JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEJEUNE-DIRICHLET

Sur la détermination des valeurs moyennes dans la théorie des nombres

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 353-370.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__353_0>

SUR LA DÉTERMINATION DES VALEURS MOYENNES DANS LA THÉORIE DES NOMBRES;

Par M. LEJEUNE-DIRICHLET.

(Lu à l'Académie des Sciences de Berlin le 9 août 1849.)

Traduit de l'allemand par M. Jules Hoüel.

Bien que les fonctions que l'on considère dans la Théorie des Nombres ne soient presque jamais susceptibles d'être représentées par des expressions analytiques, et semblent soumises à une marche tout à fait irrégulière, cependant on rencontre dans les valeurs moyennes de ces fonctions une tendance à la régularité d'autant plus grande que l'on s'avance plus loin dans leur série, c'est-à-dire qu'il y a des expressions simples et déterminées qui représentent la marche des valeurs moyennes avec une exactitude toujours croissante, absolument de la même manière qu'une courbe suit de plus en plus près, dans son parcours, une autre courbe dont elle est asymptote. On trouve ainsi, vers la fin de la cinquième section des *Disquisitiones arithmeticæ,* plusieurs expressions très-remarquables de cette espèce, qui se rapportent à la théorie des formes quadratiques. Comme ces résultats intéressants, que l'auteur ne fait qu'indiquer en passant et sans les prouver, n'avaient pas encore été démontrés, et que, d'autre part, les méthodes propres à traiter ce genre de questions sont généralement peu connues, je m'étais déjà occupé, il y a plusieurs années, de chercher des moyens propres à atteindre ce but. Cependant, de ce travail, je n'ai rien livré à la publicité, à l'exception de quelques résultats nouveaux, parce que j'avais conçu le dessein, en continuant mes efforts, de simplifier encore dans quelque point essentiel la résolution de pareils problèmes, et en particulier de la rendre indépendante du calcul intégral. D'autres recherches m'ont alors détourné assez longtemps de cet objet. Lorsque plus tard je m'y suis remis, je me suis convaincu que, dans beaucoup de cas, des considérations tout à fait élémentaires, basées sur une transformation de séries de la plus grande simplicité, suffisent pour conduire à l'expression asymptotique de la valeur moyenne. Je me bornerai pour le moment à une suite de problèmes pour lesquels le moyen que j'emploie suffit seul. Dans un Mémoire suivant, je m'occuperai de problèmes plus difficiles, dont la solution exige que l'on combine la transformation en question avec d'autres moyens auxiliaires.

§ I.

Pour présenter sous son vrai jour la transformation sur laquelle repose principalement la solution des problèmes traités dans ce Mémoire, il me paraît convenable de commencer par une des questions les plus simples, d'en pousser la solution aussi loin que cela peut se faire sans cette transformation, et de la compléter alors avec le secours de celle-ci. Désignons par $f(n)$ le nombre des diviseurs du nombre entier n, et proposons-nous ce problème, de déterminer ce que l'on peut appeler le *terme sommatoire* de cette fonction, c'est-à-dire la somme

$$f(1)+f(2)+\ldots+f(n)=\mathrm{F}(n).$$

Soit s un nombre entier $\leqq n$; il se trouvera, dans notre somme, autant d'unités correspondantes au diviseur s qu'il y aura de multiples de s parmi les nombres $1, 2, \ldots, n$. Or le nombre de ces multiples est $\left[\frac{n}{s}\right]$, en nous servant, comme nous le ferons toujours dans la suite, de crochets carrés pour désigner le plus grand nombre entier contenu dans la quantité entre crochets. Il résulte de là

$$\mathrm{F}(n)=\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right],$$

le signe de sommation se rapportant à s. De cette équation sort immédiatement une détermination approchée, ou, en d'autres termes, une expression asymptotique de $\mathrm{F}(n)$. En effet, $\frac{n}{s}$ surpassant le nombre entier $\left[\frac{n}{s}\right]$ de moins d'une unité, on a, à une erreur près qui ne peut pas surpasser la limite n,

$$\mathrm{F}(n)=n\sum_1^n \frac{1}{s}.$$

Mais on a

$$\sum_{1}^{n} \frac{1}{s} = \log n + C + \frac{1}{2n} + \ldots,$$

où $C = 0,5772156\ldots$.

La dernière expression de $F(n)$ étant déjà en erreur d'une quantité de l'ordre de n, il ne faut conserver de la série infinie que son premier terme, et l'on voit alors que l'équation

$$F(n) = n \log n$$

est exacte à une erreur près du premier ordre, erreur dont on peut, du reste, obtenir facilement une limite supérieure. Maintenant la fonction qui est de l'ordre de $n \log n$ contient-elle dans son expression asymptotique un terme de l'ordre de n avec un coefficient constant, ou, en d'autres termes, la quantité $\frac{1}{n} F(n) - \log n$, pour des valeurs croissantes de n, converge-t-elle vers une limite fixe? C'est ce qu'on ne peut décider par le procédé actuel.

§ II.

La transformation en question, dont nous allons maintenant nous occuper, repose sur cette simple remarque que, tandis que les termes de la série

$$\left[\frac{n}{1}\right], \quad \left[\frac{n}{2}\right], \ldots, \quad \left[\frac{n}{s}\right], \ldots,$$

terminée au $n^{ième}$ terme, commencent par décroître très-rapidement, chaque terme, au contraire, à partir d'un certain rang, devient égal au suivant ou ne le surpasse plus que d'une unité. Cela arrivera évidemment aussitôt que la différence $\frac{n}{s} - \frac{n}{s+1} = \frac{n}{s(s+1)}$ sera devenue égale ou inférieure à l'unité. Si l'on détermine donc le plus petit nombre entier μ qui satisfasse à la condition $\mu(\mu + 1) \geqq n$, la propriété en question aura lieu au plus tard à partir du $\mu^{ième}$ terme inclusivement. Mais comme il est tout à fait indifférent pour notre objet que la transformation que nous avons en vue soit étendue à un terme de plus ou de moins, nous choisirons, pour plus de simplicité, μ égal à la racine carrée de n, si elle est entière; ou, dans le cas de l'incommensurabilité de cette racine, égal au nombre entier immédiatement supérieur. On a ainsi $\mu^2 \geqq n$, et par suite $\mu(\mu+1) > n$. Posons maintenant

$$\left[\frac{n}{\mu}\right] = \nu,$$

ν, comme il est facile de le voir, pouvant différer de μ tout au plus de deux unités, et désignons par t un quelconque des nombres ν, $\nu-1, \ldots, 2, 1$; on peut aisément déterminer l'indice s du terme $\left[\frac{n}{s}\right]$ le plus éloigné du commencement auquel corresponde la valeur t, et qui soit suivi par conséquent d'un terme ayant pour valeur $t-1$. L'indice cherché est donné par la double condition

$$\frac{n}{s} \geqq t, \quad \frac{n}{s+1} < t,$$

d'où résulte immédiatement

$$s \leqq \frac{n}{t}, \quad s+1 > \frac{n}{t},$$

c'est-à-dire

$$s = \left[\frac{n}{t}\right].$$

Considérons maintenant la somme

$$\left[\frac{n}{1}\right]\varphi(1) + \left[\frac{n}{2}\right]\varphi(2) + \ldots + \left[\frac{n}{p}\right]\varphi(p),$$

où p, comme cela s'entend naturellement, est pris $\overline{\gtrless} n$, et en même temps $> \mu$, ou plutôt considérons seulement la partie de cette somme

$$\left[\frac{n}{\mu}\right]\varphi(\mu) + \ldots + \left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s) + \ldots + \left[\frac{n}{p}\right]\varphi(p),$$

qui commence au $\mu^{ième}$ terme : nous pouvons la transformer de manière à réunir dans des sommes partielles les termes pour lesquels $\left[\frac{n}{s}\right]$ a la même valeur, et ajouter ensuite toutes les sommes partielles.

Détachons, pour plus d'uniformité, de la première somme partielle le terme correspondant à $s = \mu$, reportons-le avec les $\mu - 1$ termes déjà mis à part, et posons

$$\left[\frac{n}{p}\right] = q.$$

Les sommes partielles, d'après ce qui précède, s'étendent respectivement depuis

$s=\mu$ exclus., jusqu'à $s=\left[\frac{n}{\nu}\right]$ inclus., et la valeur corresp. de $\left[\frac{n}{s}\right]=\nu$,

$s=\left[\frac{n}{\nu}\right]$ » $s=\left[\frac{n}{\nu-1}\right]$ » $\left[\frac{n}{s}\right]=\nu-1$,

$s=\left[\frac{n}{\nu-1}\right]$ » $s=\left[\frac{n}{\nu-2}\right]$ » $\left[\frac{n}{s}\right]=\nu-2$,

. . . .

$s=\left[\frac{n}{q+1}\right]$ » $s=p$ » $\left[\frac{n}{s}\right]=q$.

En désignant maintenant par $\psi(s)$ le terme sommatoire de la fonction $\varphi(s)$, c'est-àdire $\sum\varphi(s)$, pris depuis $s=1$ jusqu'à $s=s$, les valeurs des sommes partielles sont

$$\nu\left(\psi\left[\frac{n}{\nu}\right]-\psi(\mu)\right),\quad (\nu-1)\left(\psi\left[\frac{n}{\nu-1}\right]-\psi\left[\frac{n}{\nu}\right]\right),$$
$$(\nu-2)\left(\psi\left[\frac{n}{\nu-2}\right]-\psi\left[\frac{n}{\nu-1}\right]\right),\ldots,\quad q\left(\psi(p)-\psi\left[\frac{n}{q+1}\right]\right),$$

et leur réunion donne l'expression

$$-\nu\psi(\mu)+\psi\left[\frac{n}{\nu}\right]+\psi\left[\frac{n}{\nu-1}\right]+\ldots+\psi\left[\frac{n}{q+1}\right]+q\psi(p).$$

Nous obtenons ainsi la formule générale de transformation

$$(a)\quad \sum_1^p\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s)=q\psi(p)-\nu\psi(\mu)+\sum_1^\mu\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s)+\sum_{q+1}^\nu\psi\left[\frac{n}{s}\right].$$

Le cas qui se présente le plus fréquemment dans l'application de cette formule est celui où $p=n$, et par suite $q=1$. Il vient dans cette hypothèse

$$(b)\qquad \sum_1^n\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s)=-\nu\psi(\mu)+\sum_1^\mu\left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s)+\sum_1^\nu\psi\left[\frac{n}{s}\right].$$

Comme on le voit, l'avantage de cette transformation consiste en ce que, par son moyen, une série dont le nombre des termes est n, et qui contient dans chaque terme un facteur de la forme $\left[\frac{n}{s}\right]$, est ramenée à deux autres dans lesquelles le nombre des termes qui contiennent de même les $\left[\frac{n}{s}\right]$ est abaissé à l'ordre de $\sqrt{n}$. Une semblable transformation est encore exécutable lorsqu'au lieu du dénominateur s, il entre dans l'expression $\left[\frac{n}{s}\right]$ une fonction de s croissant avec s. Toutefois, une telle généralité étant superflue pour le but que nous nous proposons actuellement, nous nous restreindrons à la forme de série plus particulière que nous venons de considérer.

§ III.

Reprenons maintenant le problème traité dans le § I; on a, en posant dans l'équation (b), $\varphi(s) = 1$ et par suite $\psi(s) = s$,

$$F(n) = \sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right] = -\mu\nu + \sum_1^\mu \left[\frac{n}{s}\right] + \sum_1^\nu \left[\frac{n}{s}\right].$$

En mettant dans les deux sommes $\frac{n}{s}$ au lieu de $\left[\frac{n}{s}\right]$, l'erreur est seulement de l'ordre de $\sqrt{n}$, et comme on a, à la même erreur près,

$$n\sum_1^\mu \frac{1}{s} = n\sum_1^\nu \frac{1}{s} = \frac{1}{2} n\log n + Cn, \quad \mu\nu = n,$$

il en résulte, à une erreur près de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$F(n) = n\log n + (2C - 1)n.$$

De l'expression asymptotique que nous venons de trouver pour la fonction $F(n)$, on peut maintenant déduire facilement une expression de la valeur moyenne du nombre des diviseurs. Écrivons, pour plus d'exactitude, l'équation sous la forme

$$F(n) = n\log n + (2C - 1)n + \zeta\sqrt{n},$$

la quantité ζ étant à la vérité inconnue, mais devant, pour n suffisamment grand, conserver constamment une valeur numérique inférieure à une limite déterminée qu'il serait facile d'assigner. Changeons

n en $n+s$, ζ devenant alors ζ', et divisons par s la différence des deux équations; il vient, pour la moyenne arithmétique des nombres de diviseurs correspondants aux s nombres $n+1, n+2, \ldots, n+s$,

$$\log(n+s) + 2C - 1 + \frac{n}{s}\log\left(1+\frac{s}{n}\right) + \frac{\zeta'\sqrt{n+s} - \zeta\sqrt{n}}{s}.$$

Si l'on imagine maintenant que $\frac{s}{\sqrt{n}}$ croisse au delà de toute limite, le dernier terme convergera vers zéro, c'est-à-dire que la différence entre cette moyenne arithmétique et l'expression formée par les termes restants deviendra plus petite que toute grandeur assignable. Si à la supposition que l'on vient de faire on joint encore celle-ci, que $\frac{n}{s}$ surpasse aussi toute limite, on obtient pour la moyenne correspondante à cette double hypothèse la valeur asymptotique très-simple

$$\log n + 2C,$$

qui, comme on le voit facilement, est encore vraie lorsque n, au lieu de désigner le nombre qui précède immédiatement la suite des s nombres par rapport auxquels est prise la moyenne, coïncide avec un de ces nombres mêmes. Car si m est un de ces nombres, on a $n+t=m$, t étant $\leqq s$, et la différence $\log m - \log n$, par suite de la supposition précédente, converge vers zéro.

§ IV.

L'équation obtenue ci-dessus

$$\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right] = n\log n + (2C-1)n,$$

dans laquelle l'erreur est de l'ordre de $\sqrt{n}$, nous fournit l'occasion d'une remarque sur laquelle nous allons nous arrêter un instant. Comme, d'autre part,

$$\sum_1^n \frac{n}{s} = n\log n + Cn,$$

l'erreur, pour chaque valeur de n, ne dépassant pas une limite constante, on a, avec une erreur de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$\sum_1^n \left(\frac{n}{s} - \left[\frac{n}{s}\right]\right) = (1 - C)\,n.$$

Puisque, d'après cela, la moyenne arithmétique des valeurs de la différence $\frac{n}{s} - \left[\frac{n}{s}\right]$ correspondante à $s = 1, 2, \ldots, n$ est $= 1 - C$, c'est-à-dire $< \frac{1}{2}$, on peut en induire que, si l'on divise successivement n par tous les nombres en question, le cas où le reste sera moindre que la moitié du diviseur se présentera plus souvent que le cas contraire, où le reste serait égal ou supérieur à cette moitié. Nous allons prouver la justesse de cette induction, et déterminer dans quelle proportion les nombres $1, 2, \ldots, n$, se partagent sous ce rapport en deux groupes. Le nombre s présentera le premier cas ou le second, suivant que l'on aura

$$\frac{n}{s} - \left[\frac{n}{s}\right] < \frac{1}{2}, \quad \text{ou bien} \quad \geqq \frac{1}{2}.$$

Comme on a alors respectivement

$$\left[\frac{2n}{s}\right] - 2\left[\frac{n}{s}\right] = 0,$$

ou bien

$$\left[\frac{2n}{s}\right] - 2\left[\frac{n}{s}\right] = 1,$$

le nombre des termes contenus dans le second groupe sera donné par l'expression

$$\sum_1^n \left[\frac{2n}{s}\right] - 2\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right],$$

dont le second terme a déjà été déterminé ci-dessus. Pour déterminer le premier, on se servira de l'équation (a) en y changeant n en $2n$, et y faisant

$$p = n, \quad q = 2, \quad \varphi(s) = 1, \quad \psi(s) = s.$$

On aura ainsi

$$\sum_1^n \left[\frac{2n}{s}\right] = 2n - \mu\nu + \sum_1^\mu \left[\frac{2n}{s}\right] + \sum_3^\nu \left[\frac{2n}{s}\right].$$

Puisque μ est le nombre entier immédiatement supérieur à $\sqrt{2n}$, et que $\nu = \left[\frac{2n}{\mu}\right]$, $\mu\nu$ ne diffère donc de $2n$ que d'une quantité de l'ordre de $\sqrt{n}$, et par suite les deux premiers termes se détruisent. Pour la première somme, on obtient, en négligeant toujours les quantités de l'ordre de $\sqrt{n}$,

$$\sum_1^\mu \left[\frac{2n}{s}\right] = 2n \sum_1^\mu \frac{1}{s} = 2n(\log\mu + C) = n\log 2n + 2Cn.$$

La seconde somme aurait la même valeur s'il n'y manquait pas les deux termes correspondants à $s=1$ et à $s=2$. Pour obtenir $\sum_1^n \left[\frac{2n}{s}\right]$, il suffit donc de doubler l'expression que l'on vient de trouver, et d'en retrancher $\left[\frac{2n}{1}\right] + \left[\frac{2n}{2}\right] = 3n$. On trouve donc, pour le nombre des termes du second groupe, $(\log 4 - 1)n$, et par suite, pour le nombre des termes du premier, $(2 - \log 4)n$. Donc, pour une grande valeur de n, le nombre des diviseurs jouissant de la première propriété est au nombre des diviseurs jouissant de la seconde comme $2 - \log 4$ est à $\log 4 - 1$.

§ V.

Considérons maintenant la fonction $f(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de n, ou plutôt considérons encore immédiatement, comme au § I, la somme

$$F(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n),$$

formée au moyen de cette fonction. Par des raisonnements tout à fait semblables à ceux que nous avons exposés dans cet endroit, on trouve

$$F(n) = \sum_1^n s\left[\frac{n}{s}\right].$$

On en tire, en faisant usage de l'équation (b),

$$F(n) = -\frac{1}{2}(\mu^2+\mu)\nu + \sum_1^\mu s\left[\frac{n}{s}\right] + \frac{1}{2}\sum_1^\nu \left(\left[\frac{n}{s}\right]^2 + \left[\frac{n}{s}\right]\right).$$

Pour voir de quel ordre sont les grandeurs que l'on est forcé de négliger, ne pouvant les déterminer complétement, considérons d'abord la première partie de la dernière somme. Si l'on pose

$$\left[\frac{n}{s}\right] = \frac{n}{s} - \varepsilon,$$

ε étant une fraction dépendante de n et de s et plus petite que l'unité, il vient

$$\sum_1^\nu \left[\frac{n}{s}\right]^2 = \sum_1^\nu \frac{n^2}{s^2} - 2\sum_1^\nu \frac{n}{s}\varepsilon + \sum_1^\nu \varepsilon^2,$$

où le deuxième et le troisième terme, qui ont respectivement pour limites supérieures de leurs ordres $n \log n$ et $\sqrt{n}$, sont à négliger à cause de la fraction ε, non exprimable analytiquement, que ces termes renferment. La seconde partie de la somme, c'est-à-dire $\sum_1^\nu \left[\frac{n}{s}\right]$, que nous avons déjà déterminée plus haut et qui est de l'ordre de $n \log n$, ne doit pas non plus être conservée, quoique l'on puisse donner cette partie avec une exactitude allant jusqu'au premier ordre inclusivement. Comme on a de plus, en négligeant le premier ordre,

$$(\mu^2 + \mu)\nu = n^{\frac{3}{2}}, \qquad \sum_1^\mu s\left[\frac{n}{s}\right] = n^{\frac{3}{2}},$$

il vient alors la relation

$$\mathrm{F}(n) = \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}n^2\sum_1^\nu \frac{1}{s^2},$$

exacte à une erreur près de l'ordre de $n \log n$. On a maintenant d'autre part, en vertu d'une formule connue,

$$\sum_1^\nu \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{\nu} + \frac{1}{2\nu^2} - \dots,$$

et par suite, au premier ordre près,

$$\frac{1}{2}n^2\sum_1^\nu \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{12}n^2 - \frac{1}{2}n^{\frac{3}{2}}.$$

On en conclut finalement l'équation

$$\mathrm{F}(n) = \frac{\pi^2}{12}n^2,$$

dans laquelle l'ordre de l'erreur ne dépasse pas celui de $n \log n$.

Si l'on détermine, à l'aide de l'expression que nous venons de trouver, la valeur moyenne de $f(n)$, on trouve, pour cette valeur moyenne

$$\frac{1}{s}\{f(n+1)+\ldots+f(n+s\},$$

l'expression asymptotique

$$\frac{\pi^2}{6}n,$$

en supposant que l'on fasse croître simultanément s et n de manière que

$$\frac{n}{s} \quad \text{et} \quad \frac{s}{\log n}$$

surpassent toute limite finie. Ce résultat a cependant, comme il est facile de le voir, une signification essentiellement différente de celle du résultat trouvé à la fin du § III. Tandis que, dans celui-ci, la différence entre la vraie valeur moyenne et son expression asymptotique peut devenir moindre que toute grandeur donnée, cela n'a lieu, dans le cas actuel, que pour le rapport de cette différence à la valeur moyenne exacte ou approchée.

§ VI.

Dans les problèmes que nous avons traités jusqu'ici, et dont la solution peut servir en tout de modèle pour d'autres pareils qu'il nous semble superflu de rapporter, la fonction qu'il s'agissait de déterminer approximativement avait immédiatement la forme de la série (a). Dans d'autres cas, cette fonction est donnée par une équation contenant une série dans le terme général de laquelle se trouve la fonction à déterminer, de sorte que l'on ne connaît ainsi qu'une relation entre des valeurs consécutives de la fonction. L'exemple le plus simple de cette espèce est offert par la fonction $\varphi(n)$, qui exprime combien la suite 1, $2,\ldots, n$ renferme de nombres premiers avec n, et qui joue un si grand rôle dans la théorie des nombres. On sait que cette fonction a pour expression

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\ldots,$$

a, b, c,..., étant les différents nombres premiers qui divisent n. Mais cette formule n'est pas appropriée à nos recherches, et il faut choisir un autre point de départ. Partons de l'équation connue

$$\sum \varphi(\delta) = n,$$

où le signe de sommation s'étend aux différents diviseurs δ de n. Faisant la somme de cette équation et des équations analogues qui ont lieu pour $n-1$, $n-2$,..., 1, le premier membre se trouvera contenir le terme $\varphi(s)$, s étant $\leqq n$, autant de fois qu'il y a de multiples de s dans la suite des nombres $1, 2,..., n$, c'est-à-dire $\left[\frac{n}{s}\right]$ fois. On a ainsi

$$\sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right] \varphi(s) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n.$$

Avant d'aller plus loin, nous allons revenir un instant sur la formule (b), et nous remarquerons que, dans un grand nombre de problèmes, dont celui que nous avons traité dans le paragraphe précédent fait partie, on abrége le calcul en étendant la transformation à toute la série, bien que l'on perde par là un avantage indispensable dans d'autres cas, celui de ramener à un ordre inférieur le nombre des termes. Pour obtenir la formule ainsi modifiée, considérons que, t désignant généralement un quelconque des nombres $1, 2,..., n$, la valeur de t ne se trouvera pas toujours, il est vrai, parmi les termes

$$\left[\frac{n}{1}\right], \left[\frac{n}{2}\right],..., \left[\frac{n}{s}\right],..., \left[\frac{n}{n}\right],$$

parce que ces termes diminuent très-rapidement au commencement de la série; mais que l'on peut toujours trouver un terme et un seul qui, étant $\overline{\gtrless} t$, soit suivi d'un autre ayant une valeur $< t$. L'indice s de ce terme doit, comme précédemment, satisfaire aux inégalités $\frac{n}{s} \geqq t$ et $\frac{n}{s+1} < 1$, d'où résulte $s = \left[\frac{n}{t}\right]$. D'après cela, on a généralement $\left[\frac{n}{s}\right] = t$, depuis $s = \left[\frac{n}{t+1}\right]$ exclusivement jusqu'à $s = \left[\frac{n}{t}\right]$ inclusivement; et la somme de tous les termes dans lesquels $\left[\frac{n}{s}\right]$ a la valeur t, est égale à

$\left(\psi\left[\frac{n}{t}\right]-\psi\left[\frac{n}{t+1}\right]\right)t$, expression qui s'évanouit, sans cesser d'être exacte, lorsqu'il n'existe aucun terme ayant cette valeur, c'est-à-dire lorsque $\left[\frac{n}{t}\right]=\left[\frac{n}{t+1}\right]$. Faisant la somme des valeurs de cette expression pour $t=1, 2,\ldots, n$, et remarquant que, pour $t=n$, le terme $\psi\left[\frac{n}{t+1}\right]$ doit évidemment se réduire à zéro, il vient

$$(c) \qquad \sum_1^n \left[\frac{n}{s}\right]\varphi(s)=\sum_1^n \psi\left[\frac{n}{s}\right],$$

transformation dont nous allons maintenant faire usage dans notre problème.

Notre équation précédente devient, en vertu de celle-ci,

$$\sum_1^n \psi\left[\frac{n}{s}\right]=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n.$$

On voit de suite que l'expression asymptotique de $\psi(n)$ sera de la forme αn^2, α étant une constante. On pourrait, dans la démonstration suivante, laisser d'abord cette constante indéterminée, la suite du développement devant faire connaître plus tard sa valeur $\alpha=\frac{3}{\pi^2}$. Cependant, comme cette valeur est très-facile à apercevoir tout d'abord, nous allons de suite, pour abréger, admettre l'expression $\frac{3}{\pi^2}n^2$. Quelle que puisse être la forme encore inconnue de la fonction $\psi(n)$, on peut poser, en général,

$$\psi(n)=\frac{3}{\pi^2}n^2+\zeta\chi(n),$$

ζ dépendant encore de n, et la fonction $\chi(n)$ pouvant être choisie arbitrairement, avec cette seule restriction, qu'elle reste toujours positive, qu'elle croisse avec l'argument, et qu'elle ne s'évanouisse pas pour la valeur $n=1$ donnée à cet argument. Supposons donc $\chi(n)$ choisie conformément à ces conditions, et remplaçons dans notre équation n successivement par toutes les valeurs, depuis $n=1$ jusqu'à $n=N$; les valeurs correspondantes de ζ seront toutes finies. Soit enfin A la plus grande des valeurs numériques de ζ. Cela posé, mettons notre équation sous la forme

$$\psi(n) = -\sum_2^n \psi\left[\frac{n}{s}\right] + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n,$$

et considérons maintenant les valeurs de n comprises depuis $n = N + 1$ jusqu'à $n = 2N$. Dans la somme précédente, $\left[\frac{n}{s}\right]$ ne surpassant pas la limite N, on voit que la partie de cette somme qui résulte de la substitution du second terme de $\psi(n)$ écrite plus haut, est numériquement plus petite que $A\sum_2^n \chi\left(\frac{n}{s}\right)$. La partie provenant du premier terme, savoir $\frac{3}{\pi^2}\sum_2^n \left[\frac{n}{s}\right]^2$, devient, en posant encore $\left[\frac{n}{s}\right] = \frac{n}{s} - \varepsilon$,

$$\frac{3n^2}{\pi^2}\sum_2^n \frac{1}{s^2} - \frac{6n}{\pi^2}\sum_2^n \frac{\varepsilon}{s} + \frac{3}{\pi^2}\sum_2^n \varepsilon^2.$$

Comme on a maintenant

$$\sum_2^n \frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \tau,$$

τ étant de l'ordre de $\frac{1}{n}$, et que les ordres des deux autres sommes ne peuvent respectivement surpasser ceux de $\log n$ et de n, il vient

$$\psi(n) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + \xi,$$

ξ étant une quantité numériquement plus petite que

$$P n \log n + A\sum_2^n \chi\left(\frac{n}{s}\right),$$

si l'on désigne par P une constante suffisamment grande, indépendante de N. Comparant ce résultat, qui est vrai depuis $n = N + 1$ jusqu'à $n = 2N$, avec l'expression admise précédemment pour $\psi(n)$, savoir $\frac{3}{\pi^2}n^2 + \zeta\chi(n)$, on voit que, dans ce nouvel intervalle, la plus grande valeur numérique de ζ ne surpasse pas le maximum des valeurs que prend, dans cet intervalle, l'expression

$$\frac{P n \log n}{\chi(n)} + \frac{A}{\chi(n)}\sum_2^n \chi\left(\frac{n}{s}\right).$$

En donnant maintenant à la fonction $\chi(n)$, laissée jusqu'ici indéterminée, la forme d'une puissance positive n^δ, l'expression multipliée par A devient

$$\sum_2^n \frac{1}{s^\delta} < \sum_2^\infty \frac{1}{s^\delta} = q,$$

et l'on peut choisir δ entre 1 et 2 de telle sorte que la constante q soit une fraction moindre que l'unité. D'un autre côté, on peut prendre N assez grand pour que, pour $n \overline{\gtrless} N$, on ait $P\frac{n \log n}{n^\delta} < k$, k étant une constante aussi petite que l'on voudra. En désignant par A' la plus grande des valeurs numériques que prend ζ entre $n = N + 1$ et $n = 2N$, on a

$$A' < Aq + k.$$

Maintenant, puisque k peut, pour N croissant, devenir aussi petit que l'on voudra, et que A ne diminue pas, tandis que q reste constant, il s'ensuit que, pour N suffisamment grand, $A' < A$, c'est-à-dire que la valeur A qui servait à l'origine de maximum jusqu'à $n = N$, en servira aussi jusqu'à 2N, puis par la même raison jusqu'à 4N, 8N,..., ou en général indéfiniment.

On a donc

$$\psi(n) = \frac{3}{\pi^2} n^2,$$

avec une erreur qui ne peut dépasser l'ordre de n^δ, la constante δ surpassant aussi peu que l'on voudra la valeur γ déterminée par l'équation

$$\sum_2^\infty \frac{1}{s^\gamma} = 1.$$

D'après cela, la valeur moyenne de $\varphi(n)$ aura pour expression la formule

$$\frac{6}{\pi^2} n,$$

dont la signification est évidente par ce qui précède.

§ VII.

Nous choisirons pour dernier exemple la fonction $\varphi(n)$, qui exprime le nombre de toutes les décompositions possibles de n en deux facteurs n'ayant pas de diviseur commun, et qui a comme on sait pour expression l'exponentielle 2^ρ, ρ désignant combien il y a de nombres premiers différents qui divisent n. En posant encore

$$\sum_1^n \varphi(s) = \psi(n),$$

$\psi(n)$ dépendra très-simplement de la fonction $F(n)$ que nous avons considérée dans les §§ I et III. En effet, $F(n)$ exprime évidemment combien il y a de couples de nombres x, y satisfaisant à la condition $xy \leqq n$, tandis que $\psi(n)$ désigne combien il y a de couples de nombres ξ, η premiers entre eux, et pour lesquels on ait également $\xi\eta \leqq n$. Partageons maintenant les couples x, y en groupes dont le $s^{ième}$ contienne ceux des couples x, y qui ont s pour plus grand commun diviseur; de sorte que, en posant

$$x = \xi s, \quad y = \eta s,$$

ξ et η soient des nombres premiers entre eux, et divisons l'inégalité par s^2; il viendra

$$\xi\eta \leqq \frac{n}{s^2} \quad \text{ou} \quad \xi\eta \leqq \left[\frac{n}{s^2}\right].$$

Réciproquement aussi, deux nombres premiers entre eux ξ, η satisfaisant à cette dernière condition, donnent en les multipliant par s deux nombres x, y ayant pour plus grand commun diviseur s, et pour lesquels $xy \leqq n$, d'où il suit que le nombre des couples contenus dans le $s^{ième}$ groupe a pour expression $\psi\left[\frac{n}{s^2}\right]$. On obtient ainsi l'équation

$$\sum \psi\left[\frac{n}{s^2}\right] = F(n) = n\log n + (2C - 1)n,$$

la somme devant être prise depuis $s = 1$ jusqu'à $s = [\sqrt{n}]$, et le terme négligé ne dépassant pas, d'après ce qu'on a vu, l'ordre de $\sqrt{n}$. Il est facile de voir, d'après cela, que l'expression asymptotique de $\psi(n)$ doit avoir la forme

$$\alpha n \log n + \beta n,$$

α et β désignant deux constantes qu'il reste encore à déterminer. Pour cela, faisons comme au paragraphe précédent, dans notre équation,

$$\psi(n) = \alpha n \log n + \beta n + \zeta n^{\delta};$$

choisissons α et β de telle sorte que les termes de l'ordre de $n \log n$ et de n se détruisent, ce qui donne les valeurs

$$a = \frac{6}{\pi^2}, \quad \beta = \frac{6}{\pi^2}\left(\frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C - 1\right),$$

où C a toujours la même signification que précédemment, et où

$$C' = \sum_2^\infty \frac{\log s}{s^2}:$$

on trouve, par des considérations tout à fait analogues à celles qui ont été développées dans le paragraphe précédent, que ζ, pour une valeur de n aussi grande qu'on voudra, reste inférieur à une limite finie, pourvu que l'on ait $\delta > \frac{1}{2}\gamma$, γ désignant la même valeur que ci-dessus. De l'expression que l'on vient de trouver pour $\psi(n)$,

$$\alpha n \log n + \beta n,$$

il résulte pour la valeur moyenne de $\varphi(n)$, prise dans un sens déterminé par ce qui a été dit tout à l'heure,

$$\frac{6}{\pi^2}\left(\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C\right).$$

De la question que nous venons de traiter dépend la valeur moyenne donnée dans les *Disquisitiones arithmeticæ*, art. **301**, pour le nombre des *genres* qui correspondent à un déterminant négatif $-n$. Les expressions du nombre des genres correspondant aux cinq formes linéaires

$$n = 8h, \quad n = 8h + 4, \quad n = 4h + 2, \quad n = 4h + 1 \quad n = 4h + 3,$$

sont, d'après des propositions connues,

$$\varphi(n), \quad \frac{1}{2}\varphi(n), \quad \frac{1}{2}\varphi(n), \quad \varphi(n), \quad \frac{1}{2}\varphi(n).$$

D'un autre côté, en apportant aux considérations exposées précédemment des modifications faciles à trouver et dont nous laissons la recherche au lecteur, on peut déterminer la valeur approchée de $\psi(n)$, n ayant une des formes linéaires ci-dessus, et la somme $\sum\varphi(s) = \psi(n)$ devant s'étendre, non plus à tous les nombres $1, 2, \ldots, n$, mais seulement aux nombres de cette suite qui ont la forme linéaire désignée; et l'on en déduira ensuite la valeur moyenne de $\varphi(n)$. On trouve ainsi pour les valeurs moyennes correspondantes aux cinq formes linéaires, en posant, pour abréger, $\log n + \frac{12\,C'}{\pi^2} + 2\,C = \Delta$,

$$\frac{8}{\pi^2}\left(\Delta - \frac{8}{3}\log 2\right), \quad \frac{8}{\pi^2}\left(\Delta - \frac{2}{3}\log 2\right),$$
$$\frac{8}{\pi^2}\left(\Delta + \frac{1}{3}\log 2\right), \quad \frac{4}{\pi^2}\left(\Delta + \frac{4}{3}\log 2\right), \quad \frac{4}{\pi^2}\left(\Delta + \frac{4}{3}\log 2\right).$$

D'après ce qui précède, ces expressions multipliées respectivement par $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$, donnent les nombres moyens des genres du déterminant $-n$ pour les cinq formes linéaires, et comme sur 8 nombres consécutifs il y en a respectivement $1, 1, 2, 2, 2$ contenus dans ces formes, la somme de nos expressions multipliées respectivement par $1\cdot\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}, 1\cdot\frac{2}{8}, \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{8}$, c'est-à-dire

$$\frac{4}{\pi^2}\left(\Delta - \frac{1}{6}\log 2\right),$$

sera le nombre moyen cherché des genres qui correspondent au déterminant $-n$, celui-ci étant pris avec toute sa généralité, c'est-à-dire n'étant plus restreint à une forme linéaire particulière : résultat qui coïncide avec celui que l'on trouve à l'endroit cité. Cette expression est vraie aussi pour le déterminant positif n : c'est ce qu'il est aisé de conclure de ce que les valeurs moyennes de $\varphi(n)$ correspondantes aux formes linéaires $4h + 1$, $4h + 3$, coïncident, et que d'ailleurs les exceptions qui proviennent des déterminants carrés sont évidemment sans influence sur le résultat final.