JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'équation $1.2.3\cdots(p-1)+1 = p^m$

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 351-352.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__351_0>

SUR L'ÉQUATION

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m;$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

On sait et il est d'ailleurs évident que l'expression

$$1.2.3\ldots(p-1)+1$$

n'est divisible par p que quand p est un nombre premier. A plus forte raison, faut-il que p soit premier pour que cette expression devienne une puissance de p et vérifie l'équation

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m.$$

Cela arrive pour $p=2$, $p=3$ et $p=5$, ainsi que le montrent les identités $1+1=2$, $1.2+1=3$, $1.2.3.4+1=5^2$. Mais je vais prouver que si p surpasse 5, l'équation dont nous parlons est impossible.

En effet on en tirerait, en retranchant 1 des deux membres, puis divisant par $p-1$,

$$1.2.3\ldots(p-2)=p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+p+1.$$

Le produit $1.2.3\ldots(p-2)$ contient, si p est >5, les deux facteurs distincts 2 et $\frac{p-1}{2}$; il est donc divisible par leur produit $p-1$: il faudrait donc que

$$p^{m-1}+p^{m-2}+\ldots+p+1$$

fût divisible par $p-1$, et comme chacun des termes donne l'unité pour reste de la division par $p-1$, il faudrait que la somme de ces restes, qui est le nombre m, fût divisible par $p-1$. Dès lors m serait au moins égal à $p-1$, et conséquemment le produit $1.2.3\ldots(p-1)$ serait au moins égal à $p^{p-1}-1$. Or on a évidemment, au contraire,

$$1.2.3\ldots(p-1)<(p-1)^{p-1}<p^{p-1}-1.$$

L'équation

$$1.2.3\ldots(p-1)+1=p^m$$

est donc impossible pour $p>5$.

On voit à quoi tiennent les exceptions pour 2, 3 et 5. Pour $p=5$, les facteurs 2 et $\frac{p-1}{2}$ ne sont plus distincts, et l'on n'a plus le droit de se servir, comme on l'a fait, de leur produit $p-1$. Pour $p=3$ et $p=2$, on n'a plus même le facteur 2.

On prouverait semblablement que l'équation

$$\left(1.2.3\ldots\frac{p-1}{2}\right)^2+1=p^m,$$

qui a lieu pour $p=5$ puisque $(1.2)^2+1=5$, n'a jamais lieu dès que p surpasse 5.

Enfin un mode analogue de discussion s'applique à l'équation

$$1.2.3\ldots(s-1).1.2.3\ldots(p-s)=p^m\pm 1.$$

Mais ici, outre le facteur $\frac{p-1}{2}$, on peut avoir à employer aussi $\frac{p+1}{2}$ et $\frac{p\pm 1}{4}$.