

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DUHAMEL

Du frottement considéré comme cause de mouvements vibratoires

Journal de mathématiques pures et appliquées 2^e série, tome 1 (1856), p. 234-247.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__234_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

DU FROTTEMENT
CONSIDÉRÉ COMME CAUSE DE MOUVEMENTS VIBRATOIRES;
PAR M. DUHAMEL.

[Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XLII, page 973].

Le frottement a été considéré pour la première fois comme produisant des vibrations et des sons, dans une Note que j'ai présentée à l'Académie en 1836, et qui avait pour objet l'action de l'archet sur les cordes. Je me propose ici de généraliser le principe qui servait de base à cette théorie et d'en faire de nouvelles applications.

Les lois du frottement n'étaient pas assez connues du temps de Daniel Bernoulli, pour que ce grand physicien pût penser à y rattacher cette action; et il fut obligé d'en chercher une explication dans une sorte d'assimilation de l'archet à une roue dentée. Je crois avoir démontré, dans un Mémoire présenté en 1839, qu'elle ne saurait être admise; et je n'en ai pas eu d'autre à réfuter, parce que tous les traités d'acoustique ou de physique élémentaire parlent de l'emploi de l'archet, sans chercher à rendre raison de son action.

Lorsque j'eus donné la véritable cause du son produit, j'en calculai les effets, et je parvins à cette première proposition générale :

Le mouvement de la corde par rapport à la position d'équilibre qu'elle prendrait sous l'influence d'une force égale à celle du frottement, est le même que celui de la corde librement abandonnée à elle-même, en partant d'une position initiale, qui serait relativement à sa position en ligne droite, ce que celle-ci est par rapport à celle d'équilibre ci-dessus définie.

Il résultait d'abord de cette proposition que sous l'action de l'archet la corde devait exécuter des vibrations de même durée que lorsqu'elle est pincée et abandonnée librement à elle-même; que par conséquent elle devait rendre le même son dans les deux cas : ce qui est conforme à l'expérience.

Mais il se présenta immédiatement à mon esprit une autre conséquence nécessaire qui aurait pu m'inspirer quelque doute, si je n'avais été bien convaincu de l'impossibilité de toute autre explication. Cette conséquence consiste en ce que :

Le mouvement de la corde pincée finissant par s'anéantir par suite des communications avec l'air et les supports, celui de la corde frottée par l'archet pendant un temps indéfini devrait, malgré la persistance de la cause, finir lui-même par s'anéantir.

Or, ce fait n'ayant jamais été énoncé, et pouvant même paraître assez peu vraisemblable, il était nécessaire de le produire ou d'abandonner ma théorie.

Bien assuré d'y parvenir, je n'eus à m'occuper que de la recherche des moyens les plus simples de produire un frottement constant et d'une durée indéfinie. Il suffit pour cela d'employer une roue ayant son axe fixe, et parallèle à la droite qui joint les deux extrémités fixes de la corde. Le frottement de la roue met d'abord la corde en vibration, et fait entendre le son fondamental. Mais si on la fait mouvoir assez rapidement pour que son mouvement relatif soit dans un sens constant, et que par suite la direction de la force de frottement soit constante, on voit bientôt le son disparaître; la corde reste écartée de sa position naturelle, et par conséquent la force de frottement continue à s'exercer, en même temps que le mouvement de la roue continue indéfiniment.

Ce fait curieux, que je venais ainsi de découvrir théoriquement, et de vérifier expérimentalement, ayant fortifié mes idées sur ce point important d'acoustique, j'en étudiai de nouveau les conséquences, et je parvins à la découverte d'un nouveau fait, plus singulier encore que le précédent, mais qui cependant devait être réel si mon explication était juste. Ce fait consiste en ce que *l'on peut établir entre la vitesse et la pression de l'archet des rapports tels, que le son produit soit plus grave que le son fondamental*. Et l'expérience m'a fait voir, en effet, que l'on peut, au moyen de l'archet, tirer d'une corde une multitude de sons fort au-dessous de celui que l'on avait regardé jusqu'ici comme le plus grave. Ainsi la théorie que je proposais résultait nécessairement de l'existence évidente de la force de frottement; et non-seulement elle s'accordait avec les faits connus, mais encore elle avait conduit à

deux découvertes singulières, dont la vérification expérimentale en donnait une confirmation qui ne laissait pas place au doute.

L'action d'un ou de plusieurs archets, ou corps frottants quelconques, étant remplacée par des forces connues, les petits mouvements d'un système quelconque de points soumis à des actions de ce genre rentraient dans les questions ordinaires de mécanique ; et, d'après cela, le problème général pouvait être considéré comme résolu. Il n'était pas inutile cependant de reconnaître les propositions générales, auxquelles on parvient pour un système quelconque, et d'en faire l'application à des cas simples, différents de celui des cordes élastiques. C'est aussi ce que je fis immédiatement. Je ne publiai rien sur ces recherches, pensant que, d'après ce que j'avais fait connaître, chacun pourrait faire ces généralisations, ainsi que ces applications nouvelles. Mais personne cependant n'ayant paru s'en occuper, j'ai jugé à propos d'appeler ici sur ce point important l'attention des physiciens et des géomètres.

Je dois même dire que, bien loin de chercher à aller au delà de ce que j'avais énoncé, on n'a pas encore introduit dans l'enseignement de l'acoustique la force de frottement considérée comme cause de vibrations ; et les recueils académiques étant moins lus que les ouvrages élémentaires, il est vraisemblable que beaucoup de professeurs de physique sont hors d'état de rendre compte du son produit par un archet. Ils doivent en être presque tous au point où l'on en était avant la publication de mon Mémoire ; et je me souviens qu'un illustre physicien me disait à cette époque qu'il n'avait jamais bien compris jusque-là comment le contact de l'archet ne déterminait pas un nœud dans la corde, comme le contact du doigt ou d'un chevalet.

J'ai cherché à me rendre compte du silence des auteurs sur un sujet aussi essentiel et aussi élémentaire, et j'ai pensé que cela devait tenir aux procédés de démonstration que j'avais employés. Je faisais usage des équations aux différentielles partielles des cordes vibrantes, et les traités de physique ne peuvent supposer au lecteur des connaissances aussi élevées en analyse.

Dans ce Mémoire, je considérerai la force de frottement d'une manière générale, qui renfermera comme cas particulier ce que j'ai dit à l'occasion de l'archet ; mais je n'emprunterai aux mathématiques que le principe de la superposition des petits mouvements. J'ai donné une

démonstration aussi élémentaire que possible de ce principe dans mon *Mémoire sur les vibrations d'un système de points matériels*. D'ailleurs il est énoncé et employé dans tous les traités élémentaires, principalement dans la théorie de la lumière ; il n'y a par conséquent aucune raison pour qu'on n'en fasse pas usage dans l'acoustique.

Après avoir exposé la théorie générale, j'en fais l'application à un phénomène que je n'avais pas considéré dans mon premier *Mémoire*, celui du mouvement longitudinal des verges élastiques. J'indique le moyen le plus régulier de le produire, et je démontre que le son doit être le même que quand la verge est abandonnée à elle-même en partant d'un certain ébranlement initial. Je démontre que si le corps frottant a une vitesse constamment supérieure à celle des points de la verge qui sont en contact avec lui, le son finit par disparaître entièrement, quoique le frottement ait constamment lieu ; j'ai vérifié ensuite par l'expérience ce phénomène, analogue à celui que présente la corde vibrante. Quant au phénomène de la production de sons plus graves que le son fondamental, il est bien indiqué par la théorie ; mais il doit être bien moins facile de le réaliser, parce qu'il exige que le corps frottant ait une vitesse moindre que les points de la verge : or le mouvement de ces derniers est incomparablement moindre que celui qui a lieu dans les vibrations transversales des cordes.

Enfin on peut encore prendre pour exemple le cas des mouvements transversaux des verges ; le frottement produisant toujours le même effet qu'un déplacement initial sans vitesse, on devra trouver les mêmes lois pour les sons produits par des frottements transversaux, que par tout autre mode d'ébranlement transversal. C'est aussi ce que l'expérience confirme. Et si elle est faite avec une précision suffisante, on devra constater la prompte disparition du son, lorsque la roue frottante aura une certaine vitesse ; comme aussi l'abaissement du son au-dessous du son fondamental, lorsque la pression sera assez considérable, et la vitesse de la roue suffisamment petite.

Au reste, toutes ces confirmations, si intéressantes qu'elles puissent être, ne sont nullement nécessaires à l'établissement de la théorie exposée dans ce *Mémoire*, et si quelquefois elles ne se vérifiaient pas, il n'y aurait pas lieu pour cela de douter de l'exactitude de cette théo-

rie, mais simplement de rechercher les circonstances inaperçues qui ne permettraient pas d'en appliquer les conséquences.

Introduction de la force de frottement dans un système de points en équilibre stable.

1. Lorsqu'un corps exerce une pression sur un autre et que leurs surfaces glissent l'une sur l'autre, il se produit sur eux deux forces tangentielles égales et opposées, que l'on nomme *forces de frottement*, qui dépendent de la nature des surfaces, sont proportionnelles à la pression, et indépendantes de la vitesse du glissement. Nous admettons ce principe comme résultant d'un grand nombre d'expériences précises, du moins dans les limites où nous nous renfermerons.

Cela posé, considérons un système de points très-voisins les uns des autres, formant soit un fil, soit un corps élastique quelconque, et dans un état d'équilibre stable. Dans une ou plusieurs parties plus ou moins étendues de sa surface établissons des contacts avec d'autres corps qui les pressent, et glissent en même temps. Il se produira alors sur la surface du système donné des forces tangentielles, qui seront connues de direction et d'intensité, si l'on donne la nature des surfaces en contact, la pression et la direction du mouvement relatif. Dans ce cas, la recherche des différents états par lesquels passera le système, rentre dans la question générale de l'équilibre et du mouvement de ce système sollicité par des forces données.

Ainsi, lorsque l'on promène un archet sur une corde tendue, sur une verge, sur une plaque, ou un corps quelconque, les effets produits pourront être calculés en introduisant une force tangentielle, proportionnelle à la pression exercée, et appliquée en un des points du contact, ou plutôt répartie sur toute l'étendue de la petite surface de contact. On supprimera alors la considération de l'archet, et l'on n'aura plus qu'à chercher le mouvement des points d'une corde ou d'un corps élastique quelconque sollicité par des forces connues.

Le principe de la théorie de l'action de l'archet étant ainsi établi, il ne restera plus qu'à effectuer les calculs dans chaque cas particulier. Mais cette manière d'envisager ces phénomènes conduit à des propositions générales que nous allons faire connaître, et dont la vérification expérimentale servira de contrôle à cette théorie.

Nous commencerons par rappeler à cet effet quelques théorèmes relatifs aux mouvements très-petits des systèmes.

Du principe de la superposition des petits mouvements des systèmes.

2. Dans mon Mémoire sur les *vibrations d'un système quelconque de points matériels*, j'ai démontré, sans avoir recours à aucune intégration, plusieurs théorèmes généraux, dont quelques-uns serviront de base aux démonstrations qui vont suivre. Je vais rappeler en peu de mots en quoi ils consistent.

I^{er} Théorème. — Considérons un système de points matériels dans un état d'équilibre stable, soumis à leur action mutuelle et à des forces extérieures indépendantes du temps, et liés par des équations entre leurs coordonnées. Si on les écarte de leur position primitive, de telle sorte que les distances des molécules voisines aient varié de quantités très-petites relativement à ces distances, et qu'on leur imprime en outre des vitesses arbitraires, on obtiendra après un temps quelconque les déplacements de chaque point, estimés parallèlement à trois axes fixes, en faisant la somme algébrique des déplacements qu'on obtiendrait pour ces mêmes points après un temps égal, dans tous les systèmes en nombre quelconque que l'on formerait en partant de déplacements et de vitesses assujettis à cette seule condition : savoir, que la somme algébrique des déplacements initiaux recompose pour chaque point le déplacement initial proposé, et qu'il en soit de même pour les composantes des vitesses initiales. C'est-à-dire qu'il suffit toujours que la superposition des systèmes initiaux reproduise le système initial proposé, pour que la superposition des états qu'ils présentent respectivement après un temps égal, forme l'état réel du système proposé après ce temps.

II^e Théorème. — Si, outre le dérangement initial, on introduit de nouvelles forces, indépendantes des déplacements, et que même quelques-uns des points soient maintenus invariablement dans une position voisine de celle qu'ils avaient dans la position d'équilibre, on pourra d'abord considérer le mouvement comme décomposé en deux autres. Le premier correspondra à l'état initial proposé des points mobiles, en laissant fixement dans leurs premières positions les points qui doivent subir un déplacement fixe. Le second se rapportera à l'hypothèse

où tous les points mobiles partiraient sans vitesse de leur position d'équilibre, où les points dont le déplacement doit être fixe auraient pris leur nouvelle position, et où l'on aurait introduit les forces nouvelles.

Le premier mouvement peut être décomposé en une infinité d'autres, comme l'exprime le premier théorème. Le second peut aussi être décomposé en une infinité d'autres, assujettis à la seule condition que les déplacements fixes et les forces introduites dans chacun d'eux étant composés ensemble, reproduisent les proposés. Dans ces derniers mouvements on partira de déplacements et de vitesses nuls. Mais rien n'empêcherait de supposer des états initiaux qui se détruiraient par leur superposition; car, par une décomposition indiquée précédemment, ils pourraient être remplacés par des systèmes où il n'y aurait dans l'état initial ni déplacement ni vitesse; et en outre par des systèmes qui se détruiraient constamment, parce que les états initiaux superposés se détruiraient, et aucune cause de mouvement n'existerait.

Remarque. — Le premier de ces théorèmes exprime le principe de la composition et de la décomposition des petits mouvements, dans les conditions les plus ordinaires. Le second le généralise en s'appliquant au cas où il y a non-seulement dérangement initial, mais introduction de forces constantes et déplacement constant de certains points. Mais ils ne donnent aucun moyen pour ramener ce cas à celui où le mouvement est dû simplement à un état initial donné. Or cette importante réduction peut se faire au moyen d'une proposition générale que nous allons établir, et qui se trouve encore dans le Mémoire déjà cité, sur les vibrations d'un système.

Comment l'introduction de forces, constantes en grandeur et en direction, et de déplacements constants, peut être remplacée par un simple changement dans l'état initial?

3. Le système proposé ne sera plus en équilibre lorsqu'on y introduira de nouvelles forces, et que quelques-uns des points seront déplacés d'une manière permanente. Mais avec ces nouvelles conditions il existe un état d'équilibre possible; et nous supposons que dans ce nouvel état, toutes les distances des points aient varié de quantités très-petites par rapport à elles-mêmes, et que les directions aient elles-mêmes infiniment peu changé. Il résulte de là que si l'on avait à calculer le mouvement des points par rapport à ce nouvel état d'équilibre,

on serait conduit aux mêmes équations générales qu'en partant du premier; parce que les coefficients constants qui y entreraient ne différaient des correspondants que de quantités extrêmement petites, que l'on pourrait négliger sans erreur sensible.

Cela posé, rapportons l'état initial proposé aux nouvelles positions d'équilibre. Les composantes des vitesses initiales parallèlement aux mêmes directions seront évidemment les mêmes; mais les déplacements, étant comptés à partir d'origines différentes, devront être augmentés des déplacements même de ces origines, pris en sens contraires. La question devient donc la même que lorsqu'il n'y a ni forces nouvelles introduites, ni déplacement fixe d'aucun point. Il n'y a qu'un simple changement à faire dans l'état initial, et les lois générales reconnues dans ce premier cas subsisteront dans l'autre.

Si maintenant on considérait, relativement à la première position d'équilibre du système, un état initial identique à celui dont il vient d'être question relativement à la seconde, les équations générales du mouvement étant les mêmes, comme nous l'avons remarqué dans ces deux systèmes, le mouvement de chaque point serait le même dans l'un et dans l'autre, en les rapportant à leurs origines respectives. Et comme il est préférable de rapporter tous les mouvements à la position primitive donnée d'équilibre stable, nous énoncerons de la manière suivante la proposition qui vient d'être établie :

« Lorsque les points d'un système sont très-peu écartés de leur position d'équilibre stable, et reçoivent de petites vitesses quelconques ;
 » que de plus quelques-uns d'entre eux sont maintenus fixement dans
 » leur nouvelle position, et que l'on introduit des forces constantes
 » quelconques : le mouvement de chaque point du système sera le
 » même par rapport à sa nouvelle position d'équilibre stable, qu'il se-
 » rait par rapport à l'ancienne, si l'on ajoutait aux composantes de
 » son déplacement initial, les composantes, changées de signe, du
 » déplacement de la position d'équilibre. »

Action d'un archet sur un système, lorsque sa vitesse relative est toujours de même sens.

4. Supposons d'abord que la pression exercée par l'archet sur le corps soit constante, et que sa vitesse soit toujours plus grande que celles des points qu'il touche, le frottement sera alors constant en direc-

tion et en grandeur, puisqu'il est indépendant de la vitesse relative. On a donc introduit ainsi une force constante en grandeur et en direction. Au lieu d'un seul archet, on en peut supposer un nombre quelconque, et la question rentrera toujours dans celle que nous venons de traiter. Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

« Lorsqu'un corps élastique, de forme quelconque, est frotté par » un ou plusieurs archets exerçant des pressions constantes, le mouve- » ment de chacun de ses points par rapport à la position d'équilibre ré- » sultant de l'introduction des forces de frottement, est le même que » celui qu'ils auraient par rapport à la première position d'équilibre, » si l'on modifiait convenablement l'état initial. Cette modification con- » siste simplement à retrancher, des composantes des déplacements • initiaux des différents points, les accroissements que subissent les » coordonnées de ces points en passant de leur première position d'é- » quilibre à la seconde. »

Si la pression de l'archet n'était pas constante, mais variait très-lentement, on pourrait la considérer comme constante pendant un intervalle fini, et recevant brusquement le petit accroissement qu'elle aurait acquis à ce moment. On rentre alors dans le premier cas.

5. *Lorsque le système est tel, qu'un état initial quelconque produit en général un mouvement vibratoire à période constante, l'action d'un ou de plusieurs archets produira un mouvement vibratoire de même période.*

En effet, l'action de ces archets peut être remplacée par une modification dans l'état initial; et, par hypothèse, cette modification n'altère pas la périodicité du mouvement. Ainsi, par exemple, une corde élastique pincée fait entendre le même son fondamental, de quelque manière qu'elle soit écartée de sa position rectiligne entre ses deux extrémités fixes. Donc *le frottement de l'archet sur cette corde fera encore entendre ce même son fondamental*, pourvu toutefois que la vitesse relative de l'archet et de la corde soit toujours de même direction. Si la pression changeait lentement, elle pourrait être considérée comme la même pendant un assez grand nombre de vibrations de la corde. Le son serait donc sensiblement le même pendant toute la durée du frottement. L'expérience confirme ces indications de la théorie.

Cessation du son malgré le mouvement de l'archet.

6. Lorsque la vitesse de l'archet surpasse constamment celle des points en contact, nous avons démontré que le mouvement était le même par rapport à la position d'équilibre sous l'influence de la force de frottement, qu'il serait par rapport à sa position primitive d'équilibre, en partant d'un certain état initial. Or dans ce dernier cas l'expérience montre que, par suite des résistances négligées dans le calcul, le mouvement finit promptement par s'éteindre. Il résulte donc de notre théorie qu'il en doit être ainsi du mouvement produit par l'archet : qu'il doit s'éteindre, quoique l'archet continue indéfiniment à se mouvoir en produisant le même frottement ; et que l'état final de repos est celui dans lequel il y a équilibre entre toutes les forces du système et celle que produit ce frottement.

Ce phénomène, que rien n'avait annoncé avant cette théorie, a été vérifié par moi dans le cas particulier des cordes vibrantes, et indiqué dans mon premier Mémoire. Il se trouve établi maintenant avec toute la généralité dont il est susceptible.

Action d'un archet dont la vitesse relative n'est pas toujours de même sens.

7. Si, par suite de l'état initial et de la constitution du corps, il arrivait que la vitesse des points en contact avec l'archet fût tantôt plus grande et tantôt plus petite que celle de ce dernier, la force changerait de sens, et les conséquences précédentes ne subsisteraient plus. Il faudrait à chaque changement concevoir le nouvel état d'équilibre correspondant, et prendre pour état initial l'état actuel du système. C'est ainsi que l'on calculerait l'effet d'un léger obstacle opposé au mouvement par le frottement sur un corps immobile : par exemple, lorsque l'on applique légèrement le doigt sur une corde mise en mouvement par un archet, la résistance change alternativement de sens, et pourvu qu'elle dépasse une certaine limite, le point de contact finit par devenir immobile, et forme ce que l'on appelle un *nœud*.

Il peut encore arriver que le point de contact parvenu à la même vitesse que l'archet, soit obligé de le suivre à cause de la résistance que le frottement lui oppose. Dans ce cas la durée de la vibration dans ce sens peut être augmentée d'une quantité plus ou moins grande, dépendante

de la pression et de la vitesse de l'archet. Le son s'abaisse alors, puisqu'il y a moins de vibrations dans le même temps. Cette conséquence de ma théorie a été développée dans mon ancien Mémoire sur l'action de l'archet sur ces cordes. Je l'ai vérifiée par l'expérience, et j'ai ainsi prévu et constaté ce phénomène inattendu, de sons nets et fort au-dessous du son fondamental.

Vibrations longitudinales des verges.

8. Lorsqu'une verge vibre longitudinalement, on peut supposer ses deux extrémités fixes, ou bien l'une fixe et l'autre libre, ou enfin toutes les deux libres.

Considérons d'abord le premier de ces cas, et supposons qu'on produise un frottement constant dans une partie déterminée de sa longueur, ce qui peut être facilement réalisé au moyen de roues situées de côtés différents de la verge et tournant autour de leurs axes respectifs, en exerçant sur elle des pressions invariables; plus la verge sera mince, moins il y aura d'inexactitude à supposer que les forces résultant de toutes ces pressions sont réparties uniformément sur toute l'aire de la section transversale, au lieu de l'être seulement sur son périmètre; et l'on pourra, par conséquent, regarder le mouvement général comme ayant lieu par sections, et dépendant d'une seule coordonnée.

Cela posé, les forces produites par les divers frottements exercés en un nombre quelconque de points de la verge, en ayant égard à la fixité de ses deux extrémités, détermineraient un état d'équilibre dans lequel, en général, toutes les sections seraient écartées de leur position naturelle, excepté les deux extrêmes. Or, d'après le théorème général démontré ci-dessus, le mouvement de chaque section, par rapport à la position qu'elle occupe dans cet équilibre, est le même qu'il serait par rapport à sa position primitive, si on l'écartait de celle-ci d'une quantité de même grandeur et de même sens, que celle-ci l'est de sa position dans l'équilibre dont il vient d'être question.

La question proposée du mouvement produit par les frottements, étant ainsi ramenée à la question connue du mouvement des différentes sections écartées de leur position naturelle et abandonnées sans vitesse, se trouve complètement résolue.

Et il en serait de même pour les deux autres cas des verges. De sorte que les lois des sons produits par le frottement sont absolument les mêmes que ceux que produirait toute cause qui déplacerait les tranches et leur imprimerait une vitesse quelconque, comme par exemple un choc longitudinal. L'expérience vérifie pour les verges ce résultat de la théorie, comme elle l'avait fait pour les cordes.

Nous supposons ici que les forces de frottement conservent chacune leur sens et leur intensité; et il faut pour cela, non-seulement que la pression soit constante, mais encore que la vitesse relative du corps frottant et de la partie de la verge en contact avec lui soit toujours de même direction. On se mettra dans ces conditions, en donnant à ce corps une vitesse suffisante; mais alors il devra se présenter encore, comme dans le cas des cordes, ce phénomène remarquable, que le mouvement et le son devront s'affaiblir et disparaître promptement, quoique les roucs frottantes continuent leur mouvement. Les positions qu'occuperont les sections de la verge dans cet état limite, seront précisément celles de l'équilibre sous l'action des forces de frottement. La vérification ne peut en être faite aussi facilement que dans le cas des mouvements transversaux des cordes, vu la petitesse des déplacements longitudinaux; mais la cessation du son est un phénomène très-facile à constater, et *l'expérience a complètement confirmé les prévisions de ma théorie.*

Enfin, pour les verges comme pour les cordes, on peut concevoir que la vitesse de la roue ne soit pas toujours supérieure à celle que les sections en contact tendent à prendre; et alors il devra y avoir abaissement du son. Mais il est peut-être un peu difficile d'assujettir la roue à un mouvement plus lent que celui des sections; je ne crois pas impossible d'y parvenir, mais je n'ai pas fait usage d'appareils assez précis pour produire ce curieux résultat que j'avais constaté facilement dans le cas des cordes. Je serais heureux d'apprendre que quelque habile expérimentateur y fût parvenu.

Vibrations transversales des verges.

9. Notre théorie s'appliquant à tous les systèmes de points et à tous les frottements qu'on y peut appliquer, on peut supposer la direction du frottement perpendiculaire à la longueur de la verge. Les mouve-

ments transversaux qui en résulteront seront donc périodiques comme ceux qui proviennent d'un écartement transversal. On aura les mêmes lois pour les sons produits, et l'on reconnaîtra, comme pour les cordes, les phénomènes de la disparition du son, et de l'abaissement au-dessous du son fondamental.

10. Remarque. — Nous avons supposé les vibrations longitudinales des cordes ou des verges produites par des frottements exercés en des points invariables, et il suffisait pour cela de prendre pour corps frottants des roues tournant autour de leurs axes immobiles. Mais le plus ordinairement on ne met pas une si grande précision dans les moyens d'exécution, et le frottement est produit par un corps qu'on fait glisser le long de la corde ou de la verge.

Plaçons-nous dans ces conditions, en supposant que le contact du corps frottant ait lieu dans une assez grande longueur, et que la vitesse de ce corps soit très-petite. Dans un intervalle de temps très-court, mais dans lequel cependant les sections ont pu exécuter un assez grand nombre de vibrations, le corps frottant aura abandonné d'un côté une petite étendue de la verge, et en aura gagné une égale de l'autre. La plus grande partie de la longueur sur laquelle s'opère le frottement sera donc restée la même pendant ce temps, et une petite partie des forces se trouvera seule déplacée et portée de l'arrière à l'avant. On peut donc se regarder comme étant sensiblement dans le cas de forces constantes appliquées à des points constants, au moins pendant le temps nécessaire à l'accomplissement d'un grand nombre de vibrations, et, par conséquent, ces vibrations doivent être sensiblement les mêmes que si le frottement avait rigoureusement lieu aux mêmes points du corps.

Toutefois, on doit dire que ce résultat n'est qu'approximatif; et, bien que l'expérience ne fasse pas apercevoir en général de différence entre les effets produits dans ces différentes circonstances, il est certain que l'étendue du contact et le mouvement du corps frottant pourraient être supposés tels, que le déplacement rapide et irrégulier des points d'application des forces ne permît pas l'établissement d'un son constant, ni peut-être même d'aucun son. Il est au reste bien facile de reconnaître qu'on peut pendant très-longtemps frotter une verge en

changeant irrégulièrement les points de contact, sans qu'il en résulte aucun mouvement vibratoire régulier. Il est donc à désirer que, dans les appareils destinés à des expériences précises, le frottement soit produit au moyen de roues tournant autour de leurs axes immobiles. On aura ainsi l'avantage de produire toujours des sons très-purs, et qui pourront être entretenus aussi longtemps qu'il sera nécessaire.

