# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



LÉOPOLD KRONECKER


**Démonstration de l'irréductibilité de l'équation $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0$, où $n$ désigne un nombre premier**


*Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série*, tome 1 (1856), p. 399-400.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__399_0>

# DÉMONSTRATION

DE

## L'IRRÉDUCTIBILITÉ DE L'ÉQUATION $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0$,

OU $n$ DÉSIGNE UN NOMBRE PREMIER;

PAR M. LÉOPOLD KRONECKER.

Si l'expression $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$ était le produit de deux polynômes à coefficients entiers $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on obtiendrait, en faisant $x = 1$, l'équation

$$n = \varphi(1).\psi(1).$$

Il résulte de là que l'un des nombres entiers $\varphi(1)$ et $\psi(1)$ doit être égal à $\pm 1$ et l'autre à $\pm n$. Supposons que l'on ait $\varphi(1) = \pm 1$. Puis désignons par $m_k$ un nombre entier positif tel que la congruence $k.m_k \equiv 1$ (mod. $n$) soit satisfaite, $k$ étant un quelconque des nombres $1, 2, 3, \ldots, n-1$. Enfin soit $\omega$ une des racines de l'équation

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1 = 0,$$

qui font évanouir le facteur $\varphi(x)$. Cela posé, on aura l'égalité

$$\varphi(\omega^{k.m_k}) = \varphi(\omega) = 0.$$

D'où l'on voit que l'expression $\varphi(x^{m_k})$ s'annule pour $x = \omega^k$, c'est-à-dire qu'elle contient le facteur $x - \omega^k$. Donc le produit

$$\text{(I)} \qquad \varphi(x^{m_1}).\varphi(x^{m_2})\ldots\varphi(x^{m_{n-1}})$$

sera divisible par le produit

$$(x-\omega)(x-\omega^2)\ldots(x-\omega^{n-1}),$$

c'est-à-dire par

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1.$$

Le produit est une fonction entière de $x$ à coefficients entiers. Par suite, en désignant cette fonction par $\mathrm{P}(x)$, le quotient qu'on obtient en divisant $\mathrm{P}(x)$ par $x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + 1$ sera lui-même une fonction entière de $x$ à coefficients entiers. Or, si l'on fait $x = 1$, il résulte de là que le quotient $\frac{\mathrm{P}(1)}{n}$ devrait être égal à un nombre entier; ce qui est impossible, car nous avons supposé que l'on a

$$\varphi(1) = \pm 1,$$

et par suite

$$\mathrm{P}(1) = \varphi(1)^{n-1} = 1.$$

On voit aisément qu'on peut appliquer le même raisonnement à l'équation qui ne contient que les racines primitives de l'équation $x^n = 1$, si $n$ est une puissance d'un nombre premier.