JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur les fonctions elliptiques. Extraits de deux communications faites à l'Académie des Sciences le 9 décembre 1844, et le 31 mars 1851

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 203-208.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__203_0>

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Extraits de deux communications faites à l'Académie des Sciences le 9 décembre 1844, et le 31 mars 1851;

Par M. J. LIOUVILLE.

Je crois bon d'insérer ici, d'après les *Comptes rendus*, les extraits de deux communications que j'ai faites verbalement à l'Académie des Sciences, il y a bien longtemps déjà, sur la théorie et les propriétés des fonctions elliptiques. J'attache, je l'avouerai, de l'importance à ces communications. La première remonte au 9 décembre 1844 (*Comptes rendus*, tome XIX, page 1261): elle a eu lieu à l'occasion d'un beau travail de M. Chasles. Je transcris texte et notes sans y rien changer, et le titre même :

Remarques de **M. Liouville.**

« La communication intéressante de M. Chasles est relative aux seules fonctions elliptiques. Il serait bien à désirer que M. Chasles pût étendre ses ingénieuses considérations géométriques aux transcendantes d'un ordre plus élevé, et d'abord aux fonctions abéliennes de première classe, qui proviennent d'intégrales relatives à un radical carré portant sur un polynôme du cinquième ou du sixième degré. Ces fonctions se présentent dans un grand nombre de problèmes. On les rencontre, par exemple, dans l'équation de la ligne géodésique (la ligne la plus courte) sur un ellipsoïde à trois axes inégaux, et dans l'expression d'un arc quelconque de cette ligne. Dès lors, à l'aide d'un célèbre théorème d'Abel, on peut conclure, pour certaines combinaisons de pareils arcs, des théorèmes analogues à ceux que l'on connaît pour les arcs d'ellipse. Mais une discussion géométrique détaillée et approfondie donnerait sans doute à ces théorèmes une forme et une élégance nouvelles.

» Sur une surface quelconque, la ligne géodésique jouit de cette propriété, que son rayon de courbure est en chaque point normal à la surface. De là une équation différentielle du second ordre, dont M. Jacobi a le premier trouvé l'intégrale avec deux constantes arbitraires, pour le cas de l'ellipsoïde à trois axes. En cherchant à vérifier la formule remarquable qu'il a donnée, et dans laquelle figurent, comme je l'ai dit, des fonctions abéliennes, j'ai d'abord obtenu une intégrale première, d'où l'intégrale seconde se déduit immédiatement, et qui me paraît assez simple pour qu'on puisse espérer d'y parvenir par une méthode purement géométrique. Je prends la liberté de recommander cette recherche au talent de M. Chasles, si éprouvé dans ces matières. Voici l'équation qu'il s'agirait d'établir. Soit AMB une ligne géodésique tracée à volonté sur l'ellipsoïde. Par le point quelconque M, faisons passer les hyperboloïdes à une nappe et à deux nappes, dont les sections principales sont homofocales à celles de l'ellipsoïde. Soient μ^2, ν^2 les carrés de leurs demi-axes dirigés suivant le grand axe de l'ellipsoïde; on aura

$$\mu^2 \cos^2 i + \nu^2 \sin^2 i = \text{constante},$$

i désignant l'angle que la tangente à la ligne géodésique fait avec la normale au second hyperboloïde [*].

» Puisqu'il vient d'être question de fonctions elliptiques, je profiterai de l'occasion pour donner l'énoncé d'un principe général qui me paraît imprimer à l'étude de ces fonctions un caractère d'unité et de simplicité tout particulier. Soient z une variable quelconque, réelle ou imaginaire, et $\psi(z)$ une fonction de z bien déterminée, je veux dire une fonction qui, pour chaque valeur $x+y\sqrt{-1}$ de z, prenne une valeur unique toujours la même, lorsque x et y redeviennent les mêmes. Si une telle fonction est doublement périodique, et si l'on reconnaît qu'elle n'est jamais infinie, on pourra affirmer par cela seul qu'elle se réduit à une simple constante.

» Ce principe (qui conduit du reste à des conséquences nombreuses et utiles dans d'autres parties de l'analyse) m'a fourni sans difficulté les théorèmes connus relatifs, soit à la multiplication et à la transfor-

« [*] Dans le Journal de M. Crelle, M. Joachimsthal a obtenu un résultat tout aussi simple que celui-là, mais de forme différente. »

mation des fonctions elliptiques, soit à leurs développements en séries. J'en ai tiré aussi une démonstration des belles formules par lesquelles M. Jacobi est parvenu à exprimer explicitement les racines des équations de degré élevé relatives à la division [*]. Enfin, j'ai rencontré divers résultats que je crois nouveaux. Dans la méthode que j'ai suivie, les intégrales qui ont donné naissance aux fonctions elliptiques et les modules mêmes dont elles dépendent, disparaissent en quelque sorte pour ne laisser voir que les périodes et les valeurs pour lesquelles les fonctions deviennent nulles ou infinies. Cette communication verbale ne comporterait pas des développements plus étendus. Mais, dès à présent, je dois dire que les études auxquelles je me suis livré ont encore augmenté l'admiration si vive que m'inspiraient déjà, à tant de titres, les travaux de M. Jacobi. »

La seconde communication que je veux rappeler ici, a eu lieu le 31 mars 1851, à l'occasion d'un Rapport que M. Cauchy venait de faire sur un Mémoire de M. Hermite. Voici ce qu'on lit à ce sujet au tome XXXII des *Comptes rendus*, page 540 :

Remarques de **M. Liouville.**

« Sans s'opposer aux conclusions du Rapport, M. Liouville croit devoir rappeler qu'il a, lui aussi, trouvé depuis longtemps une théorie générale des fonctions doublement périodiques, dont il a donné incidemment à l'Académie, dès 1844, à propos d'un Mémoire de M. Chasles sur la construction géométrique des amplitudes des fonctions elliptiques, une vue très-nette qu'on retrouve au tome XIX des *Comptes rendus* (page 1261, séance du 9 décembre 1844).

« La méthode que j'ai suivie, dit M. Liouville, est si simple dans » ses détails, qu'elle pourra, je crois, sans inconvénient, venir après » d'autres, même analogues, mais qui n'ont pas, ce me semble, le » caractère tout intuitif et élémentaire que j'ai donné à la mienne en » m'attachant à aller pas à pas du simple au composé, par la consi-

« [*] Journal de M. Crelle, tome IV. M. Jacobi n'a pas ajouté de démonstration, mais je dois dire que M. Hermite (qui s'est livré, sur toutes ces questions, à de profondes recherches) en a, avant moi, trouvé une dont il a bien voulu me faire part; la méthode qu'il a employée est, du reste, très-différente de la mienne. »

» dération continuelle et toujours directe d'un seul principe. J'ai
» toutefois, on le comprend, un certain intérêt à établir, non pas
» que mon travail est ancien, cela résulte des *Comptes rendus*, mais
» que les détails principaux en ont été arrêtés depuis plusieurs an-
» nées, et ont été communiqués très-explicitement à divers géomètres
» français ou étrangers. Or j'ai chez moi, et je pourrai déposer sur le
» bureau, avant la fin de la séance, une pièce manuscrite qui pa-
» raîtra concluante à cet égard. Deux géomètres allemands distingués,
» MM. Borchardt et Joachimsthal, pendant leur voyage à Paris en 1847,
» ont bien voulu sacrifier quelques heures pour entendre l'exposition
» de ma doctrine, et M. Borchardt a rédigé les leçons que j'étais ainsi
» conduit à faire. J'avais permis à M. Borchardt de montrer cette
» rédaction à qui il voudrait, et j'ai su de lui qu'elle a été mise sous
» les yeux de M. Jacobi. Pressé par le temps, je n'avais pu parler
» des intégrales elliptiques de seconde et de troisième espèce. Mais
» cela importe peu. La classification des fonctions bien déterminées
» doublement périodiques, d'après le nombre des valeurs irréduc-
» tibles par les périodes, mais d'ailleurs égales ou inégales, qui les
» rendent infinies; la démonstration de ce théorème capital, que
» toute fonction de ce genre qui a moins de deux infinis doit se ré-
» duire à une simple constante; la proposition importante aussi,
» que le nombre des racines qui annulent la fonction est toujours pré-
» cisément égal au nombre des infinis de cette fonction, et que, de
» plus, les sommes des valeurs de la variable, relatives à ces deux
» circonstances d'une fonction nulle ou infinie, sont toujours égales
» entre elles aux multiples près des périodes; l'expression des fonc-
» tions à n infinis par des sommes ou par des produits de fonctions
» à deux infinis; la théorie détaillée des fonctions à deux infinis et
» leur réduction aux fonctions elliptiques, qui sont dès lors l'élément
» unique des fonctions doublement périodiques à un nombre d'infinis
» limité; les théorèmes sur l'addition et sur la transformation directe
» ou inverse, rendus pour ainsi dire aussi simples que le problème
» d'algèbre de former une fraction rationnelle dont le numérateur et
» le dénominateur s'évanouissent pour des valeurs données : tout
» cela, c'est-à-dire la partie essentielle de mon travail, est dans le
» manuscrit de M. Borchardt, que je communiquerai dans quelques
» instants à l'Académie. »

» M. Liouville a, en effet, avant la fin de la séance, déposé sur le bureau le manuscrit de M. Borchardt. Nous transcrivons la table des matières que M. Borchardt a placée en tête.

» PREMIÈRE PARTIE. — *Théorie générale.*

» **1**. Une fonction doublement périodique qui ne devient jamais infinie est impossible.

» **2**. Une fonction doublement périodique et à un seul infini est impossible.

» **3**. Fonctions doublement périodiques et à deux infinis. Leurs propriétés fondamentales.

» **4**. Fonctions doublement périodiques et à plusieurs infinis. Leur développement en sommes et en produits de fonctions doublement périodiques et à deux infinis.

» **5**. Leur développement en produits de fonctions périodiques et à trois infinis, lorsque le nombre des infinis est pair.

» **6**. Leur développement en fractions de la forme $\frac{M + N\varphi'(z)}{L}$, $\varphi(z)$ représentant une fonction doublement périodique et à deux infinis, $\varphi'(z)$ son coefficient différentiel, et L, M, N des fonctions entières de $\varphi(z)$.

» SECONDE PARTIE. — *Applications.*

» **7**. Détermination du coefficient différentiel des fonctions doublement périodiques et à deux infinis. Théorème de l'addition pour les mêmes fonctions. Cas particulier du sin am z.

» **8**. Transformation du sin am z. Expressions en forme d'une somme et d'un produit.

» **9**. Transformation inverse du sin am z. Formule d'Abel. Formule de M. Jacobi. »

Disons maintenant que M. Cauchy, en faisant imprimer son Rapport, y a joint (au bas de la page 450) une note où l'antériorité de mes recherches est reconnue. Cette note est relative à la phrase que voici :

« Par suite aussi, l'on peut réduire à une fonction rationnelle de

» fonctions elliptiques, toute fonction doublement périodique qui » reste continue avec sa dérivée, tant qu'elle ne devient pas infi- » nie. »

Elle est ainsi conçue :

« Déjà en 1844, M. Liouville avait obtenu, par une méthode très- » différente de celle qu'a suivie M. Hermite, et avait énoncé, en pré- » sence de ce dernier, la réduction ici indiquée. »

On conviendra sans doute que ce théorème méritait d'être réclamé : je remercie M. Cauchy de me l'avoir rendu.

Quoique j'aie différé jusqu'ici de livrer à l'impression l'ouvrage que j'ai écrit sur la théorie des fonctions elliptiques, les parties principales de ma méthode sont aujourd'hui bien connues, soit par la rédaction (qui s'est répandue) de M. Borchardt, soit par les leçons que j'ai faites sur ce sujet au Collége de France dans le second semestre de l'année scolaire 1850-1851. MM. Briot et Bouquet, par exemple, se sont appuyés sur mes principes et m'ont fait l'honneur de me citer dans un beau Mémoire qu'ils ont présenté dernièrement à l'Académie.

J'ai dit que le travail de M. Borchardt avait été mis sous les yeux de Jacobi. Au risque d'être accusé de vanité, je citerai la phrase suivante d'une lettre que M. Borchardt m'a adressée le 28 septembre 1848 :

« M. Jacobi m'écrit que c'est avec le plus grand plaisir qu'il a lu » votre théorie et qu'il en a puisé beaucoup d'instruction pour lui- » même, qu'il souhaite vivement de la voir publier bientôt et qu'alors » il se propose de vous écrire. »

Il y a là du moins un témoignage de bienveillance et d'amitié que je suis heureux d'avoir obtenu.