JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JAMES COCKLE

Note sur les fonctions de quatre et de cinq lettres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 383-384.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__383_0>

NOTE

SUR

LES FONCTIONS DE QUATRE ET DE CINQ LETTRES;

PAR M. JAMES COCKLE,

de l'Université et de la Société Philosophique de Cambridge, de la Société Astronomique de Londres, etc.

1. Soient

$$p^5, \quad q^5, \quad r^5, \quad s^5$$

les quatre fonctions résolvantes de Lagrange qui se présentent vers le commencement de la page 62 du Mémoire de M. J.-A. Serret (*voir* le cahier de Janvier 1850). Désignons par

$$\psi(a) \quad \text{ou} \quad \psi(a, b, c, d, e)$$

la fonction à laquelle M. Serret a été conduit vers la fin de la même page. Ces deux espèces de fonctions sont liées l'une à l'autre par la relation

$$pqrs = \varphi(a) - 5\psi(a),$$

où φ est une fonction symétrique des cinq lettres.

2. La somme des racines cinquièmes de l'unité est zéro : donc, en faisant

$$A = a - e, \quad B = b - e, \quad C = c - e, \quad D = d - e,$$

on voit que les égalités

$$P = A + \alpha B + \alpha^2 C + \alpha^3 D = p - (1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4) e = p,$$

sont *identiques*. Les égalités correspondantes

$$Q = q, \quad R = r, \quad S = s$$

le sont aussi. Moyennant ces formules, on peut constater la relation

$$PQRS = \varphi(A) - 5\psi(A),$$

où φ est encore symétrique.

3. En posant

$$\frac{\psi(A)}{ABCD} = \rho(A),$$

et faisant subir à ρ les substitutions indiquées par

$$(A, B), \quad (A, C), \quad (A, D), \quad (B, D) \quad \text{et} \quad (C, D),$$

on obtient

$$\rho_1(A) = \frac{A}{B} + \frac{B}{D} + \frac{D}{C} + \frac{C}{A},$$

$$\rho_2(A) = \frac{B}{A} + \frac{A}{D} + \frac{D}{C} + \frac{C}{B},$$

$$\rho_3(A) = \frac{C}{B} + \frac{B}{D} + \frac{D}{A} + \frac{A}{C},$$

$$\rho_4(A) = \frac{D}{B} + \frac{B}{A} + \frac{A}{C} + \frac{C}{D},$$

$$\rho_5(A) = \frac{A}{D} + \frac{D}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{A},$$

$$\rho_6(A) = \frac{A}{B} + \frac{B}{C} + \frac{C}{D} + \frac{D}{A},$$

d'où il suit que les six valeurs de ρ se distribuent dans trois paires, (ρ_1, ρ_4), (ρ_2, ρ_6) et (ρ_3, ρ_5). C'est ce qui fait voir que les coefficients de l'équation cubique

$$(\xi - \rho_1 - \rho_4)(\xi - \rho_2 - \rho_6)(\xi - \rho_3 - \rho_5) = 0,$$

sont des fonctions symétriques des lettres A, B, C, D.

4. Quand le produit $pqrs$ s'annule, l'équation dont les racines sont a, b, c, d, e peut se résoudre, conséquence que j'ai tirée ailleurs (*voir* la page 124 de mon Mémoire dans le *Philosophical Magazine* de Londres, cahier d'Août 1856).