JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur deux mémoires de Poisson

Journal de mathématiques pures et appliquées 2e série, tome 1 (1856), p. 1-6.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1856_2_1__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

SUR

DEUX MÉMOIRES DE POISSON;

PAR M. J. LIOUVILLE.

1. L'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \tag{1}$$

sur laquelle repose essentiellement la théorie de la propagation du son dans les milieux gazeux, et à laquelle on ramène l'équation générale, à coefficients constants,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathrm{A}\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \mathrm{B}\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \mathrm{C}\frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2\mathrm{D}\frac{d^2\varphi}{dy\,dz} + \text{etc.},$$

a été donnée en 1819 par Poisson (*Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, tome III. C'est le volume pour 1818, mais le Mémoire n'a été lu à l'Académie que le 19 juillet 1819). Poisson a trouvé que l'équation (1) est satisfaite en prenant

$$\varphi = \frac{t}{4\pi}\int\!\!\int d\sigma\,\mathrm{F}(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[t\int\!\!\int d\sigma f(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)\right],$$

où $d\sigma$ désigne l'élément d'une surface sphérique de rayon 1, et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les cosinus des angles que la droite menée du centre de la sphère à cet élément fait avec les trois axes coordonnés des x, y, z. Ces trois cosinus étant liés entre eux par l'équation de condition

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

on peut remplacer les deux angles β, γ par un angle unique η, en posant

$$\cos \beta = \sin \alpha \cos \eta, \quad \cos \gamma = \sin \alpha \sin \eta :$$

on a alors

$$d\sigma = \sin \alpha \, d\alpha \, d\eta,$$

et les intégrations marquées dans la valeur de φ doivent être étendues de $\eta = 0$ à $\eta = 2\pi$, et de $\alpha = 0$ à $\alpha = \pi$. On reconnaît de plus que l'expression de φ et celle de $\frac{d\varphi}{dt}$ qui s'en déduit, donnent

$$(2) \qquad \varphi = f(x, y, z) \quad \text{et} \quad \frac{d\varphi}{dt} = \mathrm{F}(x, y, z) \quad \text{pour } t = 0;$$

et comme t représente le temps, on en conclut que les fonctions arbitraires f, F sont les valeurs initiales de φ et de sa dérivée.

2. Les deux méthodes que Poisson a données au commencement et à la fin de son Mémoire pour arriver à ce résultat remarquable, sont fondées sur la considération des séries. Le résultat une fois obtenu, Poisson l'a vérifié à *posteriori* par un calcul rigoureux. J'aurais à présenter sur l'ensemble du Mémoire des remarques dignes, je crois, d'intérêt. Mais je les ajourne, et pour le moment j'ai surtout en vue un point d'histoire assez curieux. Je vais montrer qu'une formule obtenue par Poisson dès 1807 (dans un Mémoire imprimé au 14ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*: *voir* pages 334 à 338) aurait pu, j'allais dire aurait *dû*, conduire l'illustre auteur à la belle intégrale qu'il n'a donnée qu'en 1819, et qui dès lors s'offrait à lui comme conséquence immédiate d'un calcul fort simple.

En substituant, en effet, des coordonnées polaires aux coordonnées rectangulaires, puis effectuant une double intégration par rapport aux angles, après avoir multiplié les deux membres par l'élément sphérique de rayon 1, $d\sigma$, Poisson trouve que le produit du rayon vecteur et de l'intégrale double $\int\int \varphi \, d\sigma$ ne dépend plus que de l'équation à deux termes rencontrée d'abord par d'Alembert dans le problème des cordes vibrantes. Poisson observe d'ailleurs que l'origine des coordonnées, d'où part le rayon vecteur, est arbitraire. En divisant donc par 4π l'intégrale ci-dessus, on aura la moyenne des valeurs de φ correspondantes aux divers éléments de la surface d'une sphère de rayon quelconque, ayant son centre en un point quelconque de l'espace; et pour en déduire la valeur même de φ en ce point, il suffira de prendre le rayon infiniment petit. Cela étant, je présenterai le calcul comme il suit, en en tirant la conclusion que Poisson a laissé échapper.

Dans la fonction φ de t, x, y, z qui vérifie l'équation (1), et qu'on suppose continue et bien déterminée pour toutes les valeurs réelles de x, y, z, t, remplaçons x, y, z par $x+\rho$, $y+\mu$, $z+\nu$, et désignons par Φ la valeur que φ prend alors, en sorte que

$$\Phi = \varphi(t, x+\rho,\ y+\mu,\ z+\nu).$$

L'équation (1) se change en celle-ci :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{d^2\Phi}{d\rho^2} + \frac{d^2\Phi}{d\mu^2} + \frac{d^2\Phi}{d\nu^2}. \tag{3}$$

Substituons aux coordonnées rectangles ρ, μ, ν des coordonnées polaires en faisant

$$\rho = r\cos\alpha,\quad \mu = r\sin\alpha\cos\eta,\quad \nu = r\sin\alpha\sin\eta:$$

r est naturellement ici le rayon vecteur mené du point (x, y, z) au point $(x+\rho, y+\mu, z+\nu)$. On a

$$\Phi = \varphi(t,\ x+r\cos\alpha,\ y+r\sin\alpha\cos\eta,\ z+r\sin\alpha\sin\eta),$$

ou si l'on veut, pour plus de symétrie,

$$\Phi = \varphi(t,\ x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma).$$

Quand $r=0$, Φ se réduit à φ. Quand $t=0$, φ se réduit à $f(x,y,z)$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ à $F(x, y, z)$; on a donc alors, r restant quelconque,

$$\Phi = f(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma),$$

et

$$\frac{d\Phi}{dt} = F(x+r\cos\alpha,\ y+r\cos\beta,\ z+r\cos\gamma).$$

Par l'introduction des coordonnées polaires dans l'équation (3), cette équation devient

$$(4) \qquad \frac{d^2.r\Phi}{dt^2} = \frac{d^2.r\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r\sin\alpha}\frac{d\left(\sin\alpha\frac{d\Phi}{d\alpha}\right)}{d\alpha} + \frac{1}{r\sin^2\alpha}\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}:$$

multipliant les deux membres par $\sin\alpha\, d\alpha\, d\eta$ ou $d\sigma$, et intégrant entre les limites $\eta = 0$, $\eta = 2\pi$, $\alpha = 0$, $\alpha = \pi$, on tire de là sans difficulté

$$(5) \qquad \frac{d^2.r\lambda}{dt^2} = \frac{d^2.r\lambda}{dr^2},$$

en posant, pour abréger,

$$(6) \qquad \lambda = \iint \Phi\, d\sigma.$$

On a donc nécessairement

$$r\lambda = \psi(t+r) + \theta(t-r),$$

ou plutôt

$$(7) \qquad r\lambda = \psi(t+r) - \psi(t-r),$$

puisque le produit $r\lambda$ s'annulant pour $r = 0$, il faut que

$$\theta(t) = -\psi(t).$$

En différentiant l'équation (7) par rapport à r, on en déduit

$$r\frac{d\lambda}{dr} + \lambda = \psi'(t+r) + \psi'(t-r).$$

Si donc on pose $r = 0$, ce qui réduit Φ à φ et λ à $4\pi\varphi$, il viendra

$$4\pi\varphi = 2\psi'(t).$$

Or la valeur de $2\psi'(t)$ se conclut des valeurs données $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$ de φ et $\frac{d\varphi}{dt}$ pour $t = 0$. En effet, Φ et λ sont liées à φ, de telle manière que les valeurs de λ et $\frac{d\lambda}{dt}$ pour $t = 0$, se trouvent aussi connues ; ces valeurs sont respectivement

$$\iint d\sigma f(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma)$$

et

$$\iint d\sigma\, \mathrm{F}(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma).$$

Introduisez-les dans les formules

$$\frac{d.r\lambda}{dr} = \psi'(t + r) + \psi'(t - r)$$

et

$$r\frac{d\lambda}{dt} = \psi'(t + r) - \psi'(t - r),$$

après y avoir posé, bien entendu, $t = 0$, et vous aurez

$$\psi'(r) + \psi'(-r) = \frac{d}{dr}\left[r\iint d\sigma f(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma)\right]$$

et

$$\psi'(r) - \psi'(-r) = r\iint d\sigma\, \mathrm{F}(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma);$$

d'où, par voie d'addition,

$$2\psi'(r) = r\iint d\sigma\, \mathrm{F}(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma) + \frac{d}{dr}\left[r\iint d\sigma f(x + r\cos\alpha,\ y + r\cos\beta,\ z + r\cos\gamma)\right].$$

De cette valeur de $2\psi'(r)$ résultera celle de $2\psi'(t)$ en remplaçant r par t. L'équation

$$4\pi\varphi = 2\psi'(t)$$

nous fournira donc finalement la valeur de φ, savoir

$$\varphi = \frac{t}{4\pi}\iint d\sigma\ \mathrm{F}(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma) + \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[t\iint d\sigma f(x + t\cos\alpha,\ y + t\cos\beta,\ z + t\cos\gamma)\right],$$

c'est-à-dire l'intégrale de Poisson, que cet illustre géomètre aurait pu obtenir ainsi dès ses premières recherches, tandis qu'il n'y est arrivé que beaucoup plus tard et par d'autres méthodes. Elle se présente ici comme la seule solution possible de l'équation (1), les conditions (2) ayant lieu.

On vérifie aisément, comme on sait, qu'en effet cette valeur de φ rend l'équation (1) identique, quelles que soient les fonctions f et F. Le calcul déjà si simple que Poisson a donné pour cet objet, dans son Mémoire de 1819, peut encore être abrégé. Remarquons en passant que si de tels calculs prouvent très-bien que la valeur de φ satisfait à l'équation indéfinie (1) et aux équations définies (2), ils ne démontrent pas qu'il soit impossible de remplir les mêmes conditions avec une autre valeur de φ, également continue et bien déterminée, mais numériquement différente. Cette impossibilité (qu'on peut au reste établir de différentes manières et qui découle d'ailleurs de la nature dynamique du problème que l'équation (1) est destinée à résoudre) ressort au contraire d'elle-même et nécessairement de la méthode développée ci-dessus d'après le Mémoire de 1807. Mais je n'insiste pas sur ces détails. Le but historique que je me proposais est atteint maintenant.