JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. STEINER

Mémoire sur les courbes et les surfaces algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 36-53.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__36_0>

MÉMOIRE

SUR

LES COURBES ET LES SURFACES ALGÉBRIQUES;

Par M. J. STEINER (de Berlin).

(Traduit de l'allemand par M. de Horn, officier au service de Prusse.)

I.

Nombre des normales que l'on peut abaisser d'un point sur une courbe algébrique, et propriétés de la développée de la courbe.

La question : « Combien de normales d'une courbe donnée du » $n^{ième}$ degré passent par un point quelconque P dans le plan de la » courbe? » est équivalente à celle-ci : « Quelle est la classe de la » développée de la courbe donnée? »

On peut répondre facilement à cette question des trois manières suivantes.

1°. Si l'on fait mouvoir la courbe C^n arbitrairement dans son plan autour du point donné P, et qu'on la désigne dans la nouvelle position par C_1^n, les deux courbes se couperont en n^2 points Q. Si l'on ramène la courbe C_1^n à son ancienne position, jusqu'à ce qu'elle tombe sur la courbe C^n, les n^2 points d'intersection Q changent de position, et au dernier moment du mouvement, ils seront précisément les pieds des normales abaissées du pôle P sur la courbe C^n, dont le nombre sera par conséquent n^2.

Un nombre infini de courbes du degré n, faisceau de courbes de ce degré, passera par les pieds des normales, parce qu'ils sont les points d'intersection des courbes C^n et C_1^n.

Étant donnés $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ des n^2 points Q, les $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ autres sont déterminés.

2°. Supposons dans le plan de la courbe donnée C^n un faisceau quelconque de sections coniques $B(C^2)$, c'est-à-dire toutes les coniques qui passent par quatre mêmes points quelconques (réels ou imaginaires); alors

$$n(n+2.2-3) = n(n+1)$$

de ces coniques seront tangentes à la courbe C^n [*].

Si l'on fait coïncider ces quatre points deux à deux, de telle sorte que les coniques se touchent en deux points réels ou imaginaires, la corde de contact, considérée comme l'ensemble de deux droites coïncidentes, pourra être regardée comme une conique appartenant au faisceau $B(C^2)$. De même, chacun des n points, où elle rencontre la courbe C^n, pourra être regardé comme un des $n(n+1)$ points de contact. Ainsi la courbe ne sera plus touchée que par n^2 des autres coniques proprement dites.

Or, M. Poncelet a montré qu'un système de cercles concentriques peut être envisagé comme un faisceau de coniques qui se touchent en deux points, ayant pour corde de contact idéale la droite située à l'infini. Il s'ensuit que, parmi tous les cercles décrits autour du point donné P, il en existe en général n^2 qui touchent la courbe donnée C^n. Les rayons menés aux points de contact seront les n^2 normales de la courbe C^n, passant par le point P.

3°. Des recherches auxquelles se rapporte le compte rendu mensuel de l'Académie de Berlin (séance du 10 août 1848) dont on trouve la traduction au tome XVIII, déjà cité, du présent Journal, notamment de la propriété y mentionnée (page 310) « que les courbes algé» briques s'engendrent par des faisceaux projectifs de courbes d'un » degré inférieur, » il résulte une troisième solution de la question proposée, qui en même temps donne lieu à quelques circonstances intéressantes que nous allons indiquer.

Soit donnée une conique quelconque P^2 située dans le plan de la courbe C^n. Soit C^{n-1} la première polaire relativement à C^n, et P^1 la première polaire relativement à P^2, d'un pôle R pris arbitrairement. Ces polaires se coupent en $(n-1)$ points Q, et les polaires réci-

[*] *Voir* le tome XVIII de ce Journal, page 314.

proques de chacun de ces points Q passent par le pôle R; c'est-à-dire que la $\overline{n-1}^{ième}$ polaire, par rapport à C^n, et la polaire relative à P^2, qui sont les droites polaires C^1 et P_1^1 de chacun des $\overline{n-1}$ points Q, passent par le pôle R.

Si le pôle R se meut sur une droite donnée G, ses polaires C^{n-1} et P^1 forment deux faisceaux $B(C^{n-1})$ et $B(P^1)$, qui ont respectivement $\overline{n-1}^2$ points fondamentaux C et un point fondamental P, lesquels points sont en même temps les pôles de la droite G par rapport aux bases données C^n et P^2, à savoir G est la $\overline{n-1}^{ième}$ polaire de chacun des $\overline{n-1}^2$ points C par rapport à C^n, et la polaire de P relativement à P^2.

Supposons que C^{n-1} et P^1, correspondant à un même pôle R, correspondent aussi l'une à l'autre, les faisceaux $B(C^{n-1})$ et $B(P^1)$ seront projectifs et engendreront une courbe du $n^{ième}$ degré; c'est-à-dire le lieu des $\overline{n-1}$ points d'intersection Q de deux courbes correspondantes est une courbe Q^n du degré n, qui passe aussi par les $(n-1)^2$ points fondamentaux C et par le point fondamental P des faisceaux.

Appelons Q_1 chacun des n points d'intersection de la courbe Q^n avec la droite G. Ces n points seront entre autres déterminés par une relation métrique, ayant lieu entre eux et les points où la droite G sera coupée par les deux bases C^n et P^2.

Les droites polaires C^1 et P^1 de chacun des points Q de la courbe Q^n par rapport aux bases C^n et P^2 passent par le pôle correspondant R situé sur la droite G (en vertu de la réciprocité mentionnée); conséquemment, si l'on fait passer G à l'infini, toutes ces polaires seront parallèles. Si l'on suppose, en outre, que la conique P^2 est un cercle, les droites C^1 et P^1 sont perpendiculaires à la droite QP, parce que P, comme pôle de G_∞ par rapport au cercle P^2, en est le centre.

La courbe Q^n, lieu des $\overline{n-1}$ points d'intersection Q (dans le cas présent la courbe Q_0^n), est déterminée, dans ces suppositions, seulement par la courbe donnée C^n et le centre donné P du cercle P^2, de la manière suivante :

« Si, dans le plan de la courbe donnée C^n, on prend un point fixe
» quelconque P, une autre courbe Q_0^n du degré n sera le lieu d'un

» pôle Q, dont la $\overline{n-1}^{ième}$ polaire C^1 par rapport à la courbe C^n est
» perpendiculaire à la droite QP menée du pôle Q au point fixe P.

» Cette courbe Q_0^n passe notamment par le point P, par les $\overline{n-1}^2$ » pôles C de la droite G_∞, par rapport à la base C^n, et par n points » déterminés Q_1 de la droite G_∞. »

« Si le point P change de position pendant que la base C^n reste » fixe, la courbe Q_0^n changera aussi ; cependant elle passera toujours » par les $\overline{n-1}^2$ pôles fixes C et coupera constamment la droite G_∞ » aux mêmes n points invariables Q_1, de sorte que ses asymptotes » conservent des directions constantes, et restent parallèles à elles- » mêmes. (Ces points Q_1 restent invariablement les mêmes sur la » droite G_∞, en vertu du théorème de M. Poncelet, *que tous les » cercles dans un même plan ont pour sécante commune idéale la » droite à l'infini.*) »

« La courbe Q_0^n ainsi déterminée coupe la base donnée C^n en » n^2 points Q_0; la polaire C^1 de chacun de ces points est en même » temps tangente à la base en ce point ; par conséquent la droite Q_0P » en est normale. Il s'ensuit donc que de chacun des points P on » peut mener n^2 normales PQ_0 à la base C^n. »

En considérant ces circonstances dans leur totalité, on peut énoncer le théorème suivant :

« De chaque point P dans le plan d'une courbe donnée C^n du de- » gré n on peut mener n^2 normales à la courbe ; les n^2 pieds Q_0 de » ces normales et le point P sont toujours situés sur une autre courbe » déterminée Q_0^n du degré n.

» Autant il y a de points dans le plan, autant il y a de courbes, » parce qu'à chaque pôle P correspond une courbe particulière Q_0^n. » Toutes ces courbes Q_0^n ont $\overline{n^2-n+1}$ points déterminés fixes com- » muns entre elles : à savoir les $\overline{n-1}^2$ pôles C de la droite G_∞, par » rapport à la base C^n, et n autres points déterminés Q_1 situés sur » cette droite. Les asymptotes de toutes les courbes Q_0^n sont dirigées » conséquemment vers les mêmes n points Q_1. »

Et réciproquement :

« Chaque courbe du $n^{ième}$ degré passant par les $\overline{n^2-n+1}$ points

» C et Q_1 est une des courbes Q_0^n, et coupe la base donnée en n^2
» points Q_0 tels que les normales en ces points se coupent au point P
» de la courbe, qui en est le pôle correspondant. Celles de toutes les
» courbes Q^n, qui passent par un même point quelconque Q, for-
» ment un faisceau de courbes $B(Q_0)$ dont les n^2 points fondamen-
» taux sont donnés par les $n^2 - n + 1$ points C et Q_1, par le point
» donné Q et par $n - 2$ autres points déterminés (Q), qui se trouvent,
» avec le point Q, sur une même droite L menée de ce point perpen-
» diculairement à sa droite polaire C^1. »

« Ces $\overline{n-2}$ nouveaux points Q déterminent le même faisceau
» $B(Q_0^n)$ de courbes, et les droites polaires C^1 de ces points sont
» toutes perpendiculaires à la droite L. Sur cette droite se trouvent
» aussi les pôles P correspondants aux courbes du faisceau $B(Q_0)$, de
» sorte que le $n^{ième}$ point d'intersection, où chacune de ces courbes
» rencontre la droite L, outre les $\overline{n-1}$ points d'intersection Q, est
» précisément son pôle P. »

Les $\overline{n-1}$ courbes Q_0^n, dont les pôles coïncident avec les $\overline{n-1}$ points Q, touchent la droite L en ces points. Si l'on mène de chaque pôle P la tangente T à la courbe correspondante Q_0^n, la courbe enveloppe de toutes ces tangentes sera de la classe n et sera touchée $\overline{n-1}$ fois par la droite L.

Les $\overline{n-1}$ points Q et les $\overline{n-1}^2$ pôles fixes se trouvent toujours sur une même courbe $C^{\overline{n-1}}$ du degré $\overline{n-1}$. Cette courbe sera la première polaire par rapport à la base C^n d'un point à l'infini situé sur la droite polaire C^1 de chacun des $\overline{n-1}$ points Q.

Nous avons encore le théorème réciproque :

« Si plusieurs pôles P sont situés sur une droite quelconque L,
» leurs courbes correspondantes Q_0^n se couperont en $\overline{n-1}$ points dé-
» terminés Q sur cette même droite, etc. »

« Si l'une des courbes Q_0^n doit passer par deux points donnés Q,
» elle sera déterminée, en général, d'une manière absolue; car les
» perpendiculaires L abaissées des deux points Q sur leurs droites
» polaires C^1 se coupent au pôle P de la courbe en question. »

On peut encore compléter ce théorème.

La base donnée C^n est coupée par la droite G_∞ en n points A. Qu'on se représente toutes les courbes possibles du degré n, qui ont avec la courbe C^n un contact de l'ordre $(n-1)$ en chacun des n points A, on aura un faisceau de courbes $B(C^n)$, dont les n^2 points fondamentaux ne se trouvent que sur les n points A. De même, la droite G_∞, envisagée comme l'ensemble de n droites, pourra être regardée comme faisant partie de ce faisceau. Toutes ces courbes ont les n^2-n+1 points C et Q_1, mentionnés ci-dessus, communs entre elles; et les droites polaires C^1, correspondant à chaque pôle Q par rapport à toutes les courbes, sont parallèles entre elles.

De là nous tirons le théorème suivant :

« Si, d'un pôle quelconque P, on mène des normales à toutes les » courbes du faisceau particulier $B(C^n)$ (c'est-à-dire n^2 normales PQ_0 » à chacune de ces courbes), les pieds Q_0 de ces normales formeront » une courbe Q_0^n, de sorte que chacune des droites menées par le » pôle P est normale à $\overline{n-1}$ des courbes données $B(C^n)$. »

Réciproquement :

« Toute courbe Q_0^n du degré n, qui passe par les n^2-n+1 points » fixes C et Q_1, coupera la courbe donnée $B(C^n)$ en des points Q_0 » tels, que les normales à la courbe $B(C^n)$ en ces points se réunissent » dans un même point P, situé sur la courbe transversale Q_0^n. Les » tangentes T que l'on peut mener aux courbes données $B(C^n)$ par » les points Q_0, enveloppent une courbe T^{2n-1} de la classe $\overline{2n-1}$, » n fois touchée par la droite G_∞. »

Une application des théorèmes énoncés aux cas les plus simples, ne sera pas sans intérêt.

Supposons $n=2$; la base donnée C^n, ainsi que chacune des courbes Q_0^n, sera une section conique.

Dans ce cas-là, les $\overline{n-1}^2$ pôles C se réduisent à un seul, centre de C^2, et les n points Q_1 sur la droite G_∞ deviendront deux points Q_1 situés à l'infini sur les deux axes X et Y de la base C^2. Chacune des courbes Q_0^2 devant passer par ces deux points, elles seront toutes des hyperboles équilatères, dont les asymptotes sont parallèles aux axes X, Y de la base C^2.

De là les théorèmes particuliers suivants, dont quelques-uns sont déjà connus.

« Par tous les points P situés dans le plan d'une conique donnée C^2 » passent quatre normales PQ_0 (réelles ou imaginaires) à la conique. » Les quatre pieds Q_0, le centre C de la conique, et les deux points » $2Q_1$ à l'infini des deux axes X et Y, enfin le pôle P sont situés sur » une hyperbole équilatère Q_0^2; toutes les hyperboles équilatères Q_0^2, » correspondant à tous les points P, ont trois points communs entre » elles, C et $2Q_1$; les asymptotes de ces hyperboles sont parallèles » aux axes X, Y, en vertu des points $2Q_1$. »

Réciproquement :

« Toute hyperbole équilatère, qui passe par le centre C_1 et par les » deux points à l'infini $2Q_1$ des axes de la conique donnée, coupe » celle-ci en quatre points, dont les normales correspondantes se » réunissent toujours en un point quelconque sur cette même hyper- » bole. Si le pôle P se meut sur une droite donnée L, l'hyperbole » équilatère correspondante Q_0^2 passe constamment par un point » déterminé Q sur la même droite. »

Réciproquement :

« Toutes les hyperboles équilatères qui passent en même temps » par les trois points C et $2Q_1$, ainsi que par un quatrième point » donné Q, en formant un faisceau $B(Q_0^2)$, ont les pôles P sur une » même droite L, qui passe par le point Q, et qui est perpendiculaire » à la polaire C^1 de ce point.

» L'hyperbole Q_0^2 sera déterminée par deux points donnés Q; les » perpendiculaires L menées par ces points aux polaires respectives » C^1 se couperont au pôle P. »

« Au lieu de la base C^2, considérons un faisceau particulier $B(C^2)$ » de coniques qui se touchent en deux points (réels ou imaginaires) A » sur la droite G_∞; ou bien, considérons toutes les coniques sem- » blables, semblablement placées, et concentriques à la conique don- » née C^2, et sur ces coniques abaissons d'un pôle P des normales : » tous les pieds Q_0 de ces normales formeront l'une des hyperboles » équilatères Q_0^2. »

Et réciproquement :

« Toute hyperbole équilatère, passant par les trois points C et $2\,Q_1$,
» coupera aussi toutes les coniques données $B(C^2)$ en des points Q,
» tels que les normales correspondantes se rencontrent en un seul et
» même point P de la même hyperbole. »

« Si particulièrement le pôle P, d'où l'on a abaissé les normales
» aux courbes $B(C)^2$, se trouve sur l'un des deux axes communs X,
» Y, l'hyperbole équilatère correspondante se transforme en deux
» droites dont l'une est cet axe lui-même, et dont l'autre lui est per-
» pendiculaire. De même, Q_0^2 sera transformée en deux droites, si le
» pôle P est situé sur la droite G_∞; l'une de ces deux droites sera G_∞,
» l'autre passera par le centre C. »

M. Poncelet a, le premier, donné la partie la plus essentielle de ces propriétés des sections coniques [*].

Le théorème suivant se rattache intimement aux théorèmes précédents :

« Si l'on mène des tangentes T à la base C^2 par les pieds Q_0 des
» quatre perpendiculaires abaissées d'un point P sur cette base, ces
» tangentes, ainsi que les deux axes X, Y, toucheront une parabole,
» dont la directrice passe par le centre C de la base. »

Et réciproquement :

« Chaque parabole qui touche les deux axes de la base donnée C^2,
» a quatre tangentes T communes avec cette base; elles toucheront
» celle-ci en quatre points Q_0 dont les normales respectives passent
» toujours par un même point P. A chacun des points P du plan cor-
» respondra une parabole déterminée, qui est tangente aux deux
» axes X et Y, et réciproquement. »

« Si le point P se meut sur une droite L, la parabole correspon-
» dante touchera toujours une autre droite déterminée, et récipro-
» quement. »

Si, particulièrement, le point P se trouve sur la développée de la base C^2, la parabole touchera cette base, et réciproquement.

---

[*] Voir le *Traité des propriétés projectives des figures*, page 228, article 492.

II.

Toutes les normales d'une courbe C_0 sont tangentes à une autre courbe E_0, qu'on nomme développée.

Nous avons trouvé par les considérations précédentes la classe de la développée E_0; elle sera marquée par le nombre n^2, si la base donnée est du degré n. Les rapports particuliers qui existent entre ces deux courbes, donnent lieu à des réciprocités entre leurs éléments, notamment entre leurs tangentes et leurs points singuliers. Les voici :

a. A chaque point d'inflexion de la base C^n correspond un point à l'infini de la développée E_0, ou la normale au point d'inflexion de la base C^n est asymptote de la développée, et réciproquement.

Ainsi la développée aura autant d'asymptotes droites, ou bien, elle coupera la droite G_∞ en autant de points B que la base aura de points d'inflexion; en général, il y en aura $3n(n-2)$.

b. A chacun des n points A à l'infini de la base C^n correspond un point de rebroussement R sur la développée E_0 situé à l'infini sur la droite G_∞. Cette droite est la tangente de rebroussement de la courbe E_0, de sorte qu'elle est n fois tangente de rebroussement de la développée E_0, et qu'elle a trois points communs avec la courbe en chaque point R. Les tangentes à la base aux n points A en sont les asymptotes; les points de rebroussement R se trouvent sur les droites perpendiculaires aux asymptotes, c'est-à-dire les perpendiculaires menées d'un point quelconque aux asymptotes passent par les points de rebroussement correspondants R de la développée, situés sur la droite G_∞. La droite G_∞ ayant trois points communs avec la courbe E_0 en chacun des n points R, et étant coupée par cette courbe en $3n(n-2)$ points, ces deux lignes, la droite et la courbe, ont

$$3n + 3n(n-2) = 3n(n-1)$$

points communs entre elles. Donc la développée sera du degré $3n(n-1)$.

c. A chaque sommet S de la base C^n (c'est-à-dire à chacun des points de la base C^n, où elle a avec un cercle un contact du troisième ordre) correspondra également un point de rebroussement R de la développée E_0, et réciproquement.

Il s'ensuit que les n points A mentionnés ci-dessus peuvent être considérés comme des sommets S, qui toutefois présentent cette particularité, que le cercle correspondant, qui a avec la courbe un contact du troisième ordre, est décrit avec un rayon infiniment grand, et est formé par l'asymptote correspondante regardée comme double.

d. Une droite étant normale à la base C^n en deux points différents (normale double à la base), est aussi tangente double de la développée E_0, et réciproquement.

La droite G_∞ est n fois tangente à la développée E_0 (b); donc, en cas de besoin, elle peut être regardée comme étant n fois normale à la base C^n.

e. Un point d'inflexion de la développée E_0 correspond à un point de rebroussement de la base C^n, et réciproquement. Si cependant la base est une courbe générale du degré n, sans aucune autre détermination, elle n'a aucun point de rebroussement, et, dans ce cas, la développée E_0 n'aura pas non plus de points d'inflexion proprement dits.

A l'aide des formules contenues dans le compte rendu précité, nous tirons des considérations précédentes le théorème suivant :

La développée E_0 d'une courbe générale C^n du degré n est :

(1) Du degré $3n(n-1)$ et de la classe n^2;

elle n'a pas, en général, de points d'inflexion, elle a seulement

$$3n(n-2) \tag{2}$$

asymptotes rectilignes, qui en même temps sont les normales à la base C^n aux points d'inflexion; les $3n$ autres asymptotes de la développée coïncident avec la droite G_∞ à l'infini. Cette droite est n fois tangente de rebroussement de la développée; les n points de rebroussement R se trouvent sur les directions perpendiculaires aux asymptotes de la base C^n. En somme, la développée E_0 a

$$3n(2n-3) \tag{3}$$

points de rebroussement R_1 et R; car elle a, outre les n points R_1

dont il vient d'être question, encore $2n(3n-5)$ points de rebroussement, centres des cercles qui ont avec la base un contact du troisième ordre aux points correspondants S. Donc la base donnée C^n a

$$(4) \qquad 2n(3n-5)$$

sommets S, où elle a un contact du troisième ordre avec une courbe à rayon fini.

La développée E_0 a de plus

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-3)$$

tangentes doubles; ou, la base a autant de normales doubles. Il faut remarquer que la droite G_∞ a été comptée ici $\frac{1}{2}n(n-1)$ fois, de sorte qu'en en faisant abstraction, on aura seulement

$$(6) \qquad \tfrac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-4)$$

tangentes doubles de la développée, ou autant de normales doubles de la base.

Si l'on suppose que la base donnée est du deuxième ou du troisième degré, on tire du théorème précédent les propriétés suivantes :

A. La développée E_0 d'une section conique C^2 est une courbe de la quatrième classe et du sixième degré (1); elle n'a pas de points d'inflexion proprement dits ni d'asymptotes (2); mais elle a la droite G_∞ pour tangente double de rebroussement (3), et six points de rebroussement, à savoir $2R_1$ sur G_∞ et $4R$ centres de quatre cercles qui ont avec la section conique C^2 aux quatre sommets un contact du troisième ordre.

Cette développée E_0 a trois tangentes doubles, qui sont à la fois normales doubles à la base C^2 (5), à savoir la droite G_∞ et les deux axes X, Y (6) de la conique. En tant qu'on peut considérer la droite G_∞ comme un axe de la conique, celle-ci a trois axes qui sont tangentes doubles de E [*]. Ici cependant X et Y ne sont pas des tangentes

[*] La droite G_∞ se présente aussi dans la considération générale des foyers de la conique C^2, comme troisième axe de cette conique, parce que C^2 a trois couples de foyers situés sur les trois axes X, Y et G_∞ correspondants, lesquels foyers ne sont réels que sur un seul axe, et imaginaires sur les deux autres axes.

doubles de E_0 dans le sens ordinaire; ces axes sont, comme G_∞, des tangentes doubles de rebroussement à deux points correspondants des quatre points R, de sorte que les sommets de ces axes X, Y sont les quatre sommets de la courbe C^2.

On peut exprimer d'une manière plus précise ce qui vient d'être dit.

Les trois axes X, Y et G_∞ de la conique C^2 sont à la fois les axes de la développée E_0 de la conique; ils sont normales doubles de C^2 et tangentes doubles de rebroussement de E_0; leurs trois couples de sommets (4S et 2A) sont les points de contact de C^2 avec des cercles qui ont en ces points avec la conique un contact du troisième ordre; les trois couples de points de rebroussement situés sur les axes (4R et $2R_1$) sont les centres de ces cercles; les deux points de rebroussement et les deux sommets sont imaginaires sur l'un des trois axes et réels sur les deux autres; les points $2R_1$ sur l'axe G_∞ sont situés sur les directions perpendiculaires aux asymptotes de C^2.

B. La développée d'une courbe générale du troisième degré C^3 est une courbe de la neuvième classe et du dix-huitième degré (1); elle n'a que neuf asymptotes, dont trois sont imaginaires et six réelles; mais la droite G_∞ en est tangente triple de rebroussement, remplaçant ainsi les neuf asymptotes manquantes; elle (la courbe E_0) a, outre les trois points de rebroussement R_1 situés sur G_∞, encore vingt-quatre points de rebroussement R. Par rapport à ces vingt-quatre points la base C^3 a vingt-quatre sommets S (4), où elle est touchée par vingt-quatre cercles ayant pour centres les points R. Enfin la courbe E_0 a, outre la droite G_∞, encore vingt-quatre tangentes doubles, qui en même temps forment la totalité des normales doubles de C^3 (6), etc. La base C^3 étant de la classe $3.2 = 6$, elle a, en tout, $6.9 = 54$ tangentes T communes avec sa développée E_0.

Ainsi nous disons :

« La courbe générale du troisième degré C^3 a cinquante-quatre
» normales T qui en même temps lui sont tangentes. »

C'est-à-dire une telle ligne T est normale à la courbe en un point, et tangente en un autre.

Appelons U la tangente à la courbe au point Q; alors l'angle droit

(TU) est circonscrit à la courbe, son sommet Q est situé sur cette courbe, et est le point de contact avec l'un des deux côtés.

« Il y a cinquante-quatre autres points Q_1 sur la courbe C^3, qui » peuvent être lieux du sommet d'un angle droit circonscrit à la » courbe, pendant que celle-ci est touchée par les côtés de l'angle » en d'autres points. »

Ce théorème vient de cet autre :

« Le lieu des sommets de tous les angles droits (TU) circonscrits à » la courbe C^3 est une courbe du trente-sixième degré [*], et les

$$3.36 = 108$$

» points d'intersection mutuelle des deux courbes sont donnés par » les cinquante-quatre points Q et les cinquante-quatre points Q_1. »

« Si le sommet d'un angle droit donné (TU) se meut sur la base » donnée C^3, pendant que l'un des deux côtés, U, touche continuel- » lement cette courbe, l'autre côté T décrit comme tangente une » courbe T^{18} de la dix-huitième classe et du trente-troisième degré, » qui a neuf asymptotes communes avec la développée E_0 de la base; » ses vingt-quatre autres asymptotes coïncident avec la droite G_∞ qui » est douze fois tangente de T^{18} aux trois points de rebroussement R_1 » de la développée E_0, où elle est touchée par quatre branches de la » courbe T^{18}. »

En ayant égard aux propriétés de la courbe $\mathfrak{S}^9$ (*voir* le tome XVIII de ce Journal, page 325), on peut énoncer le théorème suivant :

« La courbe C^3 du troisième degré a en tout trente-trois normales » qui la coupent au pied Q et en deux autres points A et B, tels que » les tangentes à ces points soient parallèles. »

---

[*] Le théorème général est :

« Le lieu des sommets de tous les angles droits circonscrits à une courbe donnée de » la classe K est une courbe du degré K^2. »

La contradiction, qui se trouve entre ce théorème et le théorème connu sur la section conique, n'est qu'apparente.

III.

Sur les normales qu'on peut mener d'un point à une surface algébrique.

Le nombre des normales qu'on peut mener d'un point quelconque à une surface donnée du degré n, peut être trouvé par une méthode analogue à celle qui vient d'être appliquée (§ I) aux courbes. Notamment le procédé du § I, 3°, donne des résultats intéressants, que nous allons indiquer brièvement.

1°. Deux courbes C^n et D^p des degrés n et p, situées dans un même plan, ont, en général,

$$(n+p-2)^2-(n-1)(p-1)$$

couples de pôles Q et de droites polaires L^1 communs, c'est-à-dire tel est dans un plan le nombre de pôles Q_1 dont les $\overline{n-1}^{\text{ièmes}}$ et les $\overline{p-1}^{\text{ièmes}}$ polaires, par rapport aux bases C^n et D^p, coïncident sur une même droite $C^1D^1 = L^1$.

Si, en particulier, on a $p = 2$, et que, par conséquent, $D^p = D^2$ soit une section conique, le nombre des pôles Q_1 se réduit à $n^2 - n + 1$; et il sera le même si la conique devient un cercle réel ou imaginaire.

2°. Il y a pour chaque plan E, $\overline{n-1}^3$ pôles différents F qui lui correspondent par rapport à une surface F^n du degré n, c'est-à-dire ce plan est la $\overline{n-1}^{\text{ième}}$ polaire, ou le plan polaire de chacun de ces pôles par rapport à la surface.

A chaque pôle Q correspond un seul plan polaire F^1, mais il existe $\overline{n-1}^3$ pôles différents Q qui correspondent à ce même plan.

Désignons par F_0 les $\overline{n-1}^3$ pôles relatifs au plan E_∞ à l'infini. En vertu des théorèmes auxiliaires et des déterminations qui précèdent, nous énoncerons de la manière suivante les résultats annoncés ci-dessus :

« Le lieu d'un pôle Q dont le plan polaire F^1, par rapport à une » surface donnée F^n du degré n, est perpendiculaire à la droite QP » qui joint Q à un point fixe P, choisi arbitrairement, ce lieu, dis-je,

» est une courbe à double courbure du degré $\overline{n^2 - n + 1}$, soit » Q^{n^2-n+1}, qui passe aussi par le point fixe P, et qui a pour tangente » en ce point la perpendiculaire abaissée du point P sur son plan po- » laire. Pour les pôles Q_0, où cette courbe Q^{n^2-n+1} perce la surface » donnée, le plan polaire correspondant F_0^1 devient le plan tangent à » la surface F^n en ce point, et ainsi la droite PQ_0 est la normale cor- » respondante. Par conséquent, par chaque point P passent, en gé- » néral, $n(n^2 - n + 1)$ normales PQ_0 à la surface F^n, dont les » $n(n^2 - n + 1)$ pieds Q_0 sont situés, avec le point P, sur la courbe » à double courbure du $\overline{n^2 - n + 1}^{ième}$ degré. »

« Cette courbe Q^{n^2-n+1} passe aussi par les $\overline{n-1}^3$ pôles F_0 du plan » E_∞ à l'infini, ainsi que par $n^2 - n + 1$ points déterminés Q_1 dans » ce plan. Ces points Q_1 sont, en vertu du théorème auxiliaire (1°) les » pôles communs des deux courbes C_∞^n et D_∞^2 formées par l'intersec- » tion du plan E_∞ avec la surface donnée F^n et avec une sphère F^2; » D_∞^2 est donc un cercle imaginaire [*].

» Toutes les courbes Q^{n^2-n+1}, correspondant de cette manière à tous » les points P, passent par les $\overline{n-1}^3$ pôles fixes F_0 et par les » $\overline{n^2 - n + 1}$ points Q_1; les asymptotes de toutes les courbes sont » toutes dirigées vers ces derniers points à l'infini; donc les asymp- » totes de chacune des courbes seront parallèles aux asymptotes de » toutes les autres. »

Les droites menées d'un point quelconque Q, pris sur la courbe Q^{n^2-n+1}, à tous les autres points de cette courbe sont sur une surface conique du degré $n(n-1)$, dont le sommet (centre) est Q.

On peut dire, par conséquent :

« Les $n(n^2 - n + 1)$ normales PQ_0 abaissées d'un point P sur la » surface donnée F^n, ainsi que les $\overline{n-1}^3$ droites PF_0 et les $n^2 - n + 1$ » droites PQ_1 menées du point P aux points fixes F_0 et Q_1, toutes ces » $n(2n^2 - 3n + 3) + 1$ droites, dis-je (y compris la perpendiculaire » du point P à son plan polaire), sont sur une même surface conique » du $n(n-1)^{ième}$ degré. »

---

[*] D'après un théorème de M. Poncelet, toutes les sphères F^2 ont un même cercle imaginaire D_∞^2 commun avec le plan E_∞.

« De même, toutes les droites menées de l'un des points Q_0, F_0 et Q_1 » à tous les autres et à P, sont sur une même surface conique du » $n(n-1)^{ième}$ degré, qui se change cependant pour les points Q_1 en » une surface cylindrique du même degré. »

On peut compléter ce théorème d'une manière semblable à celle du § I, 3°.

Imaginons toutes les surfaces du degré n qui ont avec la surface donnée F^n, suivant sa courbe d'intersection C^n_∞ avec le plan E_∞, un contact de l'ordre $n-1$, ou imaginons le faisceau $B(F^n)$ déterminé par la surface donnée et par le plan E_∞ considéré comme l'ensemble de n plans, de sorte que la courbe fondamentale du faisceau est la courbe C^n_∞ prise n fois : et nous verrons que toutes ces surfaces $B(F^n)$ ont les $\overline{n-1}^3$ pôles F_0 du plan E_∞, ainsi que les $\overline{n^2-n+1}$ points Q_1 situés dans ce plan, communs entre elles; les plans polaires F^1, correspondant à chaque pôle Q, sont parallèles les uns aux autres. Il s'ensuit :

« Si, d'un point arbitraire P on mène des normales à toutes les » surfaces de ce faisceau $B(F^n)$ (ce qui donne $n(n^2-n+1)$ nor- » males PQ_0 pour chaque surface), toutes ces normales seront sur » une même surface conique du $n(n-1)^{ième}$ degré, et leurs pieds Q_0 » seront sur une courbe à double courbure Q^{n^2-n+1} du $(n^2-n+1)^{ième}$ » degré, qui passe par les $n(n^2-2n+2)$ points F_0 et Q_1. »

« Si l'on transporte le point P à l'infini, dans le plan E_∞, la surface » conique et la courbe à double courbure Q^{n^2-n+1} se décomposent en » des parties déterminées. »

Nous faisons observer, relativement au théorème précédent, que, pour le cas où la surface F^n est du deuxième degré, F^2, M. Terquem a démontré le premier que « par chaque point P on peut mener à la » surface six normales, toujours situées sur une même surface conique » du deuxième degré [*]. »

Conformément à ce qui vient d'être dit, nous pouvons compléter ce théorème comme il suit :

---

[*] *Voir* le présent Journal, tome IV, page 175. Nous nous empressons d'ajouter que le théorème de M. Terquem est plus général. Il a démontré que par un point donné on peut mener m^3-m^2+m normales à une surface algébrique du degré m.

« Au plan E_∞ correspond, dans ce cas, un seul pôle F_0 [puisque » $(2-1)^3=1$], qui est le centre de la surface F^2; les n^2-n+1 points Q_1 » sur E_∞ se réduisent à trois points Q_1, à savoir les points à l'infini » des axes X, Y, Z de la surface F^2. »

Donc, l'énoncé complet du théorème sera :

« D'un point quelconque P on peut mener six normales PQ_0, réelles » ou imaginaires, à une surface donnée F^2 du deuxième degré; les six » pieds Q_0, le point P, le centre F_0 de la surface et les trois points Q_1 » à l'infini sur les trois axes de la surface sont toujours situés en- » semble sur une courbe à double courbure Q^3 du troisième de- » gré [*]; toutes les courbes Q^3 ainsi déterminées ont les quatre » points F_0 et $3Q_1$ communs, de sorte que leurs asymptotes, eu égard » aux trois points Q_1, ont les mêmes directions constantes et paral- » lèles aux trois axes de la surface; pour chaque point P les six nor- » males PQ_0, la droite passant par le centre F_0, les trois droites menées » aux trois points Q_1 (parallèles aux trois axes), et la perpendiculaire » abaissée du point P sur son plan polaire (donc, onze droites passant » par P), sont ensemble sur une surface conique du deuxième degré; » de même, les dix droites menées du centre F_0 ou de l'un des six » pieds Q_0 aux autres dix points déterminés sont sur une surface co- » nique du deuxième degré. Particulièrement, les droites menées de » l'un des trois points Q_1 aux autres dix points, ou les huit droites » menées par les huit points P, F_0 et $6Q_0$ parallèlement à l'un des » trois axes, sont sur un même cylindre hyperbolique équilatère; » c'est-à-dire si l'on projette les huit points P, F_0 et $6Q_0$ sur un plan » perpendiculaire à l'un des trois axes, dans une direction parallèle » à cet axe, les huit points nouveaux se trouvent sur une même hy- » perbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles aux deux » autres axes. »

« Par chaque point donné Q passe un nombre infini de courbes à » double courbure Q^3; leurs pôles correspondants P se trouvent tous » sur la perpendiculaire abaissée du point Q sur son plan polaire F. »

« Étant donné un faisceau particulier B (F^2) de surfaces du deuxième » degré, qui se touchent les unes les autres suivant une conique C^2_∞

[*] La courbe à double courbure du troisième degré est déterminée par six points.

» située dans le plan E_∞ (ou, pour employer les expressions de » M. Poncelet, étant donné un système de surfaces semblables, sem- » blablement placées et concentriques du deuxième degré), si l'on » abaisse d'un point P des normales PQ_0 sur les surfaces (six sur cha- » cune), leurs pieds seront tous sur une même courbe à double cour- » bure Q^3 du troisième degré, qui passe toujours par le centre F_0 des » surfaces et par les trois points à l'infini Q_1 de leurs axes communs » X, Y, Z, auxquels par conséquent les asymptotes de Q^3 sont paral- » lèles.

» De plus, la totalité des normales PQ_0 (y compris les droites » menées du point P au centre F_0 et celles menées aux trois points Q_1 » et conséquemment parallèles aux trois axes) se trouve toujours sur » une même surface conique F_0^2 du deuxième degré. »

Si le pôle P se trouve dans l'un des plans des axes XY, XZ ou YZ, la courbe Q^3 se décompose dans une section conique Q^2 située dans ce plan et dans une droite Q^1 perpendiculaire au plan ; conséquemment le cône F_0^2 se décompose dans deux plans, dont l'un est le plan des axes en question, tandis que l'autre est perpendiculaire à ce plan et passe par P et la droite Q^1.

Si, enfin, le pôle P se trouve sur l'un des trois axes X, Y, Z, la courbe Q^3 se change en trois droites, l'une étant l'axe lui-même, les deux autres étant perpendiculaires à cet axe et parallèles respective- ment aux deux autres axes. La surface conique F_0^2 est alors formée par deux des plans des X, Y, Z.

Il en est pareillement, si le pôle P est situé dans le plan E_∞ ou sur l'une des droites X_1, Y_1, Z_1, qui sont les lignes d'intersection du plan E_∞ avec les plans des axes XY, YZ, XZ ; car sous ce rapport, ainsi que sous quelques autres points de vue, le plan E_∞ peut être considéré comme quatrième plan des axes, et l'on aura un tétraèdre formé par ces quatre plans, dont les six arêtes X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 peuvent être considérées comme les axes des surfaces données $B(F^2)$.

Errata pour le Mémoire de M. *Steiner* inséré au tome XVIII de ce Journal : *Page* 309, *formule* (3), *au lieu de* $3g(g-1)$, *lisez* $3g(g-2)$; *page* 321, *ligne* 17, *au lieu* de six, *lisez* vingt-quatre ; *page* 335, *ligne* 6, *au lieu de* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, *lisez* $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$.