JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

V.-A. LEBESGUE

Sur l'intégrale $\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi} d\varphi = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right)$ où $\alpha < 1$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 377-378.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__377_0>

SUR L'INTÉGRALE

$$\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) \quad \text{où} \quad \alpha < 1\,;$$

PAR M. V. A. LEBESGUE.

PROBLÈME. *Si le nombre n est divisé successivement par les nombres* 1, 2, 3,..., n, *pour un certain nombre h de diviseurs, le rapport du reste de la division au diviseur tombera au-dessous de* $\alpha < 1$. *Pour les autres diviseurs, ce rapport sera = ou >* α. *On demande la limite du rapport* $\frac{h}{n}$, *quand n devient de plus en plus grand.*

Dans l'article précédent, M. Lejeune-Dirichlet a trouvé pour cette limite

$$\lim \frac{h}{n} = \sum_{s=1}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right).$$

Si on la met sous la forme

$$\lim \frac{h}{n} = 1 + \sum_2^\infty \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s-(1-\alpha)}\right],$$

en posant

$$1 - \alpha = \beta,$$

et à cause de

$$\frac{1}{s-\beta} = \frac{1}{s}\left(1 + \frac{\beta}{s} + \frac{\beta^2}{s^2} + \frac{\beta^3}{s^3} + \ldots\right),$$

on aura

$$(1) \qquad \lim \frac{h}{n} = 1 - \beta \sum_2^\infty \frac{1}{s^2} - \beta^2 \sum_2^\infty \frac{1}{s^3} - \ldots.$$

Comme Euler a donné les sommes $\sum_1^\infty \frac{1}{s^m}$ avec seize décimales, on trouvera facilement l'expression numérique de $\lim \frac{h}{n}$.

Quand on pose

$$\alpha = \frac{a}{p}, \quad \sum \frac{1}{s} = \sum \frac{p}{ps}, \quad \sum \frac{1}{s+\alpha} = \sum \frac{p}{ps+a},$$

on trouve

$$\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{p}{a} + p\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{3p}\cdots\right) - p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{p+a} + \frac{1}{2p+a} + \ldots\right),$$

ou

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = \frac{p}{a} + p\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{a-1}}{1 - x^p}\,dx;$$

mais

$$\frac{p}{a} = p\int_0^1 x^{a-1}\,dx;$$

donc enfin

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right) = p\int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{a+p-1}}{1 - x^p}\,dx = \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi,$$

en posant $x^p = \varphi$.

Si l'on fait

$$\mathrm{I}_\alpha = \int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi}\,d\varphi, \quad \alpha = \frac{a}{p},$$

on trouvera par les formules connues

$$\mathrm{I}_\alpha = \frac{1}{\alpha} - \log 2p - \frac{\pi}{2}\cot\alpha\pi + 2\sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} \cos\alpha\,.\,2s\pi\,.\,\log\sin s\,.\,\frac{\pi}{p}. \tag{2}$$

Cette formule suppose p impair; pour p pair, les limites de la somme $\sum$ deviendraient 1 et $\frac{p}{2} - 1$.

De cette formule on tirerait encore

$$\mathrm{I}_{1-\alpha} - \mathrm{I}_\alpha = \frac{2\alpha - 1}{\alpha(1-\alpha)} + \pi\cot\alpha\pi. \tag{3}$$

Mais la formule (1) paraît plus propre au calcul numérique, surtout quand p n'est pas un petit nombre.