

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales
définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule
de Gauss concernant les fonctions gamma de Legendre**

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 1 (1856), p. 82-88.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__82_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Détermination des valeurs d'une classe remarquable d'intégrales définies multiples, et démonstration nouvelle d'une célèbre formule de Gauss concernant les fonctions gamma de Legendre;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. L'intégrale définie

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha^2 + \frac{k^2}{\alpha^2}\right)} d\alpha$$

est, comme on sait, égale à

$$\frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-2k},$$

k désignant une quantité quelconque positive ou nulle. En y remplaçant α par $\sqrt{\alpha}$ et doublant sa valeur, on a donc

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha = \sqrt{\pi} e^{-2k}.$$

J'ignore si l'on a remarqué déjà que la formule

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{2}\right) = 2^{1-\mu} \sqrt{\pi} \Gamma(\mu),$$

où $\Gamma(\mu)$ désigne, suivant la notation de Legendre, l'intégrale eulérienne de seconde espèce

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha} \alpha^{\mu-1} d\alpha,$$

est une conséquence immédiate de l'équation (1). Il suffit de multiplier les deux membres de l'équation (1) par $k^{\mu-1} dk$, puis d'intégrer de $k=0$ à $k=\infty$. Cela donne en effet, en changeant l'ordre des intégra-

tions pour α et k ,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha \int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha}} k^{\mu-1} dk = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-2k} k^{\mu-1} dk.$$

Or on a

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k^2}{\alpha}} k^{\mu-1} dk = \frac{1}{2} \alpha^{\frac{\mu}{2}} \int_0^\infty e^{-\beta} \beta^{\frac{\mu}{2}-1} d\beta = \frac{1}{2} \alpha^{\frac{\mu}{2}} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)$$

et

$$\int_0^\infty e^{-2k} k^{\mu-1} dk = \frac{\Gamma(\mu)}{2^\mu}.$$

Substituant et multipliant par 2, on arrive à la formule citée.

2. Je me propose, dans cette Note, d'étendre la même analyse à la démonstration de la formule générale que l'on doit à Gauss :

$$(A) \quad \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\mu).$$

Je regarde comme connue l'équation d'Euler

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

qu'on établit aisément par différents moyens. Mais j'ai besoin de trouver d'abord les valeurs d'une classe d'intégrales multiples, très-remarquables du reste en elles-mêmes, et qui peuvent être appliquées utilement à la recherche des intégrales de certaines équations aux différences partielles.

Ainsi pour le cas de $n = 3$, c'est-à-dire pour démontrer la formule

$$(B) \quad \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right) = 3^{\frac{1}{2}-\mu} \cdot 2\pi \cdot \Gamma(\mu),$$

je me sers de l'intégrale double

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\alpha+\beta+\frac{k^2}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha d\beta,$$

dont je prouve que la valeur est

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) e^{-3k},$$

ou

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-3k}.$$

Admettant en effet qu'on a

$$(2) \quad \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \beta + \frac{k^3}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha d\beta = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-3k},$$

multipliez les deux membres par $k^{\mu-1} dk$ et intégrez de $k=0$ à $k=\infty$.
L'intégration par rapport à k s'effectuera sous les signes \int en observant que

$$\int_0^\infty e^{-\frac{k^3}{\alpha\beta}} k^{\mu-1} dk = \frac{1}{3} (\alpha\beta)^{\frac{\mu}{3}} \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right),$$

et le premier membre deviendra

$$\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(\alpha+\beta)} \alpha^{\frac{\mu+1}{3}-1} \beta^{\frac{\mu+2}{3}-1} d\alpha d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right);$$

quant au second membre, on trouve

$$\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \int_0^\infty e^{-3k} k^{\mu-1} dk,$$

ou

$$\frac{2\pi}{3^\mu \sqrt{3}} \Gamma(\mu).$$

De là

$$\frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+2}{3}\right) = \frac{2\pi}{3^\mu \sqrt{3}} \Gamma(\mu),$$

et, en multipliant par 3, la formule (B).

En général, l'intégrale définie à $(n - 1)$ variables

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \frac{k^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1},$$

que je désignerai par R, a pour valeur

$$\frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

et il suffit de multiplier par $k^{\mu-1} dk$ les deux membres de l'équation qui exprime ce fait, puis d'intégrer de $k = 0$ à $k = \infty$, pour obtenir la formule (A).

3. Le calcul qui conduit à cette formule (A) peut être présenté autrement, en s'appuyant toujours sur la valeur de notre intégrale R, mais en partant, non plus de cette intégrale, mais du produit

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right) \Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right),$$

qu'on peut mettre sous forme d'intégrale multiple, savoir

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-(\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1})} \alpha^{\frac{\mu}{n}-1} \alpha_1^{\frac{\mu+1}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{\mu+n-1}{n}-1} d\alpha d\alpha_1 \dots d\alpha_{n-1}.$$

Substituons en effet, dans cette intégrale, à la variable α une autre variable k ayant les mêmes limites, en posant

$$\alpha = \frac{k^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}},$$

ce qui donne

$$\alpha^{\frac{\mu}{n}-1} d\alpha = \frac{nk^{\mu-1} dk}{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1})^{\frac{\mu}{n}}} :$$

le résultat de la substitution contiendra notre intégrale R; car il peut s'écrire

$$n \int_0^\infty R k^{\mu-1} dk.$$

Si donc on admet que

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

il deviendra

$$\frac{1}{n^2} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty e^{-nk} k^{\mu-1} dk,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n^2} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\mu);$$

d'où résultera de suite la formule (A).

4. La formule

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk},$$

ou, si l'on veut,

$$R = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) e^{-nk},$$

se démontre, au surplus, bien simplement.

Pour mieux faire comprendre notre méthode, revenons d'abord sur le cas de $n = 2$. Alors

$$R = \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha;$$

donc

$$\frac{dR}{dk} = -2k \int_0^\infty e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} \frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Substituons à la variable α une autre variable β en posant

$$\alpha = \frac{k^2}{\beta}, \quad \text{d'où} \quad \frac{k^2}{\alpha} = \beta \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{d\beta}{\beta}.$$

Les limites pour β seront ∞ et 0, ou bien 0 et ∞ en changeant le signe de $d\beta$. On aura par suite

$$\frac{dR}{dk} = -2 \int_0^\infty e^{-\left(\beta + \frac{k^2}{\beta}\right)} \beta^{\frac{1}{2}-1} d\beta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dR}{dk} = -2R,$$

et partant

$$R = Ce^{-2k}.$$

La constante C se détermine en posant $k = 0$; elle est égale à $\sqrt{\pi}$.
On a donc bien

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha + \frac{k^2}{\alpha}\right)} \alpha^{\frac{1}{2}-1} d\alpha = \sqrt{\pi} e^{-2k}.$$

Soit à présent $n = 3$, ou

$$R = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha + \beta + \frac{k^2}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha d\beta.$$

En différenciant par rapport à k , on a

$$\frac{dR}{dk} = -3k^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\left(\alpha + \beta + \frac{k^2}{\alpha\beta}\right)} \alpha^{\frac{1}{3}-1} \beta^{\frac{2}{3}-1} d\alpha d\beta.$$

Substituons à la variable α une autre variable γ , en posant

$$\alpha = \frac{k^2}{\beta\gamma}, \quad \text{d'où} \quad \frac{k^2}{\alpha\beta} = \gamma, \quad \text{et} \quad \frac{d\alpha}{\alpha} = -\frac{d\gamma}{\gamma}.$$

Les limites pour γ seront encore 0 et ∞ , à la condition de changer le signe de $d\gamma$. Il nous viendra donc

$$\frac{dR}{dk} = -3 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\left(\beta + \gamma + \frac{k^2}{\beta\gamma}\right)} \beta^{\frac{1}{3}-1} \gamma^{\frac{2}{3}-1} d\beta d\gamma.$$

L'intégrale placée au second membre est encore R : seulement α et β sont remplacés par β et γ , ce qui n'importe en rien. Dès lors on a

$$\frac{dR}{dk} = -3R,$$

d'où

$$R = Ce^{-3k}.$$

En posant $k = 0$, on trouve d'ailleurs

$$C = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right):$$

on a donc bien

$$R = \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) e^{-3k},$$

comme le donne, pour $n = 3$, notre formule.

Prenant enfin la valeur générale de R , savoir

$$\int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \frac{k^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1},$$

différentions-la par rapport à k . La valeur de la dérivée sera

$$-nk^{n-1} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \frac{k^n}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}\right)} \alpha_1^{\frac{1}{n}-1} \alpha_2^{\frac{2}{n}-1} \dots \alpha_{n-1}^{\frac{n-1}{n}-1} \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_{n-1}}{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}}.$$

Substituons à la variable α_1 une autre variable α_n , en posant

$$\alpha_1 = \frac{k^n}{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n},$$

et la valeur de $\frac{dR}{dk}$ se présentera sous cette autre forme

$$-n \int_0^\infty \dots \int_0^\infty e^{-\left(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \frac{k^n}{\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n}\right)} \alpha_2^{\frac{1}{n}-1} \alpha_3^{\frac{2}{n}-1} \dots \alpha_n^{\frac{n-1}{n}-1} d\alpha_2 d\alpha_3 \dots d\alpha_n.$$

L'intégrale en facteur est précisément R : seulement les indices de α sont tous ici plus grands d'une unité qu'ils n'étaient d'abord, ce qui est indifférent. On a donc

$$\frac{dR}{dk} = -nR,$$

d'où

$$R = C e^{-nk} :$$

en posant $k = 0$, il vient d'ailleurs

$$C = \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

La formule

$$R = \frac{1}{\sqrt{n}} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} e^{-nk}$$

est donc démontrée.

