JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Mémoire sur un cas particulier du problème des trois corps

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 248-264.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__248_0>

MÉMOIRE
SUR UN CAS PARTICULIER
DU PROBLÈME DES TROIS CORPS;

PAR M. J. LIOUVILLE [*].

(Lu à l'Académie des Sciences le 4 avril 1842).

Quoique les Géomètres soient loin d'avoir résolu d'une manière complète et générale le problème des trois corps, ils en ont obtenu cependant des solutions particulières dont on peut faire usage quand les coordonnées et les vitesses initiales remplissent certaines conditions. Lagrange et Laplace en ont donné divers exemples, que l'on trouve réunis et démontrés d'une manière simple dans le chapitre VI du X[e] livre de la *Mécanique céleste*. En voici un digne d'attention : Considérant trois masses rangées en ligne droite, Laplace prouve que si, après avoir établi entre ces masses et les distances qui les séparent une relation convenable, on imprime à deux d'entre elles autour du centre de la troisième des vitesses parallèles l'une à l'autre et proportionnelles aux distances au centre, les trois masses sous l'influence de leurs actions mutuelles resteront par la suite constamment en ligne droite, la droite qui les contient étant bien entendu mobile ; les vitesses et les distances pourront changer avec le temps, mais le rapport des vitesses et celui des distances seront égaux et invariables ; la loi du mouvement de chaque masse sera d'ailleurs la même que pour un point matériel attiré vers un centre fixe.

On sait que, dans notre système, les planètes dont la distance au Soleil est la plus grande se meuvent aussi le plus lentement, et que les carrés des temps des révolutions augmentent à peu près comme les cubes des grands axes des orbites. Dans le système particulier que nous venons d'indiquer, les choses ne se passeraient point ainsi. Quelle que soit en effet celle de nos trois masses que l'on veuille pren-

[*] Le préambule de ce Mémoire a déjà été inséré dans ce Journal (1[re] série, t. VII, p. 110). On a cru devoir néanmoins le reproduire ici, en donnant à son tour le Mémoire lui-même sans y rien ajouter et sans y rien changer, tel en un mot qu'il a paru il y a quatorze ans dans les Additions à la *Connaissance des Temps* pour 1845.

dre pour centre du mouvement, les deux autres qui doivent rester en ligne droite avec elle accompliront nécessairement leurs révolutions dans un temps égal, malgré l'inégalité des distances. C'est là assurément un théorème fort remarquable; mais n'oublions pas qu'il suppose, qu'il exige certaines conditions spéciales, et surtout une relation convenable entre les masses et les distances. Étant données trois masses quelconques, on peut du reste toujours faire en sorte que la relation dont il s'agit ait lieu. Pour fixer les idées, admettons que les trois masses soient celles du Soleil, de la Terre et de la Lune, et nous reconnaîtrons avec Laplace que cette relation serait satisfaite en plaçant la Lune sur le prolongement de la droite qui joint le centre du Soleil au centre de la Terre, à une distance de cette dernière planète égale à très-peu près à la centième partie de la distance de la Terre au Soleil : une modification légère dans la valeur de la masse de la Terre rendrait le nombre cité (un centième) rigoureusement exact. Cela étant, Laplace en conclut que si, à l'époque arbitraire prise pour origine, la Lune s'était trouvée en opposition avec le Soleil à une distance de cet astre représentée par 101, celle de la Terre étant représentée par 100, et que les vitesses relatives de la Terre et de la Lune autour du Soleil eussent été aussi à cette époque parallèles et dans le rapport de 100 à 101, la Lune serait toujours restée en opposition avec le Soleil, de manière à ne jamais cesser d'éclairer la terre pendant les nuits.

L'illustre auteur reproduit cette assertion dans l'*Exposition du Système du Monde* : « Quelques partisans des causes finales ont imaginé, dit-il, que la Lune a été donnée à la Terre pour l'éclairer pen-
» dant les nuits. Dans ce cas, la nature n'aurait point atteint le but
» qu'elle se serait proposé, puisque nous sommes souvent privés à la
» fois de la lumière du Soleil et de celle de la Lune. Pour y parvenir,
» il eût suffi de mettre à l'origine la Lune en opposition avec le Soleil
» dans le plan même de l'écliptique, à une distance égale à la cen-
» tième partie de la distance de la Terre au Soleil, et de donner à la
» Lune et à la Terre des vitesses parallèles et proportionnelles à leurs
» distances à cet astre. Alors la Lune, sans cesse en opposition au So-
» leil, eût décrit autour de lui une ellipse semblable à celle de la
» Terre; ces deux astres se seraient succédé l'un à l'autre sur l'hori-

» zon, et comme à cette distance la Lune n'eût point été éclipsée, sa » lumière aurait constamment remplacé celle du Soleil. »

Pour l'exactitude absolue de la proposition énoncée, il faut qu'à l'origine du temps la relation entre les masses et les distances et la proportionnalité de ces dernières aux vitesses aient été rigoureusement vérifiées, ainsi que le parallélisme des vitesses; il faut de plus qu'aucune cause perturbatrice ne vienne par la suite troubler le mouvement, ce qu'on ne peut pas admettre. A la vérité, si le système que nous considérons est un système stable qui tende à résister aux perturbations et à revenir de lui-même à son état régulier de mouvement, cette remarque aura peu d'importance. Il faudrait sans doute avoir égard aux petits dérangements occasionnés par les diverses causes dont l'effet n'est pas insensible, mais cela n'empêcherait pas la Lune d'être toujours à très-peu près sur le prolongement de la droite qui joint le Soleil à la Terre. Or, en tenant compte de la réfraction, on voit qu'un certain écart de la Lune à cette droite ne l'empêcherait pas d'éclairer la Terre pendant la totalité de chaque nuit. Au contraire, si l'état de mouvement dont nous avons parlé plus haut est instable, s'il tend à se détruire de lui-même de plus en plus dès qu'il a éprouvé de légers dérangements (et c'est en effet ce qui a lieu, comme on le verra dans mon Mémoire), alors il faudra reconnaître que ce genre de mouvement ne peut pas exister d'une manière permanente dans la nature.

La vraie question, on le comprend donc, est celle de la stabilité. Se contenter de dire avec l'auteur d'une dissertation imprimée à Rome en 1825 [*], que le système de nos trois masses doit éprouver des perturbations de la part des autres planètes, et qu'ainsi l'opposition de la Lune au Soleil ne peut pas subsister à toute époque mathématiquement, d'une manière absolue (*scrupulosissime*), c'est énoncer une vérité évidente, triviale, et non pas faire une objection sérieuse. Quelle théorie en effet serait à l'abri d'une semblable objection?

Le problème qu'il fallait résoudre et que je traite dans mon Mémoire est le suivant: *Trois masses étant placées non plus rigoureusement, mais à très-peu près dans les conditions énoncées par Laplace, on demande si l'action réciproque des masses maintiendra le système dans cet état perticulier de mouvement ou si elle tendra au contraire*

[*] En voici le titre: *Paucis expenditur cl. Laplace opinio de illorum sententiâ qui Lunam conditam dicunt ut noctu tellurem illuminet.*

à l'en écarter de plus en plus. Pour le résoudre d'après la méthode ordinairement suivie dans les questions de stabilité, j'ai dû considérer des équations différentielles linéaires qui se sont d'abord trouvées être à coefficients variables, même en négligeant, comme on pouvait le faire ici, l'excentricité de l'orbite terrestre. Une transformation simple m'a conduit ensuite à des équations à coefficients constants que j'ai pu intégrer. L'intégration terminée, j'ai reconnu que les effets des causes perturbatrices, loin d'être contre-balancés, sont au contraire agrandis d'une manière rapide par les actions mutuelles de nos trois masses : cette conclusion subsiste quels que soient les rapports de grandeur des masses. Si la Lune avait occupé à l'origine la position particulière que Laplace indique, elle n'aurait pu s'y maintenir que pendant un temps très-court.

Le changement de variables ou de coordonnées qui m'a conduit à cette conclusion, en me permettant de transformer en équations à coefficients constants des équations à coefficients variables, m'a fait aussi retrouver par hasard une formule donnée sans démonstration par M. Jacobi. C'est ce que l'on verra dans un *post-scriptum* où j'ai du reste fait observer que la formule dont il s'agit résulte aussi très-facilement d'un théorème général dû à M. Coriolis.

1. Considérons trois points matériels qui s'attirent les uns les autres suivant la loi ordinaire de l'inverse du carré des distances. Admettons que les mouvements relatifs de deux de ces points, savoir m, m', s'effectuent toujours dans un même plan autour du troisième, dont nous supposerons la masse égale à l'unité et où nous placerons l'origine des coordonnées rectangulaires Ox, Oy. Soient x et y les coordonnées de la masse m; x' et y' celles de m'. Désignons par r, r' les distances Om, Om', et par ρ la distance mm'.

Les équations du mouvement de m et m' autour du point O seront

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{(1+m)x}{r^3} + m'\left(\frac{x'}{r'^3} + \frac{x-x'}{\rho^3}\right) = 0,\\
&\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{(1+m)y}{r^3} + m'\left(\frac{y'}{r'^3} + \frac{y-y'}{\rho^3}\right) = 0,\\
&\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{(1+m')x'}{r'^3} + m\left(\frac{x}{r^3} + \frac{x'-x}{\rho^3}\right) = 0,\\
&\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{(1+m')y'}{r'^3} + m\left(\frac{y}{r^3} + \frac{y'-y}{\rho^3}\right) = 0,
\end{aligned}\right.$$

et je dis qu'on pourra y satisfaire en prenant pour x et y des valeurs de la forme

$$x = (1 + p)x', \quad y = (1 + p)y',$$

p étant une certaine constante, laquelle sera essentiellement positive si l'on admet, comme nous le ferons, que m désigne celle des deux masses m, m' dont la distance au point O est la plus grande.

2. Comme dans l'hypothèse de p positive, les formules

$$x = (1 + p)x', \quad y = (1 + p)y'$$

fournissent entre les longueurs absolues ρ, r et r' les relations

$$\rho = pr', \quad r = (1 + p)r',$$

sans ambiguïté de signes, la substitution de ces valeurs de x et y dans la troisième des équations (1) donnera d'abord

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + \left[1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2}\right]\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2} = n'^2.$$

Cette même substitution opérée dans la première des équations (1) donne d'un autre côté

$$(1 + p)\frac{d^2x'}{dt^2} + \left[\frac{1+m}{(1+p)^2} + m' + \frac{m'}{p^2}\right]\frac{x'}{r'^3} = 0,$$

résultat que l'on rendra identique avec le précédent en déterminant la constante p par l'équation

$$(2) \qquad \frac{1+m}{(1+p)^3} + \frac{m'}{1+p} + \frac{m'}{p^2(1+p)} = 1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2}.$$

Par une raison de symétrie et sans nouveau calcul, on voit que cette dernière condition supposée remplie rend de même la deuxième et la quatrième des équations (1) identiques entre elles et avec l'équation

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + n'^2 \frac{y'}{r'^3} = 0.$$

Ainsi les équations (1) sont satisfaites en prenant pour x' et y' des valeurs quelconques vérifiant les deux équations

$$\frac{d^2 x'}{dt^2} + n'^2 \frac{x'}{r'^3} = 0, \quad \frac{d^2 y'}{dt^2} + n'^2 \frac{y'}{r'^3} = 0,$$

semblables dans leur forme à celles du mouvement d'un corps attiré par un centre fixe, et en faisant ensuite

$$x = (1 + p)\, x', \quad y = (1 + p)\, y',$$

p étant une racine positive de l'équation (2), ou, ce qui revient au même, de l'équation

$$(3) \quad p^2[(1+p)^3 - 1] = m[(1+p)^3 - p^3] + m'(1+p)^2(1-p^3),$$

ou enfin de l'équation

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} (1+m')p^5 + (3+2m')p^4 + (3+m')p^3 - (m'+3m)p^2 \\ \qquad - (2m'+3m)p - (m+m') = 0. \end{array} \right.$$

On n'obtient ainsi, il est vrai, que des intégrales particulières ; mais si les conditions initiales qu'elles supposent sont satisfaites, les intégrales dont il s'agit représenteront nécessairement les mouvements des masses m et m'. Il faudra donc les employer toutes les fois qu'après avoir fixé à volonté les valeurs de

$$x', \quad y', \quad \frac{dx'}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt},$$

à une époque quelconque prise pour origine du temps, on aura assujetti

$$x, \quad y, \quad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt},$$

à avoir respectivement ces valeurs initiales correspondantes

$$(1+p)\, x', \quad (1+p) y', \quad (1+p)\frac{dx'}{dt}, \quad (1+p)\frac{dy'}{dt}.$$

Or cela exige simplement qu'à une certaine époque, les masses m' et m se trouvent rangées en ligne droite avec le point O à des distances de ce point qui soient (ainsi que leurs vitesses supposées parallèles) dans le rapport de 1 à $1 + p$.

3. L'équation (4) a toujours une seule racine réelle positive, et le problème qui consiste à disposer trois masses en ligne droite, de telle sorte que lancées dans l'espace avec des vitesses convenables et abandonnées ensuite à leurs actions mutuelles, elles restent constamment en ligne droite, se trouve ainsi avoir une solution, quelle que soit la masse m' que l'on place entre les deux autres : pour trois masses données, sans aucune indication de l'ordre à établir entre elles, il y a donc trois solutions bien distinctes, puisqu'on peut mettre successivement une quelconque de ces trois masses entre les deux autres.

Ayant pris m' pour masse intermédiaire, on peut sans nuire à la généralité de la solution, placer l'origine des coordonnées au centre de la plus grande des deux masses restantes; c'est ce que nous ferons désormais : nous aurons dès lors $m < 1$, et par suite $p < 1$, parce qu'en posant $p = 1$ et $p = 0$ dans le premier membre de l'équation (4), on trouve deux résultats de signes contraires, savoir

$$7(1 - m) \quad \text{et} \quad -(m + m').$$

Quand m et m' sont de très-petites fractions, la racine positive p de l'équation (4) est très-petite, et sa valeur approchée est

$$p = \sqrt[3]{\frac{m + m'}{3}}.$$

Si l'on suppose que nos trois masses 1, m', m représentent respectivement le Soleil, la Terre et la Lune, on a

$$p = \frac{1}{100} \text{ à peu près,}$$

comme l'a observé Laplace, et comme nous l'avons annoncé dans l'introduction de ce Mémoire.

4. Mais jusqu'ici nous avons supposé qu'à l'origine, les conditions relatives aux masses, aux vitesses, aux distances ont été remplies en toute rigueur, et nous avons fait abstraction des perturbations que le

système ne peut manquer d'éprouver. Cherchons donc maintenant ce qui arrivera si, par une cause quelconque, les conditions fondamentales de l'état particulier de mouvement qui nous occupe, ont cessé d'être mathématiquement vérifiées, et ne le sont plus qu'à très-peu près. L'action mutuelle de nos trois masses résistera-t-elle à ces légers dérangements, ou bien les favorisera-t-elle au contraire de manière à détruire complétement, au bout d'un certain temps, la constitution primitive du système? Telle est la question à résoudre. Or je vais faire voir que l'état de mouvement dont nous parlons est instable, et que les effets des causes perturbatrices, loin d'être contre-balancés, sont au contraire agrandis rapidement par les actions mutuelles de nos trois corps.

5. Pour éviter des longueurs inutiles, nous admettrons que les masses m, m' ne sortent pas du plan yOx, en sorte que leurs mouvements continuent à être déterminés par les équations différentielles (1).

Faisons

$$x = (1 + p)(x' + u), \quad y = (1 + p)(y' + v),$$

p étant la même constante que ci-dessus : les valeurs de

$$u, \quad v, \quad \frac{du}{dt}, \quad \frac{dv}{dt},$$

seront à l'origine du temps, non plus rigoureusement nulles, mais seulement très-petites, et la question est de savoir si plus tard elles pourront grandir beaucoup, ou si au contraire elles resteront toujours renfermées dans d'étroites limites. A cet effet, cherchons les équations différentielles dont les variables u et v dépendent, et, conformément à la méthode ordinairement suivie dans les questions de stabilité, négligeons les termes qui contiennent les produits de ces variables ou leurs carrés, leurs cubes, etc. Nous arriverons ainsi à des équations linéaires.

En négligeant les termes en u et v au delà du premier degré, nous trouvons d'abord sans difficulté

$$\frac{x}{r^3} = \frac{x'}{(1+p)^2 r'^3} + \frac{1}{(1+p)^2 r'^3} \cdot \left[u - \frac{3x'(ux' + vy')}{r'^2} \right]$$

et

$$\frac{x - x'}{\rho^3} = \frac{x'}{p^2 r'^3} + \frac{1+p}{p^3 r'^3} \cdot \left[u - \frac{3x'(ux' + vy')}{r'^2} \right].$$

En posant comme au n° **2**

$$n'^2 = 1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2},$$

la troisième des équations (1) devient donc

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} + \left[\frac{m}{(1+p)^2 r'^3} - \frac{m(1+p)}{p^3 r'^3}\right]\left[u - \frac{3x'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0.$$

La première des équations (1), si on la divise par $(1+p)$ et si l'on a égard à l'équation de condition (2) qui détermine p, donne de son côté

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} + \frac{d^2u}{dt^2} + \left[\frac{1+m}{(1+p)^3 r'^3} + \frac{m'}{p^3 r'^3}\right]\left[u - \frac{3y'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0,$$

d'où par la soustraction résulte

$$(5)\qquad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{n^2}{r'^3}\left[u - \frac{3x'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0,$$

en posant

$$n^2 = \frac{1-mp}{(1+p)^3} + \frac{m' + (1+p)m}{p^3}.$$

En considérant la deuxième et la quatrième des équations (1), on en tirera de même les deux équations

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + n'^2\frac{y'}{r'^3} + \left[\frac{m}{(1+p)^2 r'^3} - \frac{m(1+p)}{p^3 r'^3}\right]\left[u - \frac{3y'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0$$

et

$$(6)\qquad \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{n^2}{r'^3}\left[v - \frac{3y'(ux'+vy')}{r'^2}\right] = 0.$$

Cela posé, si l'on supprime d'abord complétement les termes en u et v, on aura les équations très-simples

$$\frac{d^2x'}{dt^2} + n'^2\frac{x'}{r'^3} = 0, \qquad \frac{d^2y'}{dt^2} + n'^2\frac{y'}{r'^3} = 0,$$

qui détermineront pour x' et y' de premières valeurs approchées ; les formules résultantes seront semblables à celles du mouvement elliptique; en négligeant l'excentricité de l'orbite de m' (l'orbite de la Terre), et prenant pour unité la distance Om' ou r', elles deviendront

$$x' = \cos(n't + l), \quad y' = \sin(n't + l),$$

l étant une constante. On substituera au lieu de x' et y' ces valeurs approchées dans les équations (5) et (6), dont on se servira pour déterminer approximativement aussi les valeurs de u et v : on se servira de même de ces dernières pour obtenir des valeurs nouvelles plus exactes de x', y'. Et ainsi de suite, conformément à la méthode connue des approximations successives.

6. Mais pour notre objet, il suffira de discuter les valeurs de u et v qu'on obtient en intégrant les équations (5) et (6) après y avoir fait

$$r' = 1, \quad x' = \cos(n't + l), \quad y' = \sin(n't + l).$$

A cause de $r' = 1$, les équations dont je parle deviennent

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d^2 u}{dt^2} + n^2 [u - 3x'(ux' + vy')] = 0, \\ &\frac{d^2 v}{dt^2} + n^2 [v - 3y'(ux' + vy')] = 0, \end{aligned} \right.$$

Elles sont encore à coefficients variables, mais on peut les changer dans des équations linéaires à coefficients constants par la transformation que voici.

Posons

$$ux' + vy' = \mathrm{U}, \quad uy' - vx' = \mathrm{V},$$

ce qui est au fond substituer aux axes fixes Ox, Oy dont nous nous sommes jusqu'ici servis, des axes mobiles qui suivent pour ainsi dire les masses m' et m dans leur mouvement révolutif autour du point O.

En différentiant et observant que l'on a

$$\frac{dx'}{dt} = -n'y', \quad \frac{dy'}{dt} = n'x',$$

on trouve d'abord

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\mathrm{U}}{dt} = x'\frac{du}{dt} + y'\frac{dv}{dt} - n'\mathrm{V}, \\ &\frac{d\mathrm{V}}{dt} = y'\frac{du}{dt} - x'\frac{dv}{dt} + n'\mathrm{U}. \end{aligned} \right.$$

En différentiant de nouveau, on obtient

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2U}{dt^2} = x'\dfrac{d^2u}{dt^2} + y'\dfrac{d^2v}{dt^2} - n'\left(y'\dfrac{du}{dt} - x'\dfrac{dv}{dt}\right) - n'\dfrac{dV}{dt}, \\ \dfrac{d^2V}{dt^2} = y'\dfrac{d^2u}{dt^2} - x'\dfrac{d^2v}{dt^2} + n'\left(x'\dfrac{du}{dt} + y'\dfrac{dv}{dt}\right) + n'\dfrac{dU}{dt}. \end{cases}$$

Les valeurs de $\dfrac{d^2u}{dt^2}$, $\dfrac{d^2v}{dt^2}$ sont fournies par les équations (7), et celles de $x'\dfrac{du}{dt} + y'\dfrac{dv}{dt}$, $y'\dfrac{du}{dt} - x'\dfrac{dv}{dt}$ par les équations (8). Opérant la substitution et réduisant, en se rappelant que

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad ux' + vy' = U', \quad uy' - vx' = V,$$

on aura, tout calcul fait,

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2n'\frac{dV}{dt} - (2n^2 + n'^2)U = 0,$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} - 2n'\frac{dU}{dt} + (n^2 - n'^2)V = 0.$$

7. Les équations en U et V que nous venons d'écrire étant linéaires à coefficients constants, on en obtiendra des intégrales particulières si l'on pose

$$U = e^{\alpha t}, \quad V = Ae^{\alpha t},$$

et si l'on détermine convenablement les constantes α, A. Ces constantes doivent satisfaire aux deux équations

$$\alpha^2 + 2n'\alpha A - 2n^2 - n'^2 = 0,$$

$$A\alpha^2 - 2n'\alpha + (n^2 - n'^2)A = 0.$$

On a donc d'abord

$$A = \frac{2n^2 + n'^2 - \alpha^2}{2n'\alpha},$$

puis, en éliminant A,

$$(\alpha^2 + n^2 - n'^2)(2n^2 + n'^2 - \alpha^2) - 4n'^2\alpha^2 = 0;$$

l'équation qui doit déterminer α est donc

$$\alpha^4 + \alpha^2 (2 n'^2 - n^2) = (n^2 - n'^2)(2 n^2 + n'^2).$$

8. Admettons pour un moment que $n^2 - n'^2$ soit une quantité positive; les deux valeurs de α^2 fournies par cette équation seront réelles, l'une négative, l'autre positive; la première valeur introduira dans U et V des exponentielles imaginaires qui se transformeront en sinus et cosinus, mais la seconde donnera lieu à deux exponentielles dont les exposants αt seront réels et de signes opposés; celle de ces exponentielles dont l'exposant est positif grandira rapidement à mesure que le temps t augmentera; elle empêchera donc les valeurs de U et V de rester très-petites, et par suite rendra instable l'état de mouvement de nos trois corps.

Quand on regarde les trois masses $1, m', m$ comme représentant respectivement le Soleil, la Terre et la Lune, on a à très-peu près

$$p = \sqrt[3]{\frac{m + m'}{3}} = \frac{1}{100};$$

m et m' étant de petites fractions, on trouve aussi sensiblement

$$n' = 1, \quad n = 2,$$

et, par conséquent,

$$n^2 > n'^2:$$

ici la valeur réelle et positive de α est plus grande que 2; si l'on ajoute que, d'après la valeur de n', la durée d'une révolution de la Terre autour du Soleil est exprimée par 2π, on se fera une idée exacte de l'énorme rapidité avec laquelle grandit l'exponentielle à exposant positif $e^{\alpha t}$.

Mais sans s'arrêter à un cas particulier, et en observant seulement que la racine p est < 1, il est aisé d'établir en général l'inégalité $n^2 > n'^2$. On a en effet

$$n'^2 = 1 + m' + \frac{m}{(1+p)^2} - \frac{m}{p^2},$$

$$n^2 = \frac{1 - mp}{(1+p)^3} + \frac{m' + (1+p)m}{p^3},$$

d'où

$$n^2 - n'^2 = \frac{\Delta}{p^3(1+p)^3},$$

en faisant

$$\Delta = p^3[1-(1+p)^3] + m(6p^3 + 9p^2 + 5p + 1) \\ + m'(1+p)^3(1-p^3).$$

Mais de l'équation (3) on tire immédiatement

$$p^3[1-(1+p)^3] = -m(3p^3 + 3p^2 + p) - m'p(1+p)^2(1-p^3);$$

il vient dès lors

$$\Delta = m(3p^3 + 6p^2 + 4p + 1) + m'(1+p)^2(1-p^3):$$

puisque p est < 1, cette valeur de Δ est positive; il en est donc de même de la différence $n^2 - n'^2$, et l'état de mouvement assigné aux trois masses 1, m', m est instable. C. Q. F. D.

P. S. Le changement de variables ou de coordonnées dont je viens de faire usage pour transformer en équations à coefficients constants des équations à coefficients variables, peut servir à démontrer une formule que M. Jacobi a donnée en 1836 dans le tome III des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (page 61), et qu'il regarde comme devant être utile dans la théorie des perturbations lunaires [*].

Prenons pour unité la masse de la Terre; désignons par m, x, y, z, et m', x', y', z' la masse et les coordonnées respectives de la Lune et du Soleil : faisons de plus

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

$$\rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}.$$

[*] Voir aussi le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1re série, tome III, page 58.

Les équations du mouvement de la Lune troublée par le Soleil seront

$$(a)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)x}{r^3} + m'\left(\dfrac{x'}{r'^3} + \dfrac{x-x'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)y}{r^3} + m'\left(\dfrac{y'}{r'^3} + \dfrac{y-y'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{(1+m)z}{r^3} + m'\left(\dfrac{z'}{r'^3} + \dfrac{z-z'}{\rho^3}\right) = 0. \end{cases}$$

Admettons, dans une première approximation, que le mouvement du Soleil autour de la Terre soit circulaire et uniforme; prenons pour unité la distance constante r', et supposons que le plan des xy soit celui de l'orbite solaire : les valeurs des coordonnées x', y', z', au bout d'un temps quelconque t, seront de la forme

$$z' = 0, \quad y' = \sin(n't + l), \quad x' = \cos(n't + l).$$

Quant aux équations (a), elles se réduiront à

$$(b)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{(1+m)x}{r^3} + m'\left(x' + \dfrac{x-x'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{(1+m)y}{r^3} + m'\left(y' + \dfrac{y-y'}{\rho^3}\right) = 0, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} + \dfrac{(1+m)z}{r^3} + \dfrac{m'z}{\rho^3} = 0, \end{cases}$$

et l'on pourra aisément en trouver une intégrale première. Pour plus de généralité, considérons les équations

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dQ}{dx} - m'x', \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dQ}{dy} - m'y', \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dQ}{dz}, \end{cases}$$

Q étant une fonction quelconque $F(r, \rho, z)$ des trois quantités r, ρ, z, et par suite étant une certaine fonction de x, y, z, t, ce qui donne un sens net aux dérivées partielles prises par rapport à x, y, z. Les équations (b) se déduisent des équations (A) en faisant

$$Q = \frac{1+m}{r} + \frac{m'}{\rho}.$$

Mais, quelle que soit la fonction Q ou F (r, ρ, z), posons

$$xx' + yy' = u, \quad yx' - xy' = v,$$

d'où, à cause de $x'^2 + y'^2 = 1$, résultera

$$x = ux' - vy', \quad y = uy' + vx'$$

et

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 + z^2}, \quad \rho = \sqrt{(u-1)^2 + v^2 + z^2}.$$

En différentiant u, v, et observant que

$$\frac{dx'}{dt} = -n'y', \quad \frac{dy'}{dt} = n'x',$$

nous aurons

$$(\mathrm{B}) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt} + n'v, \\ \frac{dv}{dt} &= x'\frac{dy}{dt} - y'\frac{dx}{dt} - n'u, \end{aligned} \right.$$

puis

$$\frac{d^2u}{dt^2} = x'\frac{d^2x}{dt^2} + y'\frac{d^2y}{dt^2} + n'\left(x'\frac{dy}{dt} - y'\frac{dx}{dt}\right) + n'\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = x'\frac{d^2y}{dt^2} - y'\frac{d^2x}{dt^2} - n'\left(x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt}\right) - n'\frac{du}{dt}.$$

Dans ces deux dernières équations, remplaçons

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad x'\frac{dx}{dt} + y'\frac{dy}{dt}, \quad x'\frac{dy}{dt} - y'\frac{dx}{dt},$$

par leurs valeurs déduites des équations (A) et (B); rappelons-nous d'ailleurs que l'on a

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad xx' + yy' = u, \quad yx' - xy' = v,$$

et aussi [puisque Q est de la forme F (r, ρ, z)]

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{x}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{x-x'}{\rho}\frac{dQ}{dr},$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{y}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{y-y'}{\rho}\frac{dQ}{d\rho}.$$

Tout calcul fait, il nous viendra

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{u-1}{\rho}\frac{dQ}{d\rho} - m' + 2n'\frac{dv}{dt} + n'^2 u,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{v}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{v}{\rho}\frac{dQ}{d\rho} - 2n'\frac{du}{dt} + n'^2 v.$$

Mais r et ρ sont fonctions de u, v et z; on peut donc regarder Q comme une fonction de u, v et z. Sous ce point de vue, on a immédiatement

$$\frac{dQ}{du} = \frac{u}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{u-1}{\rho}\frac{dQ}{d\rho},$$

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{v}{r}\frac{dQ}{dr} + \frac{v}{\rho}\frac{dQ}{d\rho}.$$

Il en résulte

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dQ}{du} - m' + 2n'\frac{dv}{dt} + n'^2 u,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{dQ}{dv} - 2n'\frac{du}{dt} + n'^2 v.$$

Multiplions ces deux équations par les facteurs respectifs $2\,du$, $2\,dv$; multiplions aussi par $2\,dz$ la troisième des équations (A), savoir :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dQ}{dz},$$

puis ajoutons les résultats; nous obtiendrons

$$d\frac{(du^2+dv^2+dz^2)}{dt^2} = 2\left(\frac{dQ}{du}du + \frac{dQ}{dv}dv + \frac{dQ}{dz}dz\right)$$
$$- 2m'du + 2n'^2(udu + vdv),$$

et en intégrant,

$$\frac{du^2+dv^2+dz^2}{dt^2} = 2Q - 2m'u + n'^2(u^2+v^2) + \text{const.}$$

C'est à cette équation que revient au fond la formule de M. Jacobi, l'illustre auteur s'étant borné au cas particulier de

$$Q = \frac{1+m}{r} + \frac{m'}{\rho},$$

ou mieux de

$$Q = \frac{1}{r} + \frac{m'}{\rho},$$

et de plus ayant conservé dans ses calculs les coordonnées primitives x, y qu'il sera aisé de rétablir si on le juge convenable. Sous la forme précédente, on voit qu'elle n'est qu'une application du beau théorème de M. Coriolis sur le principe des forces vives dans les mouvements relatifs (*voyez* le 21e cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, page 268). Nous aurions pu, sans aucun calcul, la déduire de ce théorème, dont la démonstration générale repose au reste sur un changement de coordonnées ou de variables analogue à celui que nous venons d'employer.