]=\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dx}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dx},$$

$$\mathrm{C}[(lx+k)\mathrm{Y}-(ly-g)\mathrm{X}]=\mathrm{R}[(l'x+k')\mathrm{Y}-(l'y-g')\mathrm{X}];$$

les deux premières équations détermineront X et Y et la troisième donnera l'équation de condition

$$\frac{\mathrm{D}'g'-\mathrm{D}k'-y(\mathrm{B}k'+\mathrm{D}'l')-x(\mathrm{B}g'+\mathrm{D}l')}{\mathrm{D}'g-k\mathrm{D}-y(\mathrm{B}k+\mathrm{D}'l)-x(\mathrm{B}g+\mathrm{D}l)}$$
$$=\frac{(l'x+k')\left(\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dx}-\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right)-(l'y-g')\left(\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dy}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right)}{(lx+k)\left(\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dx}-\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dx}\right)-(ly-g)\left(\mathrm{R}\frac{d\mathrm{C}}{dy}-\mathrm{C}\frac{d\mathrm{R}}{dy}\right)};$$

mais, d'après les valeurs trouvées pour R et C, on a

$$\frac{C\frac{dR}{dx} - R\frac{dC}{dx}}{C\frac{dR}{dy} - R\frac{dC}{dy}} = \frac{By + D}{-Bx + D'},$$

et d'après cela l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}&\frac{D'g' - Dk' - y(Bk' + D'l') - x(Bg' + Dl')}{D'g - kD - y(Bk + D'l) - x(Bg + Dl)}\\ &= \frac{(l'x + k')(By + D) + (l'y - g')(-Bx + D')}{(lx + k)(By + D)D + (ly + g)(-Bx + D')},\end{aligned}$$

équation identique.

Les constantes qui figurent dans les valeurs de R et de C peuvent donc être prises arbitrairement, et l'équation

$$\alpha = \frac{l(xy' - yx') + ky' + gx' + \dfrac{D'g - kD - (Bk + D'l)y - (Bg + Dl)x}{gk' - g'k + (l'g - lg')x + (l'k - lk')y}}{l'(xy' - yx') + k'y' + g'x' + \dfrac{D'g' - k'D' - (Bk' + D'l')y - (Bg' + Dl')x}{(gk' - g'k) + (l'g - g'l)x + (l'k - k'l)y}}$$

sera une intégrale des équations différentielles du mouvement d'un point sollicité par les forces dont les composantes données par les équations (17), (18) sont, toutes réductions faites,

$$X = \frac{[(Bx + D')[B(gk' - g'k) + D'(gl' - g'l) + D(k'l - kl')][(D'g - kD) - (Bk + D'l)y - (Bg + Dl)x]^2}{[(gk' - l'k) + (l'g - lg')x + (l'k - lk')y]^3},$$

$$Y = \frac{(By + D)}{-Bx + D'}X,$$

et, en disposant à volonté des constantes renfermées dans ces formules, on obtiendra tous les problèmes pour lesquels il peut exister une intégrale de la forme

$$\alpha = \frac{Py' + Qx' + R}{Ay' + Bx' + C}.$$