JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note à l'occasion du Mémoire précédent

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 201-202.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__201_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Note à l'occasion du Mémoire précédent;

Par M. J. LIOUVILLE.

Le Mémoire de M. Edmond Bour, qui précède, est un extrait substantiel du remarquable travail que ce jeune ingénieur a présenté à l'Académie des Sciences le 5 mars 1855, et sur lequel nous avons (M. Lamé, M. Chasles et moi) fait un Rapport qu'on a inséré dans le cahier d'avril du présent volume. Les géomètres nous sauront gré de leur avoir communiqué de suite, au moins dans leur partie principale, ces importantes recherches; ils ratifieront, j'en suis assuré, tous nos éloges.

M. Bour a profité de la remarque que nous avions faite relativement à la fonction H qui entre dans son système d'équations

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dp_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{dp_n}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq_n}, \quad \frac{dq_n}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dp_n}.$$

Ayant d'abord en vue les équations de la Dynamique dans le cas où le principe des forces vives a lieu, M. Bour supposait la fonction H indépendante du temps. Pour lui H était une fonction quelconque de $p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$, où t n'entrait pas. Il a reconnu depuis que, comme nous le lui avions dit, ses calculs subsistent et gagnent encore en élégance lorsqu'on prend H fonction quelconque de $t, p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$.

Au reste, ce cas général peut toujours être ramené au cas particulier où M. Bour se renfermait d'abord, pourvu qu'on augmente de deux unités le nombre des équations en introduisant deux variables nouvelles τ et u : la première τ est supposée égale à t + constante, en sorte que l'on a

$$\frac{dt}{d\tau} = 1;$$

l'autre u est définie par l'équation

$$\frac{du}{d\tau} = -\frac{dH}{dt}.$$

Soit, en effet,

$$V = H + u.$$

Comme τ et u n'entrent pas dans H, qui est une fonction de $t, p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$ seulement, on a

$$\frac{dV}{du} = 1 = \frac{dt}{d\tau}.$$

D'ailleurs les dérivées de H et celles de V, par rapport à $t, p_1, q_1, \ldots, p_n, q_n$, sont égales. On peut donc poser ce système

$$\begin{array}{ll} \dfrac{dt}{d\tau} = \dfrac{dV}{du}, & \dfrac{du}{d\tau} = -\dfrac{dV}{dt}, \\ \dfrac{dp_1}{d\tau} = \dfrac{dV}{dq_1}, & \dfrac{dq_1}{d\tau} = -\dfrac{dV}{dp_1}, \\ \cdots & \cdots \\ \dfrac{dp_n}{d\tau} = \dfrac{dV}{dq_n}, & \dfrac{dq_n}{d\tau} = -\dfrac{dV}{dp_n}, \end{array}$$

entièrement semblable à celui de M. Bour, puisque τ (qui est ici la variable indépendante et qui remplace le temps) n'entre pas dans la fonction V qui sert à former les seconds membres.