JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 329-336.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__329_0>

Construction des racines des équations du troisième et du quatrième degré [*];

Par M. CHASLES.

I. — La construction géométrique des racines des équations du troisième et du quatrième degré donnée par Descartes dans sa *Géométrie* forme une des théories les plus importantes, à plusieurs titres, de cet admirable ouvrage; car elle implique la féconde Méthode des coefficients indéterminés, et les belles découvertes de l'auteur sur la composition des équations algébriques s'y rattachent aussi. Depuis, beaucoup de géomètres, Sluze, Newton, Halley, le marquis de Lhopital, etc., se sont occupés de la question, et ont développé toutes les conséquences qu'embrassait dans sa généralité le procédé de Descartes. Il semblerait donc aujourd'hui que tout a été dit sur ce point de théorie mathématique, et qu'il ne laisse plus rien à désirer. Cependant une simple remarque suffit pour montrer que la question se prête à un point de vue sous lequel on ne l'a point encore considérée. Car s'il est vrai que l'on effectue la résolution des équations *par une construction géométrique*, néanmoins la voie qui conduit si aisément à cette solution n'appartient pas aux méthodes de la simple et pure Géométrie: c'est une application de la *Géométrie analytique*, qui tient plus du calcul encore que de la Géométrie, puisqu'on y représente les courbes par des équations que l'on combine algébriquement. La question se présente donc intacte en Géométrie rationnelle, et constitue un sujet de recherches qui a sa place naturelle dans le développement et les applications des méthodes propres à cette partie des mathématiques. Car la Géométrie doit s'efforcer de s'affranchir de la nécessité de recourir aux méthodes de calcul pour résoudre les questions de son domaine, même quand elles se traduisent par une équation du troisième ou du quatrième degré [**].

[*] Extrait des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLI, p. 677.

[**] Il est à propos de rappeler ici que les Arabes ont construit d'une manière générale les racines de l'équation du troisième degré : mais il faut dire que leur méthode ne diffère pas, au fond, de celle de Descartes relative au cas du troisième degré, parce que les propriétés des coniques dont ils faisaient usage ne sont autres que des cas particuliers de la proposition du rapport constant du rectangle des ordonnées au rectangle des ab-

C'est sous ce point de vue que j'ai l'honneur d'entretenir l'Académie d'une question qui, au premier abord, aurait pu paraître épuisée et peu susceptible de faire ici le sujet d'une communication.

Du reste, les solutions auxquelles je suis parvenu reposent sur des considérations de Géométrie nouvelles qui peuvent mériter par elles-mêmes d'être connues, parce qu'elles s'appliquent à d'autres questions importantes. Il s'agit de quelques propriétés de deux séries de segments en involution, entre lesquels on établit une certaine relation fondée sur le rapport anharmonique.

On pense bien, sans qu'il soit besoin de le dire, que les sections coniques jouent un rôle nécessaire dans nos nouvelles constructions, comme dans celles de la Géométrie analytique. Employer d'autres courbes d'un ordre supérieur, serait une faute de méthode, d'autant plus grave, qu'on peut dire que la destination philosophique et essentielle des sections coniques, en Géométrie, est précisément la résolution des questions qui admettent trois ou quatre solutions, de même que la propriété essentielle du cercle est de servir à résoudre celles qui en admettent deux seulement.

Cette considération suffit pour montrer que ces courbes, indépendamment de leurs applications dans toutes les sciences qui ressortent des mathématiques, forment, au même titre que le cercle lui-même, une des bases fondamentales de la Géométrie, sans laquelle cette science rencontrerait à chaque pas des limites infranchissables, quand, au contraire, le progrès illimité forme son caractère propre et son attribut distinctif dans l'ensemble des connaissances humaines. Aussi ne saurait-on trop étudier et étendre la théorie des coniques, qui est encore beaucoup trop restreinte pour les besoins de la Géométrie.

Mais revenons au sujet de la présente communication. Je donne deux

---

scisses, qui forme l'équation des courbes dans la Géométrie analytique. Aussi, c'est la résolution des équations du quatrième degré, où tous les efforts des Arabes ont échoué, qui présentait des difficultés et qui fait le mérite de la méthode de Descartes. Néanmoins le travail des géomètres arabes marquait un pas notable en Géométrie et en Algèbre, et était un acheminement vers une alliance plus intime entre ces deux branches des mathématiques. On doit, comme on sait, la connaissance de ce point historique important à M. Sédillot, qui l'a fait connaître par une analyse étendue d'un Manuscrit arabe de la Bibliothèque impériale (voir *Notices et Extraits des Mss.*, etc, tome XIII). Depuis, M. Woepcke, ayant trouvé dans un Ms. de la Bibliothèque de Leyde le même Traité arabe, mais plus complet que dans le Ms. de Paris, en a publié le texte et une traduction, suivis d'extraits d'autres Mss. inédits, sous le titre : *L'Algèbre d'Omar Alkhayyami*, etc. ; Paris, 1851, grand in-8°.

constructions différentes de la question que je me suis proposée. Dans la première, on se sert des points d'intersection de deux coniques dont une est prise arbitrairement, et dans la seconde, des tangentes communes à deux pareilles courbes, dont une est prise aussi arbitrairement. Les deux constructions reposent sur quelques propositions fort simples que je vais d'abord exposer. Ces propositions, comme je l'ai dit ci-dessus, sont susceptibles d'application à d'autres questions, notamment dans la théorie des courbes du troisième et du quatrième ordre.

II. — *Propositions d'où dérive la construction des équations des racines du troisième et du quatrième degré.*

1er THÉORÈME. — *Quand quatre segments* Mm, M'm',..., *pris sur une même droite, sont en involution, les pôles d'un point de la droite relatifs à ces segments ont leur rapport anharmonique constant, quel que soit ce point* [*].

Nous appellerons ce rapport constant *rapport anharmonique des quatre segments.*

2e THÉORÈME. — *Si d'un point fixe pris sur une conique on mène des droites aux extrémités de chacun des quatre segments* Mm, M'm',..., *les quatre cordes que ces droites interceptent dans la conique, lesquelles, comme on sait, passent par un même point, ont leur rapport anharmonique égal à celui des quatre segments.*

3e THÉORÈME. — *Si dans l'équation du troisième degré à deux variables*

$$x^2(az+b)+x(a'z+b')+(a''z+b'')=0$$

les variables représentent des segments comptés sur une droite indéfinie OX *à partir d'une origine fixe* O, *de manière qu'une valeur de* z *détermine un point* n, *et les deux valeurs correspondantes de* x *deux points* M, m, *formant un segment* Mm : 1° *tous les segments* Mm *sont en involution;* 2° *les points* n *correspondent anharmoniquement à ces segments (c'est-à-dire que le rapport anharmonique de quatre points* n *est égal à celui des quatre segments* Mm).

4e THÉORÈME. — *Si dans l'équation du quatrième degré à deux variables*

$$x^2(az^2+bz+c)+x(a'z^2+b'z+c')+(a''z^2+b''z+c'')=0$$

le déterminant des neufs coefficients est nul, ce qu'on exprime par la relation

$$a(b'c''-b''c')+a'(b''c-bc'')+a''(bc'-b'c)=0,$$

[*] Le *pôle* d'un point relatif à un segment est le conjugué harmonique du point par rapport aux deux extrémités du segment.

les racines conjuguées de l'équation sont doubles, c'est-à-dire que les deux valeurs de x *qui correspondent à une valeur donnée de* z, *correspondent aussi, toutes les deux à la fois, à une autre valeur de* z;

Et si ces couples de racines conjuguées représentent des segments Mm *et* Nn *sur une même droite, ces segments jouissent des deux propriétés suivantes :*

1°. *Les segments* Mm *sont en involution; et pareillement les segments* Nn;

2°. *Ceux-ci correspondent anharmoniquement aux premiers, c'est-à-dire que le rapport anharmonique de quatre segments* Nn *est égal à celui des quatre segments* Mm.

D'après ce théorème, trois systèmes de deux segments Mm, Nn suffisent pour déterminer tous les autres; et, conséquemment, trois systèmes de couples de racines conjuguées de l'équation suffisent pour déterminer tous les autres systèmes.

III. — *Construction des racines de l'équation du troisième degré* $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

Qu'on prenne l'équation à deux variables

$$(Az + B)x^2 + Cz + D = 0,$$

qui devient la proposée quand on y fait $z = x$. Une infinité de systèmes de racines conjuguées x, z, satisfont à cette équation, et il s'agit de trouver les trois systèmes dans lesquels les deux variables sont égales. Or, pour cela, trois systèmes quelconques suffisent.

A cet effet, on prend une conique arbitrairement, et sur cette courbe un point fixe; et au moyen des trois systèmes de valeurs des deux variables, on construit quatre points qui avec le point fixe déterminent une autre conique. Cette courbe rencontre la première en trois points, autres que le point fixe, lesquels correspondent aux systèmes de valeurs égales de x et de z, et font connaître les racines de l'équation proposée.

Il nous reste à dire comment les systèmes de valeurs conjuguées des deux variables servent à construire les points de la seconde conique.

On prend sur une droite indéfinie OX, à partir d'un point fixe O, des segments égaux aux valeurs des deux variables. Ainsi, donnant à z une valeur arbitraire z', à laquelle correspondent deux valeurs de x (égales et de signes contraires), on prend un segment On égal à z', et deux segments OM, Om égaux aux deux valeurs correspondantes de x.

Un autre système de valeurs des deux variables détermine un autre point n' et un segment correspondant $M'm'$; et un troisième système, un troisième point n'' et un segment $M''m''$.

Ayant pris une section conique quelconque et un point P sur cette courbe, on mène par ce point trois droites aboutissant, l'une au point n, et les deux autres aux extrémités du segment Mm; ces deux dernières interceptent dans la conique une corde Aa qui rencontre la première droite Pn en un point α. Le second point n' et le segment correspondant $M'm'$ donnent une deuxième corde $A'a'$ et un nouveau point α'. Et enfin au troisième point n'' et au segment $M''m''$ correspondent semblablement une corde $A''a''$ et un troisième point α''. Les trois cordes concourent en un même point (parce que les trois segments Mm, $M'm'$, $M''m''$ sont en involution, théorèmes 3^e et 2^e). Ce point avec les trois α, α', α'' et le point P détermine une conique sur laquelle serait un quatrième point α'' construit au moyen d'un quatrième système de valeurs des variables x et z (parce que les points n, n',... correspondent anharmoniquement aux segments Nn, $N'n'$, théorème 3^e, et par suite aux cordes Aa, $A'a'$, théorème 2^e). Il s'ensuit évidemment que la droite menée du point P à chacun des trois points d'intersection des deux coniques détermine sur la droite OX un point n qui coïncide avec une des extrémités du segment correspondant Mm; de sorte que pour ce point la variable x est égale à z, et par conséquent le segment Om est une racine de l'équation.

Ainsi les droites menées du point fixe P aux trois autres points d'intersection des deux coniques déterminent les trois racines de l'équation proposée.

Observation. — On peut former autrement, mais non indifféremment, l'équation à deux variables qui devient la proposée quand les variables sont égales. Il suffit et il est nécessaire qu'une des variables n'entre qu'à la première puissance dans l'équation.

On peut encore résoudre l'équation du troisième degré à la manière des équations du quatrième degré, comme nous le dirons après avoir donné la construction propre à celles-ci.

IV. — *Construction des racines de l'équation du quatrième degré* $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$.

Qu'on prenne l'équation à deux variables

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bx^2 + Cx + D = 0,$$

qui devient la proposée quand on y fait $z = x$.

Donnant à x une valeur arbitraire x', on aura pour z deux valeurs z', z'' (égales et de signes contraires), et à ces deux valeurs correspondra une même seconde valeur x'' de x. On a donc un système de deux couples de racines conjuguées. On peut former ainsi une infinité de tels systèmes; et trois suffisent pour déterminer tous les autres.

Que l'on porte sur une droite indéfinie OX, à partir du point fixe O, les diverses valeurs des variables x et z. Les valeurs x', x'' déterminent deux points M, m, et les valeurs correspondantes z' et z'', deux points N, n : ces points donnent lieu aux deux segments Mm, Nn. Pour un autre système de deux couples de racines conjuguées de l'équation, on a deux autres segments correspondants M'm', N'n'.

Trois couples de segments suffisent pour déterminer tous les autres (théorème 4^e), et par conséquent tous les couples de racines conjuguées x', x'' et z', z''. Mais, en outre, ils suffisent pour déterminer, au moyen d'une construction géométrique, les quatre couples dans chacun desquels les deux segments ont une extrémité commune, auquel cas les deux variables x et z sont égales et constituent une racine de l'équation du quatrième degré.

Construction. — Qu'on prenne une conique quelconque, et sur cette courbe un point fixe P. Que par ce point on mène des droites aux quatre points M, m, N, n. Les deux premières interceptent dans la conique une corde Aa, et les deux autres une corde Bb. Un autre couple de segments M'm', N'n' donnera semblablement deux autres cordes A'a', B'b'; et un troisième couple M''m'', N''n'', deux nouvelles cordes A''a'', B''b''. Les trois cordes Aa, A'a', A''a'' passent par un même point Q (parce que les trois segments Mm, ... sont en involution), et les trois Bb, B'b', B''b'' par un autre point Q'. D'une autre part, les trois premières rencontrent respectivement les trois autres en trois points α, α', α''. Ces trois points avec les deux Q, Q' déterminent une conique; et cette courbe rencontre la première en quatre points. Les droites menées du point P à ces points déterminent sur la droite OX quatre segments qui sont les racines de l'équation.

Observation. — On peut former de bien des manières différentes l'équation à deux variables, puisqu'il suffit, d'après le théorème 4^e, que les coefficients satisfassent à une condition unique fort simple. Ainsi, on pourra prendre les équations

$$z^2(x^2 + Ax + B) + Cx + D = 0,$$

$$z^2(x^2 + Ax + B) + Cz + D = 0,$$

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bxz + \frac{C - \sqrt{C^2 - 4BD}}{2}x + \frac{C + \sqrt{C^2 - 4BD}}{2}z + D = 0;$$

mais non celles-ci :

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bxz + Cx + D = 0,$$
$$(x^2 + B)z^2 + Ax^2z + Cx + D = 0.$$

Application aux équations du troisième degré. — La construction précédente s'applique aux équations du troisième degré de deux manières, qui diffèrent de la méthode directe propre à ces équations.

Première manière. — On suppose le dernier terme D nul, et l'on effectue la construction relative à l'équation du quatrième degré

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx = 0,$$

au moyen, par exemple, de l'équation

$$(x^2 + Ax)z^2 + Bx^2 + Cx = 0.$$

Alors les trois segments Mm ont leur origine commune au point O, et le point de concours des trois cordes Aa est situé sur la conique prise arbitrairement. La conique que l'on construit passe par ce point, auquel correspond sur l'axe OX une racine nulle; et les trois autres points d'intersection des deux coniques donnent les trois racines de l'équation du troisième degré.

Deuxième manière. — On peut opérer directement sur l'équation du troisième degré

$$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$$

de la même manière que sur l'équation générale du quatrième degré.

On prendra une équation à deux variables, telle que

$$x^2(z+\lambda) + (A-\lambda)z^2 + Bz + C = 0,$$

ou, plus généralement,

$$x^2(bz+c) + x(a'z^2 + b'z + c') + a''z^2 + b''z + c''z = 0,$$

pourvu que ses coefficients satisfassent à la relation

$$a'(b''c - bc'') + a''(bc' - b'c) = 0,$$

et, en outre, à la condition que l'équation devienne la proposée quand on y fait $z = x$.

C'est cette équation dont on déterminera trois couples de racines conjuguées qui, au moyen d'une conique prise arbitrairement, serviront à en construire une autre dont les points d'intersection avec la première donneront les racines cherchées.

Ici peut se présenter une objection, car les deux coniques se couperont en quatre points qui sembleraient donner quatre racines au lieu de trois. Mais un de ces points est connu à priori; il répond au système de valeurs $x = \infty$ et $z = \infty$ qui, effectivement, satisfont à l'équation à deux variables, mais introduisent une racine étrangère à l'équation du troisième degré.

V. — *Autre mode de construction des équations du troisième et du quatrième degré.*

Équations du troisième degré. — Après avoir déterminé sur une droite indéfinie OX les trois points n, n', n'' et les segments correspondants Mm, $M'm'$, $M''m''$, comme dans la première solution, on prend arbitrairement une section conique tangente à la droite OX en un quelconque de ses points. Par les deux points M, m on mène deux tangentes à cette courbe, lesquelles se rencontrent en un point α. Les deux points M', m' donnent lieu semblablement à un point α', et les deux M'', m'' à un point α''. Ces trois points sont sur une même droite L. On joint ces points respectivement aux points n, n', n'' par trois droites, qui avec la droite L et la droite OX déterminent une conique qui leur est tangente. Cette conique et celle qu'on a prise à volonté ont trois tangentes communes, autres que la droite OX. Les points où ces tangentes rencontrent cette droite déterminent les racines de l'équation, c'est-à-dire que ces racines sont les distances de ces points à l'origine O.

Equations du quatrième degré. — Après avoir déterminé les segments Mm, Nn, comme dans la première construction, on prend une conique tangente à la droite OX, et l'on mène par les extrémités des deux segments les tangentes à cette courbe. Les deux tangentes émanées des points M et m se rencontrent en un point α, et les deux autres en un point β. Un second couple de segments donne semblablement deux points α', β', et un troisième couple deux points α'', β''. Les trois points α, α', α'' sont sur une même droite L, et les trois β, β', β'' sur une droite L'. Ces deux droites et les trois $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$ déterminent une conique qui leur est tangente. Les quatre tangentes communes à cette courbe et à la première rencontrent la droite OX en quatre points dont les distances au point O sont les racines cherchées.

Cette construction s'applique, comme la première, aux équations du troisième degré, de deux manières.