JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MOLINS

De la surface développable passant par une courbe donnée quelconque, et qui, par son développement, transformerait cette courbe en un arc de cercle de rayon donné

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 265-286.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__265_0>

DE

LA SURFACE DÉVELOPPABLE

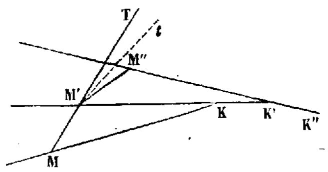
PASSANT PAR UNE COURBE DONNÉE QUELCONQUE, ET QUI, PAR SON DÉVELOPPEMENT, TRANSFORMERAIT CETTE COURBE EN UN ARC DE CERCLE DE RAYON DONNÉ;

PAR M. H. MOLINS,

Doyen de la Faculté des Sciences de Toulouse.

Il sera d'abord aisé de voir que le problème n'est possible qu'autant que le rayon donné surpasse le plus grand des rayons de courbure de la courbe donnée. On déterminera par une formule très-simple l'inclinaison de chaque plan tangent de la surface demandée sur le plan osculateur correspondant de la courbe; cette formule, qui exprime une propriété géométrique remarquable, fournit un mode de génération de cette surface, et permet de former son équation. Comme par chaque élément de la courbe on peut mener deux plans faisant avec le plan osculateur un angle égal à l'inclinaison précédente, on en conclut qu'il existe deux surfaces qui satisfont à la question. On détermine l'angle que fait chaque génératrice de la surface avec la tangente de la courbe donnée, ainsi que les angles de contingence et de torsion de l'arête de rebroussement de cette surface. Enfin on considère le lieu des centres des sphères de même rayon qui ont avec la courbe donnée un contact du second ordre, et l'on reconnaît que la surface polaire de la courbe donnée possède, par rapport à cette nouvelle courbe, la propriété de la transformer, par suite de son développement, en un arc de cercle d'un rayon égal au rayon commun de ces sphères. Réciproquement, la courbe donnée est située sur la surface polaire de la nouvelle courbe, et n'est autre chose que le lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre de cette dernière courbe qui auraient pour rayon commun le rayon donné, de sorte que cette nouvelle surface polaire est justement, par rapport à la courbe donnée, la surface qu'on se proposait de déterminer.

1. Soient M, M′, M″ trois points consécutifs de la courbe donnée, MK, M′K′, M″K″ les génératrices de la surface cherchée qui passent en ces points. Concevons que l'on fasse tourner autour de M′K le plan tangent M′KM jusqu'à ce qu'il se confonde avec le second plan tangent M″M′K′:



dans ce mouvement, la droite M′T décrit une portion de cône droit dont l'axe est M′K, et vient prendre la position M′t dans le plan M″M′K′. Dès lors l'angle tM′M″ résulte de la transformation de l'angle TM′M″ qui est l'angle de contingence ε de la courbe donnée; mais ces deux angles sont ceux que forme une même droite M′M″, menée du sommet de ce cône, avec deux génératrices M′T, M′t, dont la dernière est située dans le plan M″M′K passant par M′M″ et l'axe du cône. Il en résulte, comme il est aisé de le voir, que l'angle tM′M″ est le minimum des angles que fait M′M″ avec les diverses génératrices; on a donc

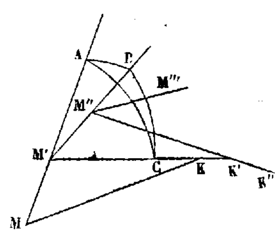
$$t\mathrm{M'M''} < \mathrm{TM'M''}, \quad \text{ou bien} \quad \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

en appelant ε_1 l'angle tM′M″ qui est l'angle de contingence de l'arc de cercle dans lequel la courbe se transforme. Soient ρ le rayon de courbure de la courbe en M, R le rayon du cercle; l'élément MM′ ou ds étant commun à la courbe et au cercle au point M, on aura

$$\varepsilon = \frac{ds}{\rho}, \quad \varepsilon_1 = \frac{ds}{\mathrm{R}},$$

par suite l'inégalité précédente devient $\mathrm{R} > \rho$. Ainsi la transformation dont il s'agit n'est possible qu'autant que le rayon donné surpasse le plus grand des rayons de courbure de la courbe donnée.

2. Cherchons l'inclinaison i du plan tangent MM′K sur le plan osculateur MM′M″. Considérons un triangle sphérique ABC situé sur une sphère d'un rayon égal à l'unité dont M′ serait le centre, et déterminé par les plans menés par chaque couple des droites MM′, M′M″, M′K. L'angle A de ce triangle n'est autre chose que l'inclinaison i; on a de plus



$$c = \varepsilon.$$

Ce triangle donne

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

formule qui devient, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, et remplaçant sin c par ε et cos c par l'unité,

$$\cos a = \cos b + \varepsilon \sin b \cos A.$$

Mais si l'on fait tourner le plan AM′ C autour de M′ C jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan BM′ C, la droite M′ A dans sa nouvelle position fera avec M′ B un angle égal à $b - a$ qui sera visiblement l'angle de contingence ε_1 de la transformée de la courbe donnée. On a donc

$$b - a = \varepsilon_1,$$

par suite,

$$\cos a = \cos(b - \varepsilon_1) = \cos b + \varepsilon_1 \sin b;$$

cette expression substituée dans la précédente formule donne

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos A, \quad \text{d'où} \quad \cos A = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon},$$

ou bien enfin

$$\cos i = \frac{\rho}{R}. \tag{1}$$

Si l'on se donnait l'inclinaison du plan MM′ K sur le plan osculateur MM′ M″, la formule

$$\varepsilon_1 = \varepsilon \cos A$$

déterminerait ce que devient l'angle de contingence de la courbe quand on fait tourner le premier plan autour d'une droite quelconque M′ K qui y est contenue, jusqu'à ce qu'il se confonde avec le plan M″ M′ K : elle montre donc que la nouvelle valeur de l'angle de contingence est indépendante de la position de la droite M′ K dans le plan MM′ K. Réciproquement, si l'on se donne le nouvel angle de contingence, la même formule détermine l'inclinaison qu'il faut donner au plan MM′ K par rapport au plan osculateur.

3. Concevons maintenant que, par les divers éléments de la courbe,

on mène une série de plans faisant avec les plans osculateurs correspondants des angles déterminés par la formule (1); il y aura une surface enveloppe de tous ces plans et telle que, si l'on venait à la développer, la courbe donnée se transformerait en une courbe dont le rayon de courbure serait partout égal à R, c'est-à-dire en un arc de cercle de même rayon. Supposons, par exemple, que la courbe donnée soit un cercle d'un rayon égal à ρ : dans ce cas, les plans tangents de la surface seront également inclinés sur le plan du cercle, et cette surface, qui est l'enveloppe de tous ces plans, sera un cône droit ayant pour axe la perpendiculaire élevée sur le plan du cercle par son centre. En outre, la longueur de chaque génératrice sera visiblement égale à $\frac{\rho}{\cos i}$, quantité égale à R. Dès lors on vérifie ici immédiatement, d'après cette construction, que le développement de la surface transformerait la courbe donnée en un arc de cercle d'un rayon égal à R.

Il existe d'ailleurs deux surfaces qui répondent à la question, puisque par chaque élément de la courbe on peut mener deux plans faisant avec le plan osculateur un angle déterminé par la formule (1). Si l'on voulait que la courbe donnée se transformât en une ligne droite, il faudrait faire $R = \infty$, ce qui donnerait $i = 90^\circ$ en vertu de la même formule. Ainsi les plans tangents de la surface demandée seraient perpendiculaires aux plans osculateurs, et l'on retrouve ainsi la surface que Lancret a fait connaître sous le nom de *surface rectifiante*.

4. Pour former l'équation de chacune des surfaces développables qui répondent à la question, déterminons d'abord celle d'un quelconque des plans dont elles sont les enveloppes. Ce plan doit être conduit suivant la tangente en M, et faire avec le plan osculateur un angle i déterminé par la formule (1). Appelons α, β, γ les angles que fait ce plan avec les plans de trois axes coordonnés rectangulaires, son équation pourra être mise sous la forme

$$(2) \qquad (x' - x)\cos\alpha + (y' - y)\cos\beta + (z' - z)\cos\gamma = 0,$$

x, y, z étant les coordonnées du point M de la courbe, x', y', z' les coordonnées courantes du plan; le même plan devant passer par la tangente en M, on aura

$$(3) \qquad \cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0.$$

Soient λ, μ, ν les angles que fait le plan osculateur de la courbe avec les plans coordonnés; si l'on exprime que le cosinus de l'angle du premier plan avec le plan osculateur est égal à $\cos i$ ou à $\frac{\rho}{R}$, on forme la relation

$$(4)\qquad \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = \frac{\rho}{R};$$

on a de plus l'équation de condition

$$(5)\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Les équations (3), (4), (5) détermineront $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ dont il faudra porter les valeurs dans l'équation (2). Éliminant successivement $\cos\alpha$, $\cos\beta$ entre (3) et (4), on obtient

$$\cos\alpha(\cos\mu\, dx - \cos\lambda\, dy) = \cos\gamma(\cos\nu\, dy - \cos\mu\, dz) - \frac{\rho}{R}\, dy,$$

$$\cos\beta(\cos\mu\, dx - \cos\lambda\, dy) = \cos\gamma(\cos\lambda\, dz - \cos\nu\, dx) + \frac{\rho}{R}\, dx.$$

On trouve d'ailleurs sans difficulté

$$\cos\nu\, dy - \cos\mu\, dz = -\rho\, d\frac{dx}{ds},$$

$$\cos\lambda\, dz - \cos\nu\, dx = -\rho\, d\frac{dy}{ds},$$

$$\cos\mu\, dx - \cos\lambda\, dy = -\rho\, d\frac{dz}{ds},$$

expressions qui changent les deux dernières équations en les suivantes :

$$\cos\alpha\, d\frac{dz}{ds} = \cos\gamma\, d\frac{dx}{ds} + \frac{1}{R}\, dy,$$

$$\cos\beta\, d\frac{dz}{ds} = \cos\gamma\, d\frac{dy}{ds} - \frac{1}{R}\, dx.$$

Les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$ qu'on tire de ces deux équations, étant portées dans les équations (2), (5), donnent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x'-x)\left(\cos\gamma\, d\frac{dx}{ds} + \frac{1}{R}\, dy\right)\\ &+ (y'-y)\left(\cos\gamma\, d\frac{dy}{ds} - \frac{1}{R}\, dx\right) + (z'-z)\, d\frac{dz}{ds} = 0\end{aligned}\right.$$

et

$$\cos^2\gamma\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right]+\frac{2}{\mathrm{R}}\cos\gamma\left(dy\,d\frac{dx}{ds}-dx\,d\frac{dy}{ds}\right)$$
$$+\frac{1}{\mathrm{R}^2}(dx^2+dy^2)-\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2=0.$$

Mais on a les formules

$$\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2=\frac{ds^2}{\rho^2},$$
$$dy\,d\frac{dx}{ds}-dx\,d\frac{dy}{ds}=\frac{1}{ds}(dy\,d^2x-dx\,d^2y),$$

qui transforment la dernière équation en la suivante :

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned}&\cos^2\gamma+\frac{2\rho^2}{\mathrm{R}\,ds^3}(dy\,d^2x-dx\,d^2y)\cos\gamma\\&\qquad+\frac{\rho^2}{ds^2}\left[\frac{1}{\mathrm{R}^2}(dx^2+dy^2)-\left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right]=0.\end{aligned}\right.$$

Cette équation déterminera pour $\cos\gamma$ deux valeurs qu'on portera dans l'équation (6), ce qui donnera les équations des deux plans conduits suivant la tangente en M et faisant avec le plan osculateur un angle égal à i. Pour former les équations des deux surfaces qui sont respectivement les enveloppes des plans de l'une et de l'autre espèce, on regardera dans l'équation (6) la quantité $\cos\gamma$ comme remplacée par la valeur tirée de l'équation (7), et l'on éliminera la variable indépendante dont x, y, z et $\cos\gamma$ sont des fonctions entre l'équation (6) et sa différentielle prise par rapport à la même variable. Si la courbe donnée était plane, il n'y aurait, à proprement parler, qu'une solution, car les deux surfaces seraient visiblement symétriques par rapport au plan de la courbe.

5. Appliquons ce qui précède au cas où la courbe donnée serait une hélice située sur un cylindre circulaire droit. Prenons l'axe du cylindre pour axe des z, et pour plan des x, y le plan même de la base, en ayant soin de faire passer l'axe des x par le point où l'hélice rencontre cette base.

Appelons R' le rayon du cylindre, a la cotangente de l'angle constant que fait chaque tangente de l'hélice avec la direction des génératrices, $R'.t$ l'arc du cercle de la base compris entre le point où l'hélice rencontre son plan et la projection d'un point quelconque de cette courbe sur le même plan. On aura

$$x = R' \cos t, \quad y = R' \sin t, \quad z = R' at;$$

on trouvera que l'équation (7) devient

$$\cos^2 \gamma - 2 \frac{R'}{R} \sqrt{1 + a^2} \cos \gamma + \frac{R'^2}{R^2} (1 + a^2) = 0,$$

d'où

$$\cos \gamma = \frac{R'}{R} \sqrt{1 + a^2},$$

ce qui montre que les plans tangents de la surface demandée ont une inclinaison constante par rapport à la base du cylindre. On tire des équations (3) et (5)

$$\cos \alpha = a \cos \gamma \sin t \pm \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma},$$
$$\cos \beta = -a \cos \gamma \cos t \pm \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}.$$

Ces expressions, étant portées dans l'équation (2), donnent pour l'équation d'un plan tangent quelconque

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' \left(a \cos \gamma \sin t \pm \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}\right) \\ + y' \left(-a \cos \gamma \cos t \pm \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}\right) \\ + z' \cos \gamma = R' at \cos \gamma \pm R' \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}. \end{array} \right.$$

Le double signe répond aux surfaces qui satisfont à la question; les signes supérieurs doivent être pris ensemble, et de même les signes inférieurs. Les dérivées du premier et du second ordre de cette équation prises par rapport à t donnent

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' \left(a \cos \gamma \cos t \mp \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}\right) \\ + y' \left(a \cos \gamma \sin t \pm \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}\right) = R' a \cos \gamma, \end{array} \right.$$

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} x' \left(-a \cos \gamma \sin t \mp \cos t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}\right) \\ + y' \left(a \cos \gamma \cos t \mp \sin t \sqrt{\sin^2 \gamma - a^2 \cos^2 \gamma}\right) = 0. \end{array} \right.$$

L'élimination de t entre les équations (8), (9), (10) donnera les équations de l'arête de rebroussement de la surface demandée. En ajoutant d'abord les équations (8) et (10), puis les carrés des équations (9) et (10), on trouve

$$(11)\qquad \begin{cases} z'\cos\gamma = R'at\cos\gamma \pm R'\sqrt{\sin^2\gamma - a^2\cos^2\gamma}, \\ x'^2 + y'^2 = R'^2 a^2 \cot^2\gamma; \end{cases}$$

cette dernière équation montre que l'arête de rebroussement est située sur un cylindre circulaire droit concentrique au premier, et dont le rayon de la base est $R'a\cot\gamma$. Si l'on élimine successivement x', y' entre (9) et (10), on obtient

$$x'\sin^2\gamma = R'a\cos\gamma\left(a\cos\gamma\cos t \mp \sin t\sqrt{\sin^2\gamma - a^2\cos^2\gamma}\right),$$

$$y'\sin^2\gamma = R'a\cos\gamma\left(a\cos\gamma\sin t \pm \cos t\sqrt{\sin^2\gamma - a^2\cos^2\gamma}\right).$$

Ces expressions de x', y' et celle de z', donnée par la première des équations (11), étant différentiées, permettront de calculer ds'; on trouvera

$$\sin\gamma\, ds' = R'a\,dt, \quad \frac{dz'}{ds'} = \sin\gamma.$$

Donc chaque tangente de l'arête de rebroussement fait un angle constant avec la direction des génératrices du cylindre; par suite cette courbe est une nouvelle hélice située sur un cylindre droit concentrique au premier, et chacune des surfaces cherchées est un héliçoïde développable.

6. Déterminons l'angle KM'M que fait la génératrice KM' avec l'élément MM' ou avec la tangente menée au point M. Cet angle, que nous appellerons i', est le supplément du côté b du triangle sphérique; nous désignerons par ω l'angle de torsion de la courbe. La génératrice KM' est donnée par l'intersection des deux plans tangents conduits suivant MM' et M'M''; le premier de ces plans CM'A fait avec le plan osculateur AM'B ou MM'M'' un angle i dont le cosinus est $\frac{\rho}{R}$. Donc le second plan tangent CM'B fera avec le plan osculateur suivant M'M''M''' un angle égal à $i + di$, et par suite avec le premier plan

osculateur un angle égal à $i + di \pm \omega$ qui sera visiblement le supplément de l'angle B du triangle sphérique; le double signe de ω se rapporte aux deux surfaces qui satisfont à la question. Le même triangle sphérique donne

$$\cot b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \cot B,$$

mais

$$b = \pi - i', \quad c = \varepsilon, \quad A = i, \quad B = \pi - (i + di + \omega),$$

en prenant pour ω le signe + pour fixer les idées; la formule précédente deviendra, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$- \varepsilon \cot i' = \cos i - \sin i \cot (i + di + \omega),$$

ou bien

$$\varepsilon \cot i' = \sin i [\cot (i + di + \omega) - \cot i].$$

On trouve d'ailleurs sans difficulté

$$\cot (i + di + \omega) = \cot i - (di + \omega)(1 + \cot^2 i),$$

par suite on aura

$$\varepsilon \cot i' = - \frac{di + \omega}{\sin i}.$$

Mettant pour $\sin i$ et di leurs valeurs déterminées à l'aide de la relation $\cos i = \frac{\rho}{R}$, on obtient la formule

(12) $$\varepsilon \cot i' = \frac{d\rho}{R\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)} - \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}}.$$

7. On peut aisément déterminer les angles de contingence et de torsion de l'arête de rebroussement de chaque surface développable. Il est clair que l'angle C du triangle sphérique est l'angle de torsion ω' de cette arête : or ce triangle donne

$$\cos C = - \cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c,$$

ou bien, en mettant pour A, B, C, c leurs valeurs et rejetant les infiniment petits d'un ordre supérieur au second,

$$1-\frac{\omega'^2}{2}=\cos i\cos(i+di+\omega)+\sin i\sin(i+di+\omega).\left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\right),$$

ou bien

$$1-\frac{\omega'^2}{2}=\cos(di+\omega)-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2 i,$$

ou enfin

$$(13)\ \omega'=\sqrt{(di+\omega)^2+\varepsilon^2\sin^2 i}=\sqrt{\left(\omega-\frac{d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\right)^2+\varepsilon^2\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)}.$$

Quant à l'angle de contingence ε' de l'arête de rebroussement qui n'est autre chose que l'angle M'K'M'', on le déterminera à l'aide du triangle M'M''K'.

De la formule (12) qui détermine cot i', on tirerait par la différentiation di'; on peut donc regarder comme connu l'angle $i'+di'$ qui est égal à l'angle M'M''K'. De plus, l'angle K'M'M'' est mesuré par le côté a du triangle sphérique; or on a trouvé

$$b-a=\varepsilon\cos i,$$

d'où

$$a=b-\varepsilon\cos i=\pi-i'-\varepsilon\cos i.$$

On a donc

$$M'M''K'=i'+di',\quad K'M'M''=\pi-i'-\varepsilon\cos i,$$

par suite le triangle M''M'K' donnera pour la valeur de l'angle M'K'M'' ou ε',

$$(14)\qquad \varepsilon'=\varepsilon\cos i-di'.$$

Il ne resterait plus qu'à mettre pour cos i et di' leurs valeurs tirées des formules déjà trouvées.

8. Les valeurs de i', ε' serviront à déterminer l'élément ds' de la nouvelle courbe, et par suite l'arc s' au moyen d'une quadrature. Le triangle MM'K donne

$$\begin{aligned}MK &: ds :: \sin i' : \varepsilon',\\ M'K &: ds :: \sin(i'+\varepsilon') : \varepsilon',\end{aligned}$$

d'où

$$MK = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i', \quad M'K = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin(i' + \varepsilon');$$

on a d'ailleurs

$$M'K' = MK + d.MK,$$

ou bien

$$M'K' = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' + d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i'.$$

La quantité ds' étant égale à KK', il vient

$$ds' = M'K' - M'K;$$

mettant pour M' K et M' K' les valeurs précédentes, on trouve

$$ds' = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' + d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \frac{ds}{\varepsilon'} \sin(i' + \varepsilon'),$$

ou bien, en rejetant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

(15) $$ds' = d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \cos i' ds;$$

on aura donc

$$s' + C = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \int \cos i' ds,$$

C désignant une constante arbitraire. Si l'on nomme ρ' le rayon de courbure de la nouvelle courbe, on aura

(16) $$\rho' = \frac{ds'}{\varepsilon'} = \frac{1}{\varepsilon'}\left[d.\frac{ds}{\varepsilon'} \sin i' - \cos i' ds\right].$$

9. Supposons que la courbe donnée soit l'hélice que nous avons considérée au n° 5; on aura

$$\varepsilon = \frac{dt}{\sqrt{1 + a^2}}, \quad \omega = \frac{a\,dt}{\sqrt{1 + a^2}},$$

$$ds = \sqrt{1 + a^2}.R'dt, \quad \rho = (1 + a^2)R', \quad \cos i = \frac{R'}{R}(1 + a^2).$$

35..

On trouvera que les formules (12), (13), (14), (15), (16) donnent

$$\cot i' = \frac{Ra}{\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)^2}}, \quad \omega' = \frac{dt}{R}\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)}, \quad \varepsilon' = \frac{R'}{R}\sqrt{1+a^2}\,dt,$$

$$ds' = \frac{RR'\,a\,dt}{\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)}}, \quad \rho' = \frac{R^2 a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{R^2 - R'^2(1+a^2)}}.$$

L'arête de rebroussement de la surface développable étant ici une nouvelle hélice, appelons r et a' les quantités analogues à R' et a; on aura visiblement

$$a' = \frac{\omega'}{\varepsilon'}, \qquad r = \frac{\rho'}{1+a'^2}.$$

Mettant pour ω', ε', ρ' les valeurs précédentes, on trouve

$$a' = \frac{1}{R'}\sqrt{\frac{R^2 - R'^2(1+a^2)}{1+a^2}}, \qquad r = R'^2\, a\sqrt{\frac{1+a^2}{R^2 - (1+a^2)R'^2}}.$$

Ces résultats s'accordent avec ceux qu'on a obtenus au n° 5, car a' est la cotangente d'un angle dont le cosinus a été donné par la formule

$$\frac{dz'}{ds'} = \sin\gamma,$$

de sorte qu'on a

$$a' = \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\gamma}}{\cos\gamma};$$

si l'on remplace $\cos\gamma$ par sa valeur $\frac{R'}{R}\sqrt{1+a^2}$, on retrouve la précédente valeur de a'. Quant au rayon r qui est celui du cylindre sur lequel est située la nouvelle hélice, on avait trouvé

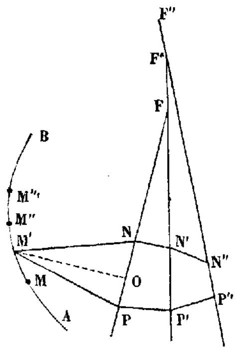
$$r = R'\,a\cot\gamma,$$

ce qui revient à

$$r = \frac{R'a}{a'};$$

et si l'on met pour a' sa valeur, on retombe sur la précédente valeur de r.

10. Considérons la surface polaire de la courbe donnée, et sur cette surface la courbe qui serait le lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R. Nous allons démontrer que si l'on développe cette surface, la nouvelle courbe se transformera en un arc de cercle de même rayon. Soient NF l'intersection des plans normaux en M, M'; N' F' celle des plans normaux en M', M'', ainsi de suite; ces droites sont des arêtes de la surface polaire. Prenons sur ces droites une série de points N, N', N'',..., tels que les distances NM', N'M'', N'' M''',..., soient égales à R : le lieu de ces points sera une courbe N N' N''... dont chaque point sera un centre de sphère osculatrice du second ordre d'un rayon égal à R. Pour développer la surface polaire, faisons tourner autour de N' F' le plan NFN' qui



est le plan normal en M', jusqu'à ce qu'il se confonde avec le plan normal suivant N' F' N''; dans ce mouvement, la droite N' M' contenue dans le premier plan décrira autour de N' F' une portion de cône droit, et puisque la droite N' F' est l'intersection des plans normaux en M', M'', l'extrémité M' tombera en M'', et la droite NM' dans sa nouvelle position NM'' aura conservé la même longueur égale à R. Pareillement, si l'on fait tourner le second plan normal, confondu avec le premier, autour de N'' F'' jusqu'à ce qu'il coïncide avec le plan normal en M''', le point M'' tombera en M''' puisque N'' F'' est l'intersection des plans normaux en M'', M''', et la droite NM'', qui y est maintenant située, prendra la position NM''' en conservant sa longueur égale à R. En continuant ainsi, on voit qu'après le développement de la surface polaire, le point M' aura parcouru la suite des positions M'', M''',..., et que la droite NM' n'aura pas cessé de conserver sa longueur primitive R. Supposons que l'on ait arrêté le mouvement des divers plans normaux lorsque le point M' sera arrivé en B; alors la surface se trouvera développée dans le plan normal en B, et la droite NB située dans ce plan sera d'une longueur égale à R. Par la même raison, la distance N' B sera égale à R, ainsi de suite; d'où il résulte que la transformée de la courbe NN' N''... sera telle qu'en menant d'un point B de son plan une droite NB à un quelconque de ses points, cette droite sera d'une longueur égale à R. Donc la courbe NN' N''... se trouvera transformée en un cercle d'un rayon égal à R et dont le centre sera le point B : c'est ce qu'il fallait démontrer. Il existe d'ailleurs sur la surface polaire une seconde courbe PP′ P″... qui est aussi un lieu des centres de sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R, et qui se transformerait de même en un cercle de même rayon.

11. Il existe entre les courbes AB et NN′N″... une réciprocité remarquable : on va voir, en effet, que la courbe donnée AB est par rapport à la nouvelle courbe NN′ N″... un lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R. Soient x'', y'', z'' les coordonnées du centre d'une sphère osculatrice du second ordre d'un rayon égal à R ; elles satisferont aux équations suivantes, qui sont celles de l'intersection de deux plans normaux consécutifs :

$$(17)\quad \begin{cases} (x''-x)\,dx + (y''-y)\,dy + (z''-z)\,dz = 0, \\ (x''-x)\,d^2x + (y''-y)\,d^2y + (z''-z)\,d^2z - ds^2 = 0; \end{cases}$$

si l'on y joint l'équation

$$(18)\qquad (x''-x)^2 + (y''-y)^2 + (z''-z)^2 = R^2,$$

ces trois équations détermineront le centre de la sphère qui a, avec la courbe donnée au point (x, y, z), un contact du second ordre. On peut donc regarder x'', y'', z'' comme des fonctions d'une variable indépendante t en fonction de laquelle se trouveraient exprimés x, y, z au moyen des équations de la courbe donnée. L'élimination de t entre les équations (17) et (18) donnerait deux équations en x'', y'', z'' qui seraient celles du lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R.

Cela posé, différentions la première des équations (17) en y regardant toutes les quantités qui y entrent comme des fonctions de t ; nous aurons

$$\begin{aligned} (x''-x)\,d^2x + (y''-y)\,d^2y + (z''-z)\,d^2z - ds^2 + dx''\,dx \\ + dy''\,dy + dz''\,dz = 0, \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en vertu de la deuxième équation (17),

$$(19)\qquad dx''\,dx + dy''\,dy + dz''\,dz = 0.$$

On en conclut que les tangentes des deux courbes sont perpendiculaires entre elles; donc la tangente de la nouvelle courbe est située dans le plan normal de la courbe donnée, ou, ce qui revient au même, le plan normal de la courbe donnée est un plan touchant de la nouvelle courbe.

Différentions en second lieu l'équation (18), ce qui donne

$$(x''-x)(dx''-dx)+(y''-y)(dy''-dy)+(z''-z)(dz''-dz)=0;$$

on en conclut, à cause de la première des équations (17),

$$(20)\qquad (x''-x)\,dx''+(y''-y)\,dy''+(z''-z)\,dz''=0,$$

ce qui montre que la tangente de la nouvelle courbe est perpendiculaire au rayon de la sphère qui joint les points (x, y, z), (x'', y'', z''). Dès lors la tangente de la nouvelle courbe se construirait en menant par le point (x'', y'', z''), dans le plan normal de la courbe donnée, une perpendiculaire au rayon qui passe au point (x, y, z). On remarquera que l'équation (20) n'est autre chose que celle du plan normal de la nouvelle courbe où l'on mettrait x, y, z à la place des coordonnées courantes. Si l'on différentie cette équation, on trouvera

$$\begin{aligned}(x''-x)\,d^2x''+(y''-y)\,d^2y''+(z''-z)\,d^2z''&\\ +ds''^2-dx\,dx''-dy\,dy''-dz\,dz''&=0,\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, en vertu de l'équation (19),

$$(21)\quad (x''-x)\,d^2x''+(y''-y)\,d^2y''+(z''-z)\,d^2z''+ds''^2=0.$$

Les équations (20) et (21) sont celles de l'intersection de deux plans normaux consécutifs de la nouvelle courbe, où l'on mettrait x, y, z à la place des coordonnées courantes. Il en faut conclure que le point (x, y, z) est, par rapport à la nouvelle courbe, le centre d'une sphère osculatrice du second ordre d'un rayon égal à R : donc les deux courbes sont telles, que chacune est, par rapport à l'autre, un lieu des centres des sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R.

On remarquera que le plan normal de chacune de ses courbes contient la tangente de l'autre, et est par conséquent perpendiculaire au plan normal de cette dernière.

Il suit de ce qui précède que la courbe donnée AB est située sur les surfaces polaires des courbes NN′ N″..., PP′ P″..., et que, si l'on développait ces surfaces, la courbe AB se trouverait transformée en un arc de cercle d'un rayon égal à R. Ces deux surfaces doivent donc coïncider avec les deux surfaces développables passant par la courbe donnée, et que nous avons déterminées directement.

12. On peut déterminer immédiatement les angles de contingence et de torsion de la courbe NN′ N″..., car ces angles sont égaux respectivement aux angles de torsion et de contingence de l'arête de rebroussement de sa surface polaire; or cette surface polaire coïncide, d'après ce qui vient d'être démontré, avec l'une des deux surfaces développables passant par la courbe donnée que nous avons déterminées aux nos **3** et **4**. Dès lors la formule (13) détermine l'angle de contingence de la courbe NN′ N″..., et la formule (14) détermine son angle de torsion. On pourrait au reste déterminer directement ces deux quantités, ce qui fournirait une confirmation de ce qui précède.

Cherchons la longueur d'un arc quelconque de la même courbe: nous avons désigné par ds'' l'élément NN′; abaissons du point M′ sur la droite FN la perpendiculaire M′O. Le point O sera le centre de courbure de la courbe AB au point M′; représentons par H la distance FO. Le triangle NFN′ donne

$$\mathrm{NN'} : \mathrm{NF} :: \sin \mathrm{NFN'} : \sin \mathrm{NN'F};$$

mais du triangle rectangle NM′O on tire

$$\mathrm{NO} = \sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2},$$

par suite

$$\mathrm{NF} = \mathrm{FO} - \mathrm{NO} = \mathrm{H} - \sqrt{\mathrm{R}^2 - \rho^2}.$$

De plus, d'après la propriété de la tangente de la courbe NN′ N″..., l'élément NN′ est une perpendiculaire à NM′ située dans le plan normal de la courbe AB au point M′. On en conclut que l'angle

$$\mathrm{N'NO} = \mathrm{NM'O}$$

qui n'est autre chose que l'angle désigné plus haut par i, puisque son cosinus a visiblement pour valeur $\frac{\rho}{R}$; par suite,

$$NN'F = N'NO - NFN' = i - \omega,$$

car l'angle NFN' est égal à l'angle de torsion de la courbe AB. Portant dans la proportion ces valeurs de NF et des angles NFN', NN'F, on obtient

$$ds'' : H - \sqrt{R^2 - \rho^2} :: \sin\omega : \sin(i - \omega),$$

d'où l'on tire, en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier,

$$\sin i\, ds'' = \omega\left(H - \sqrt{R^2 - \rho^2}\right),$$

ou bien, en mettant pour sin i sa valeur $\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}}$,

$$ds'' = \frac{R\omega}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\left(H - \sqrt{R^2 - \rho^2}\right).$$

Mais nous avons trouvé la relation

$$d\rho = H\omega$$

(*voir* le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, tome VIII, page 381); on en déduit la valeur de H, et l'on trouve

$$ds'' = \frac{R\,d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} - R\omega, \tag{22}$$

d'où

$$s'' + K = R \arcsin\frac{\rho}{R} - R\int \omega,$$

K désignant une constante arbitraire dont la valeur dépendra de l'origine de l'arc s''. Si la courbe donnée était plane, on aurait $\omega = 0$, et le rayon de courbure ρ pourrait être remplacé, à une constante près K', par l'arc correspondant σ de la développée plane de la courbe, ce qui donnerait la formule

$$s'' + K = \arcsin\frac{\sigma + K'}{R}.$$

Nous avons vu qu'il existe sur la surface polaire de la courbe AB une seconde courbe PP′P″... analogue à la courbe NN′N″..., et qui est aussi un lieu des centres de sphères osculatrices du second ordre d'un rayon égal à R. Ainsi, au point M′ passent deux de ces sphères dont les centres N, P sont situés sur la droite NF et à égale distance du centre O du cercle osculateur. Cette seconde courbe possède d'ailleurs les mêmes propriétés que la première : on verrait sans peine que la formule (22) lui est applicable, sauf le changement de $H - \sqrt{R^2 - \rho^2}$ en $H + \sqrt{R^2 - \rho^2}$; on aura donc, en désignant par ds''' l'élément PP′,

$$ds''' = \frac{R\,d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} + R\,\omega.$$

Si l'on ajoute cette équation avec la formule (22), on trouve

$$ds'' + ds''' = \frac{2R\,d\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}},$$

d'où, en intégrant,

$$\frac{s'' + s'''}{2} = R \arcsin\frac{\rho}{R} + K'',$$

K″ étant une nouvelle constante arbitraire.

Enfin la formule (22) combinée avec la formule (13) servirait à trouver le rayon de courbure ρ'' de la courbe NN′N″.... On a, en effet,

$$\rho'' = \frac{ds''}{\omega'},$$

puisque ω' est égal à l'angle de contingence de cette courbe; mettant pour ds'' et ω' les valeurs données par les deux formules (22), (13), on trouve

$$\frac{d\rho - \omega\sqrt{R^2 - \rho^2}}{\sqrt{(d\rho - \omega\sqrt{R^2 - \rho^2})^2 + R^2\varepsilon^2\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)^2}}.$$

13. On peut se proposer la question inverse de celle qui a été résolue aux nos **3**, **4**, en se donnant une surface développable et cherchant sur cette surface les courbes que son développement transformerait en un arc de cercle de rayon donné. On connaîtra alors la courbe

KK′K″..., par conséquent ε', ω', et l'on cherchera les équations de la courbe AB; il est aisé de voir que tout dépendra de l'expression de la longueur MK que nous désignerons par l. D'après le n° **8**, nous aurons

$$l = \frac{ds}{\varepsilon'} \sin i', \quad \text{d'où} \quad ds = \frac{l\varepsilon'}{\sin i'};$$

portant cette expression dans la formule (15), on trouve

$$(23) \qquad dl - l\varepsilon' \cot i' = ds'.$$

D'un autre côté, on a

$$ds = \rho\varepsilon = \mathrm{R}\,\varepsilon \cos i = \mathrm{R}\,(di' + \varepsilon'),$$

ou bien

$$(24) \qquad \frac{l\varepsilon'}{\sin i'} = \mathrm{R}\,(di' + \varepsilon').$$

Les deux équations (23), (24) sont des équations différentielles simultanées du premier ordre par rapport à l et i'; leur intégration fera connaître ces deux quantités dont les expressions contiendront deux constantes arbitraires. Pour effectuer cette intégration, prenons dans l'équation (24) la valeur de l

$$(25) \qquad l = \mathrm{R} \sin i' \left(1 + \frac{di'}{\varepsilon'}\right),$$

et portons-la dans l'équation (23), ce qui donne

$$d.\sin i' \left(1 + \frac{di'}{\varepsilon'}\right) - (\varepsilon' + di') \cos i' = \frac{ds'}{\mathrm{R}},$$

ou, en réduisant,

$$d.\sin i' \frac{di'}{\varepsilon'} - \varepsilon' \cos i' = \frac{ds'}{\mathrm{R}},$$

ou bien encore, en posant $\cos i' = u$,

$$(26) \qquad d\frac{du}{\varepsilon'} + \varepsilon' u = -\frac{ds'}{\mathrm{R}}.$$

On fera dépendre l'intégration de cette équation de celle de l'équation

$$d\frac{du}{\varepsilon'} + \varepsilon' u = 0\,;$$

or cette dernière a pour intégrale, en posant $\int \varepsilon' = v$,

$$u = \mathrm{A}\cos v + \mathrm{B}\sin v\,;$$

on prendra donc cette même expression pour former l'intégrale de l'équation (26), en y regardant A et B comme variables. On trouvera

$$\mathrm{A} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\int \sin v\, ds' + \mathrm{H}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{\mathrm{R}}\int \cos v\, ds' + \mathrm{H}',$$

H, H′ étant deux nouvelles constantes arbitraires, et l'on aura pour l'intégrale de l'équation (26)

$$u \text{ ou } \cos i' = \mathrm{H}\cos v + \mathrm{H}'\sin v$$
$$-\frac{1}{\mathrm{R}}\cos v\int \sin v\, ds' + \frac{1}{\mathrm{R}}\sin v\int \cos v\, ds'.$$

On en tirerait

$$\frac{\sin i'\, di'}{\varepsilon'} = \mathrm{H}\sin v - \mathrm{H}'\cos v$$
$$-\frac{1}{\mathrm{R}}\sin v\int \sin v\, ds' - \frac{1}{\mathrm{R}}\cos v\int \cos v\, ds'\,;$$

il ne resterait plus qu'à porter cette expression et celle de $\sin i'$ dans l'équation (25); la quantité l serait ainsi exprimée en fonction des données de la question et des constantes H, H′. Si l'on faisait $\mathrm{R} = \infty$, l'angle i serait droit, et, d'après la formule (14), on aurait

$$di' + \varepsilon' = 0, \quad \text{d'où} \quad i' = -\int \varepsilon' + \mathrm{K},$$

K étant une constante arbitraire; on porterait cette expression de i' dans l'équation (23) qui est linéaire et du premier ordre par rapport à l, et dont l'intégration ferait connaître l.

14. Cela posé, soient

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z),$$

les équations de la courbe donnée KK′ K″... ; les équations de la tangente KM menée au point K, pour lequel $z = \alpha$, seront

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\,\varphi'\alpha, \quad y - \psi\alpha = (z - \alpha)\,\psi'\alpha,$$

et l'on pourra supposer que x, y, z sont les coordonnées du point M de la courbe cherchée AB. On a en outre

$$l^2 = (x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2,$$

équation dans laquelle il faudra remplacer l par l'expression qui vient d'être trouvée, laquelle sera une fonction de α. On n'aura donc qu'à éliminer α entre ces trois équations, et l'on arrivera à deux équations en x, y, z qui seront celles de la courbe AB. Les constantes H, H′ pourraient être déterminées en exprimant que cette courbe doit passer par un point donné sur sa surface.

Les angles de contingence et de torsion de la courbe AB se détermineront sans difficulté. Le triangle sphérique considéré plus haut donne

$$\cot b \sin a = \cos a \cos C + \sin C \cot B\,;$$

or de la formule (14) combinée avec la relation $b - a = \varepsilon \cos i$, on tire

$$a = b - di' - \varepsilon' = \pi - (i' + di' + \varepsilon').$$

Portant dans la relation précédente cette valeur de a et celles de b, C, B trouvées aux nos **6** et **7**, on obtient

$$\cot i' \sin(i' + di' + \varepsilon') = \cos\omega' \cos(i' + di' + \varepsilon') + \sin\omega' \cot(i + di + \omega),$$

ou bien, en négligeant les infiniment petits du second ordre et d'un ordre plus élevé,

$$\frac{\cos^2 i'}{\sin i'}(di' + \varepsilon') = -(di' + \varepsilon')\sin i' + \omega' \cot i,$$

d'où

$$di' + \varepsilon' = \omega' \cot i \sin i'.$$

La formule (14) combinée avec cette dernière donne

$$\omega' \sin i' = \varepsilon \sin i\,;$$

ajoutant le carré de cette relation et celui de la formule (14), on trouve

$$\varepsilon^2 = (di' + \varepsilon')^2 + \omega'^2 \sin^2 i';$$

comme l'angle i' est connu, cette formule déterminera ε; ε étant connu, on déduira $\cos i$ de la formule (14); enfin les quantités ε, i, i' étant connues, on déduira ω de la formule

$$\varepsilon \cot i' = -\frac{di + \omega}{\sin i}.$$