JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'expression $\varphi(n)$, qui marque combien la suite $1, 2, 3, \ldots, n$ contient de nombres premiers à n

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 2 (1857), p. 110-112.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1857_2_2__110_0>

SUR L'EXPRESSION $\varphi(n)$,

QUI MARQUE COMBIEN LA SUITE 1, 2, 3,..., n CONTIENT DE NOMBRES PREMIERS A n;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Euler a donné la valeur générale et simple de l'expression $\varphi(n)$, qui marque combien la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ldots,\ n-1,\ n,$$

contient de nombres premiers à n. Il est clair que l'on a

$$\varphi(1) = 1,$$

et pour un entier n quelconque, décomposé en facteurs premiers, sous la forme

$$n = a^{\alpha} b^{\beta} \ldots c^{\gamma},$$

Euler trouve

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{c}\right).$$

De là il est aisé de conclure, par le calcul effectué, que la somme

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n),$$

des expressions φ, appliquées successivement à tous les diviseurs

$$1,\ d,\ldots,\ n$$

de n, est égale au nombre n lui-même. Voyez sur ce point une Note de M. Catalan (1re série, tome IV, page 7).

Mais on peut aussi établir l'équation

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n) = n$$

par un raisonnement direct, indépendant de la formule qui donne $\varphi(n)$, et c'est même ainsi que Gauss, à qui cette équation est due, l'a d'abord démontrée (*voir* le n° **39** des *Disquisitiones arithmeticæ*). Cela étant, si l'on observe que l'équation dont il s'agit, en y faisant successivement $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, etc., donne l'une après l'autre les valeurs de φ, savoir

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2, \quad \varphi(4) = 2, \ldots,$$

on sera conduit à se proposer d'en tirer la valeur de $\varphi(n)$ pour un entier quelconque n.

Le problème peut d'ailleurs être ainsi généralisé. Supposant

$$f(1) + f(d) + \ldots + f(n) = \mathrm{F}(n),$$

où le signe $f(n)$, qui représente une quantité déterminée dépendante de l'entier n, est appliqué à tous les diviseurs $1, d, \ldots, n$ de n, exprimer $f(n)$ au moyen de F. La réponse est fournie par la formule suivante, que je me garde bien, du reste, de présenter comme nouvelle, car quiconque l'aura cherchée a dû la trouver :

$$f(n) = \mathrm{F}(n) - \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) + \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{ab}\right) - \sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{abc}\right) + \ldots;$$

$a, b, c, \ldots$, sont les nombres premiers distincts, facteurs de n : les signes $+$ et $-$ alternent : on pose, pour abréger,

$$\sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{n}{a}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{b}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{c}\right) + \ldots,$$

$$\sum \mathrm{F}\left(\frac{n}{ab}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{n}{ab}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{ac}\right) + \mathrm{F}\left(\frac{n}{bc}\right) + \ldots,$$

. . . .

Cette formule est aisée à établir, et plus aisée encore à vérifier.

Elle donne

$$f(1) = \mathrm{F}(1),$$

puis, pour une puissance de nombre premier,

$$f(a^\alpha) = \mathrm{F}(a^\alpha) - \mathrm{F}(a^{\alpha-1}),$$

puis encore

$$f(a^\alpha b^\beta) = \mathrm{F}(a^\alpha b\ \ ) - \mathrm{F}(a^{\alpha-1} b^\beta) - \mathrm{F}(a^\alpha b^{\beta-1}) + \mathrm{F}(a^{\alpha-1} b^{\beta-1}),$$

et ainsi de suite.

Mise en usage sur l'équation

$$\varphi(1) + \varphi(d) + \ldots + \varphi(n) = n,$$

elle fournit

$$\varphi(n) = n - \sum \frac{n}{a} + \sum \frac{n}{ab} - \sum \frac{n}{abc} + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{c}\right),$$

ce qu'il fallait trouver.