JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STURM

Sur les fonctions elliptiques

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 231-233.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__231_0>

SUR

LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

[Note rédigée par M. STURM d'après un Mémoire de M. DESPEYROUS.]

L'intégrale sous forme algébrique de l'équation

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

s'obtient aisément, comme on sait [*], au moyen d'une intégration par parties. En mettant cette équation sous la forme

$$dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0,$$

on en déduit

$$\int dx\sqrt{1-y^2} + \int dy\sqrt{1-x^2} = \text{constante}.$$

Or en intégrant par parties, on a

$$\int dx\sqrt{1-y^2} = x\sqrt{1-y^2} + \int \frac{xy\,dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

et

$$\int dy\sqrt{1-x^2} = y\sqrt{1-x^2} + \int \frac{xy\,dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ajoutant et observant que les termes sous le signe $\int$ donnent une somme nulle en vertu de l'équation proposée, on trouve l'intégrale algébrique

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = \text{constante}.$$

La constante arbitraire qu'elle contient est la valeur de y pour $x = 0$. Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \alpha, \quad x = \sin\alpha, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos\alpha,$$

[*] *Voir*, par exemple, LACROIX, *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral*, tome II, page 473.

et de même

$$\int_0^y \frac{dx}{\sqrt{1-y^2}} = \beta, \quad y = \sin\beta, \quad \sqrt{1-y^2} = \cos\beta.$$

Nous aurons

$$d\alpha + d\beta = 0,$$

d'ou

$$\alpha + \beta = \gamma,$$

γ étant une constante. D'ailleurs, pour $\alpha = 0$, on a

$$x = 0, \quad \beta = \gamma, \quad y = \sin\gamma.$$

La constante de notre intégrale est donc $\sin\gamma$. Par suite, il vient

$$\sin\gamma \quad \text{ou} \quad \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie des fonctions circulaires.

Le même procédé s'applique facilement à la recherche de l'intégrale d'Euler qui donne la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Soit, en effet,

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}} = 0.$$

En multipliant par le produit des dénominateurs et divisant par $1 - c^2x^2y^2$, on a

$$\int \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}{1-c^2x^2y^2}dx + \int \frac{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}{1-c^2x^2y^2}dy = \text{constante}.$$

Or en intégrant le premier terme par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}{1-c^2x^2y^2}dx &= \frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}{1-c^2x^2y^2} \\ &+ \int xy\,\frac{(1+c^2)(1+c^2x^2y^2) - 2c^2x^2 - 2c^2y^2}{(1-c^2x^2y^2)^2}\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}} \\ &- 2c^2\int \frac{x^2y^2}{(1-c^2x^2y^2)^2}\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}\,dx.\end{aligned}$$

En échangeant entre elles les deux lettres x et y, on aura le second terme; ajoutant donc et observant que les termes sous le signe $\int$ donnent une somme nulle en vertu de l'équation différentielle proposée, on trouvera

$$\frac{x\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}+y\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}{1-c^2x^2y^2}=\text{constante.}$$

La constante du second membre est la valeur de y pour $x=0$. Posons

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-c^2x^2}}=\alpha,\quad x=\mathrm{S}(\alpha),\quad \sqrt{1-x^2}=\mathrm{C}(\alpha),$$
$$\sqrt{1-c^2x^2}=\mathrm{R}(\alpha),$$

et de même

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-c^2y^2}}=\beta,\quad y=\mathrm{S}(\beta),\quad \sqrt{1-y^2}=\mathrm{C}(\beta),$$
$$\sqrt{1-c^2y^2}=\mathrm{R}(\beta).$$

Nous aurons

$$d\alpha+d\beta=0,$$

d'où

$$\alpha+\beta=\gamma,$$

γ étant une constante. D'ailleurs pour $\alpha=0$, on a

$$x=0,\quad \beta=\gamma,\quad y=\mathrm{S}(\gamma).$$

La constante de notre intégrale est donc $\mathrm{S}(\gamma)$. Par suite il vient

$$\mathrm{S}(\gamma)\ \text{ou}\ \mathrm{S}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{S}(\alpha)\,\mathrm{C}(\beta)\,\mathrm{R}(\beta)+\mathrm{S}(\beta)\,\mathrm{C}(\alpha)\,\mathrm{R}(\alpha)}{1-c^2\,\mathrm{S}(\alpha)^2\,\mathrm{S}(\beta)^2}.$$

C'est la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques.

Elle donne $\mathrm{S}(\alpha-\beta)$ en changeant le signe de $\mathrm{S}(\beta)$. On peut aussi en déduire $\mathrm{C}(\alpha\pm\beta)$ et $\mathrm{R}(\alpha\pm\beta)$.