JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

QUET

Nouvelle théorie des tuyaux sonores

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 1-35.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__1_0>

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

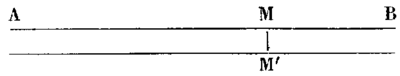
NOUVELLE THÉORIE DES TUYAUX SONORES;

PAR M. QUET,
Recteur de l'Académie de Besançon.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 7 août 1854.)

Avant Daniel Bernoulli, pour expliquer les phénomènes très-variés des instruments à vent, on n'avait qu'une vague comparaison due à Galilée et la belle expérience de Sauveur que Newton immortalisa. Bernoulli, le premier, dévoila la cause de la multitude de sons que l'on peut tirer d'un même tuyau; il eut, en effet, l'heureuse idée de regarder la colonne aérienne comme capable de se subdiviser en un nombre plus ou moins grand de concamérations, et il vérifia par expérience cette conception fondamentale. Il esquissa, en outre, une théorie mathématique des phénomènes; mais cette théorie, même perfectionnée par Euler, et surtout par Lagrange, n'embrasse pas tous les faits connus et se trouve incomplète. En se plaçant à un point de vue nouveau, Poisson, qui avait à un si haut degré l'instinct de la physique mathématique, donna une nouvelle extension à la théorie des tuyaux sonores; son travail est resté comme la dernière expression du progrès dans ce genre de recherches très-délicates, et, aujourd'hui encore, il est invoqué par les physiciens. Après les brillants travaux des physiciens géomètres que j'ai cités, il y a peut-être quelque témérité à se hasarder dans la carière; aussi ai-je longtemps hésité. Pourtant, la théorie de Poisson ne me paraît pas exempte de graves difficultés dans ses principes et ses conséquences; je demande donc à l'Académie la permission de lui présenter le peu que j'ai fait, en sollicitant toutefois son indulgence.

Fig. 1.



Poisson a représenté la vitesse et la condensation dans un tuyau ouvert par les formules suivantes :

$$v = \frac{h \cos 2\pi \dfrac{l-x}{\lambda} \sin \dfrac{2\pi at}{\lambda}}{\cos \dfrac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$s = \frac{h \sin 2\pi \dfrac{l-x}{\lambda} \cos \dfrac{2\pi at}{\lambda}}{a \cos \dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Ces équations supposent qu'à l'orifice A du tuyau AB la tranche aérienne reçoive une vitesse donnée et égale à

$$h \sin \frac{2\pi at}{\lambda}.$$

a est la vitesse du son dans l'air;

λ est la longueur d'ondulation complète qui correspond au nombre de vibrations exécutées par la tranche A en une seconde de temps;

l est la longueur du tuyau AB;

x est la distance AM d'une section normale quelconque MM' à l'orifice A;

v et s sont la vitesse et la condensation relatives à la section MM', à l'époque t.

Les formules précédentes montrent que la sonorité d'un tuyau ouvert est minimum pour les sons compris dans ce qu'on appelle la série normale des tuyaux ouverts, c'est-à-dire pour ceux qui correspondent à la série suivante :

$$\lambda = 2l, \quad \frac{2l}{2}, \quad \frac{2l}{3}, \quad \frac{2l}{4}, \ldots$$

La sonorité du tuyau doit augmenter de plus en plus à mesure que l'on s'éloigne de cette série, et atteindre son maximum lorsqu'on produit les sons de la série normale des bourdons, c'est-à-dire ceux de la série que voici :

$$\lambda = 4l, \quad \frac{4l}{3}, \quad \frac{4l}{5}, \quad \frac{4l}{7}, \ldots$$

L'expérience ne confirme pas ces résultats théoriques; en effet, les tuyaux ouverts résonnent très-bien lorsqu'on leur fait produire les sons de leur série normale ou ceux qui les avoisinent; ils résonnent médiocrement, ou pas du tout, pour les sons de la série normale des bourdons. Par des artifices particuliers, on peut, il est vrai, obtenir cette dernière série ; mais alors, par l'effet même de ces artifices, les tuyaux cessent d'être des tuyaux ouverts, et ne sont plus, à proprement parler, que des bourdons renversés.

Poisson s'est probablement préoccupé de cette difficulté assez grave que présente sa théorie, car il semble avoir cherché à y échapper par cette remarque. Dans les calculs, la vitesse de chaque tranche est supposée très-petite, et si l'expression finale de cette vitesse devient infinie pour la série normale des bourdons, on a là une contradiction algébrique qui désigne l'impossibilité des sons de cette série. Si l'on admettait ce mode d'interprétation, il resterait toujours une difficulté insurmontable, car les formules montrent qu'en s'approchant de plus en plus de la série normale des bourdons, on rend les tuyaux ouverts de plus en plus sonores, ce qui n'est pas conforme à l'expérience. Mais il est aisé de voir que la difficulté n'est pas seulement partielle, qu'elle est tout entière. Les formules indiquées ne sont pas celles que la théorie de Poisson fournit immédiatement, elles se déduisent par approximation de ces dernières : si, au lieu des formules tronquées, on prend les équations complètes, on trouve alors que la remarque de Poisson n'est plus applicable; car dans ces équations, la vitesse ne devient pas infinie pour les sons de la série normale des bourdons, et prend une valeur maximum finie.

Ces contradictions entre la théorie et l'expérience, contradictions qui se retrouvent tout naturellement dans le jeu des bourdons, doivent tenir aux principes mêmes de la théorie; examinons donc maintenant ces principes. Les calculs de Poisson reposent sur deux hypothèses principales qui sont relatives à l'état de l'air aux deux extrémités des tuyaux. A l'extrémité du tuyau qui est opposée à l'orifice, Bernoulli, et plus tard Lagrange, avaient admis que la vitesse de l'air y est nulle quand il s'agit des bourdons, et que la condensation y est nulle quand il s'agit des tuyaux ouverts. Poisson a fait voir, par des raisons qui me paraissent péremptoires, que ces hypothèses sont trop absolues et ne peuvent représenter que par approximation la vérité; il leur a alors substitué une hypothèse plus générale, la plus simple, au reste, qu'on puisse imaginer : il a supposé qu'il s'établit dans cette région des tuyaux un rapport constant entre la vitesse et la condensation; ce rapport est positif afin qu'il y ait condensation ou dilatation, selon que le fluide est poussé en dehors ou en dedans du tube; il est d'ailleurs très-petit dans les bourdons et très-considérable dans les tuyaux ouverts. Sans doute, au lieu de faire une hypothèse sur le rapport dont je viens de parler, il vaudrait mieux le déterminer par la théorie; mais le problème est très-difficile, personne n'a essayé de le résoudre; et, en attendant, on est bien obligé d'avoir recours à une hypothèse. Celle de Poisson est la plus simple; à mon avis, elle est parfaitement admissible : lorsque l'on cherche à lui donner l'interprétation physique dont elle est susceptible, on voit aisément qu'il n'y a rien de mieux à faire jusqu'ici. Ce n'est donc pas dans la manière dont Poisson envisage l'état de l'air au bout du tuyau opposé à l'orifice qu'on peut trouver la raison des contradictions que j'ai signalées. Voyons, maintenant, comment il envisage l'état de l'air à l'orifice même; Poisson se donne tout simplement la vitesse de l'air dans cette région du tube, comme si elle était indépendante du mouvement antérieur dans le tuyau. Lorsqu'il s'agit d'un problème purement abstrait, on peut choisir des données arbitraires qui ne se contredisent pas; mais dans un problème de physique, on est obligé d'accepter les choses comme elles sont, et on ne peut se donner ce qui est inconnu en réalité. Dans le cas des tuyaux sonores, il est aisé de voir, au moins à ce qu'il me semble, que l'hypothèse de Poisson n'est pas acceptable. Pour le montrer, prenons un exemple particulier, qu'il sera ensuite facile de généraliser; supposons que l'on excite dans l'air libre, qui précède le tube, une série d'ondes planes, perpendiculaires au tuyau, se propageant vers son orifice, et entretenant le mouvement vibratoire de la mince lame qui se trouve dans cette partie du tube. A chaque instant, le mouvement qui arrive communique à la tranche aérienne une vitesse et une condensation déterminées que l'on peut supposer connues ou données; mais cette vitesse et cette condensation ne constituent pas toute la vitesse et toute la condensation de la tranche; sans elles, la tranche aurait une vitesse et une condensation inconnues qui dépendent de tout le mouvement antérieur établi dans le tube; la vitesse totale à l'orifice se compose donc à chaque instant de deux parties, l'une qui est une vitesse communiquée et donnée, l'autre qui est une vitesse résultant de l'état antérieur; il en est de même pour la condensation. Ce que je viens de dire pour le mode particulier d'ébranlement que j'ai supposé, est évidemment général. Si ces considérations sont exactes, elles nous montrent, dans les principes mêmes de la théorie de Poisson, la raison des contradictions signalées entre les résultats des formules et de l'expérience.

Maintenant, je vais essayer de donner une nouvelle théorie qui me paraît plus conforme à l'expérience; j'indiquerai, en premier lieu, les restrictions qui en limitent les applications et les hypothèses sur lesquelles elle est fondée.

Je suppose d'abord que, dans une section droite quelconque du tube, la vitesse est à chaque instant la même pour tous les points de cette section. Je ne veux pas affirmer par là que les vibrations dans les tuyaux ont généralement ce caractère; j'indique seulement que je ne m'occuperai que des phénomènes dans lesquels ces conditions sont remplies. Il est bien évident qu'une personne placée dans un tunnel et projetant sa voix contre la paroi de ce genre de tube ne produira pas des vibrations parallèles à l'axe; il y a plus : dans les tubes étroits et courts, tels que les tuyaux d'orgue, ces conditions peuvent quelquefois ne pas être satisfaites; je m'en suis assuré de la manière suivante. J'ai fermé, avec une membrane mince et tendue, l'ouverture supérieure d'un tuyau d'orgue vertical; j'ai mis du sable sur la membrane, et puis j'ai fait résonner le tuyau. En faisant varier convenablement le son produit, j'ai obtenu sur la membrane des lignes nodales, composées tantôt de droites, tantôt de courbes ovales et fermées, ou même de courbes plus compliquées. Ces lignes nodales indiquaient évidemment qu'au-dessous de la membrane, dans le tube, l'air avait des nœuds correspondants, et que, par suite, les particules d'une même section normale au tuyau n'avaient pas la même vitesse. Les sons que j'ai pu tirer de ces bourdons d'une nouvelle espèce étaient souvent remarquables par l'éclat de leur timbre, et m'auraient inspiré le désir d'utiliser leurs effets curieux, si la fragilité et l'inconstance de ces sortes d'appareils n'étaient pas des obstacles à leur application.

Lorsqu'on passe un archet sur le bord d'un cylindre vertical qui contient de l'eau, on détermine, comme on sait, à la surface du liquide une série de rides qui indiquent des lignes nodales perpendiculaires à la surface du vase. En superposant de l'eau sur du mercure et en reproduisant cette expérience, j'ai reconnu facilement que les lignes nodales à la surface de l'eau et à la surface de séparation des deux liquides sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la surface du cylindre. En variant ces sortes d'expériences, on est tout naturellement porté à conclure que, lorsque le cylindre vibre plein d'air, il doit s'établir dans cet air des surfaces nodales qui passent par l'axe du cylindre et sont perpendiculaires à sa surface. On trouve donc encore ici un cas où les vibrations ne remplissent pas les conditions dans lesquelles je renferme la théorie. L'expérience des liquides superposés me paraît donner, par ses lignes nodales visibles, une image de ce qui se passe probablement dans la masse d'air d'une cloche frappée par le marteau; s'il en est ainsi, la puissance renforçante de l'air contenu dans les cloches doit être assez difficile à déterminer par l'analyse.

Par ces divers exemples, on voit que le problème que je veux traiter n'est pas le problème général des vibrations qui peuvent s'établir dans un tuyau : il s'agit ici d'un problème particulier, posé avec des conditions bien déterminées et dont les résultats ne pourront être comparés aux expériences, qu'autant que ces expériences s'exécuteront dans les mêmes conditions; cependant il nous donnera des notions générales qui seront utiles pour interpréter la plupart des expériences ordinaires que l'on fait avec les tuyaux d'orgue.

Je vais maintenant tirer les principales conséquences qui se déduisent de la supposition que j'ai faite.

Je désigne par D, e, γ, γ' la densité de l'air, sa force élastique, sa chaleur spécifique à pression constante et sa chaleur spécifique à volume constant, lorsque dans le tuyau l'air est dans son état naturel d'équilibre.

Je pose

$$a^2 = \frac{\gamma}{\gamma'} \cdot \frac{e}{D};$$

a jouit, comme on sait, d'une signification physique : cette quantité est égale à la vitesse de propagation du son dans l'air considéré.

Je désigne par x la distance d'une section quelconque MM' à l'orifice A du tuyau, par v la vitesse et par s la condensation de l'air dans cette section à l'époque t. x et v sont comptés positivement dans le sens de A vers B; s est positif ou négatif, suivant qu'il y a dans l'air condensation ou dilatation.

De quelque manière que le mouvement de l'air ait été primitivement produit et se trouve entretenu, pourvu que la restriction dont j'ai déjà parlé ait lieu, les quantités v et s seront deux fonctions de x et t que l'on peut déduire d'une troisième fonction φ satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2}.$$

Cette fonction a pour forme générale

$$\varphi = f_1(x + at) + F_1(x - at),$$

f_1 et F_1 désignant deux fonctions arbitraires qu'il faudra déterminer par les conditions ultérieures du problème.

Les valeurs de v et s se déduisent de la fonction φ par les équations suivantes :

$$v = \frac{d\varphi}{dx}, \quad s = -\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Je désigne par $f(u)$, $F(u)$ les dérivées par rapport à u des fonctions $f_1(u)$, $F_1(u)$, et j'ai pour les valeurs de v et s,

$$v = f(x+at) + F(x-at), \tag{1}$$

$$as = -f(x+at) + F(x-at). \tag{2}$$

La seconde hypothèse que je ferai se rapporte à l'état de l'air à l'extrémité du tuyau opposée à l'orifice A; elle est la même que celle de Poisson. J'admets donc qu'en B il s'établit un rapport constant entre la vitesse et la condensation, et je représenterai ce rapport par

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{k},$$

k étant une constante. Ce rapport sera positif, afin qu'il y ait en B condensation ou dilatation, selon que l'air est poussé en dehors ou en dedans du tube; il sera très-petit ou très-grand, suivant que le tuyau sera fermé en B par un obstacle solide, ou s'ouvrira dans l'air libre. Cette hypothèse est certainement ce qu'il y a de plus simple à faire, en l'absence d'une théorie exacte; cependant, comme elle a quelque chose d'abstrait en elle-même, je vais chercher à montrer, par une interprétation physique, qu'elle est tout à fait naturelle et très-probable. A cet effet, je suppose que le tuyau est indéfiniment prolongé du côté de A, afin de faire abstraction des réflexions qui pourraient s'opérer à l'orifice, et je considère une onde quelconque complétement établie dans le tube et se dirigeant vers B. Au moment où elle atteint l'extrémité B, les vitesses sont distribuées dans le tube suivant une loi quelconque; je désigne par $\psi(x)$ la vitesse que possède alors la tranche MM'. La condensation n'est pas arbitraire dans les ondes complétement constituées; on sait qu'elle est une fraction de la vitesse $\psi(x)$ exprimée par $\frac{1}{a}\psi(x)$. Cela posé, admettons que l'extrémité B soit un obstacle parfaitement fixe; alors il s'opère sur B une réflexion dont les lois sont parfaitement connues : les vitesses incidentes engendrent par réflexion des vitesses négatives ou positives, suivant qu'elles sont elles-mêmes positives ou négatives; les condensations engendrent des condensations, et les dilatations donnent des dilatations. A l'époque $t + t'$, la vitesse et la condensation en MM' seraient, en vertu de l'onde incidente,

$$\psi(x - at'),\quad \frac{1}{a}\psi(x - at');$$

par la réflexion, cette vitesse et cette condensation seraient, d'après la loi connue,

$$-\psi(2l - x - at'),\quad \frac{1}{a}\psi(2l - x - at').$$

On aurait donc

$$v = \psi(x - at') - \psi(2l - x - at'),$$
$$s = \frac{1}{a}\psi(x - at') + \frac{1}{a}\psi(2l - x - at').$$

Le rapport $\frac{v}{s}$ serait donc, en général, variable; cependant, à l'extrémité B, où l'on a

$$x = l,$$

ce rapport deviendrait nul, et, par suite, serait constant. Dans la pratique, les fonds des bourdons ne forment pas des obstacles absolument fixes, ils peuvent même se trouver doués d'une grande mobilité quand ils sont donnés par des membranes très-minces; les ondes réfléchies ne peuvent donc plus avoir rigoureusement la même vitesse et la même condensation que les ondes incidentes, abstraction faite du signe, et la réflexion n'a plus pour seul effet de retourner, pour ainsi dire, les ondes incidentes. On admet généralement et il est naturel de supposer qu'après la réflexion, l'onde réfléchie est reconstituée sur le même patron qu'avant la réflexion; le retournement de l'onde incidente est encore opéré, les condensations et les dilatations donnent lieu encore à des condensations et des dilatations; seulement les vitesses et les condensations sont toutes réduites dans un rapport constant dont la valeur dépend de la manière dont le fond des bourdons peut vibrer lui-même. En d'autres termes, on admet que l'onde réfléchie, au lieu de fournir à la tranche MM' la vitesse et la condensation données par

$$-\psi(2l - x - at'),\quad \frac{1}{a}\psi(2l - x - at'),$$

y apporte cette vitesse et cette condensation réduites dans un rapport constant, et, par suite, exprimées par

$$-b\psi(2l-x-at'),\quad \frac{b}{a}\psi(2l-x-at'),$$

b étant une fraction positive.

En admettant ces hypothèses très-naturelles, qui, au reste, ne m'appartiennent pas, on aura, pour la tranche MM',

$$v=\psi(x-at')-b\psi(2l-x-at'),$$
$$s=\frac{1}{a}\psi(x-at')+\frac{b}{a}\psi(2l-x-at');$$

le rapport de v à s est généralement variable; mais, quelles que soient la nature de la fonction ψ et l'époque $t+t'$, on a pour la section B,

$$\frac{v}{s}=\frac{1-b}{1+b}a;$$

il s'établit donc un rapport constant entre la vitesse et la condensation sur le fond B, et l'on voit que ce rapport est positif et égal à une fraction de a.

Le tuyau peut être ouvert en B et communiquer librement avec l'atmosphère. Dans ce cas, les ondes qui atteignent B ne sortent pas du tuyau sans éprouver une réflexion; sans cela il serait difficile de concevoir comment un tuyau ouvert peut devenir capable de renforcer les sons. Cette réflexion des ondes sur l'air libre serait intéressante à constater par l'expérience, et je me propose de le faire aussitôt que j'en aurai l'occasion; toutefois, personne ne la regarde comme douteuse, et l'on admet qu'en B il se fait un partage, qu'une partie du mouvement incident se transmet au dehors et qu'une autre partie se réfléchit. Je ferai maintenant remarquer que l'onde réfléchie n'a pas ici tout à fait le même caractère de simplicité que lorsque le fond B est un obstacle solide; on admet que toute onde condensée incidente produit par la réflexion une onde dilatée dans laquelle les dilatations se succèdent de la même manière que les condensations dans l'onde incidente, mais avec des valeurs absolues réduites toutes dans la même proportion; toute onde dilatée engendre de la même manière une onde condensée formée sur le même patron. Quant aux vitesses, elles ne changent pas de signe par la réflexion, elles se trouvent seulement réduites dans un même rapport. En général, il y a deux sortes de réflexions; on applique la première sorte au cas des bourdons, et la deuxième au cas des tuyaux ouverts. Si l'on veut exprimer par des formules les idées généralement reçues, on écrira qu'au lieu de la vitesse et de la condensation fournies par un obstacle fixe à la tranche MM', savoir,

$$-\psi(2l-x-at'),\quad \frac{1}{a}\psi(2l-x-at'),$$

on aura la vitesse et la condensation exprimées par les formules suivantes :

$$b'\psi(2l-x-at'),\quad -\frac{b'}{a}\psi(2l-x-at'),$$

b' étant une fraction positive. En partant de ces principes, la vitesse totale et la condensation en MM' sont :

$$v=\psi(x-at')+b'\psi(2l-x-at'),$$
$$s=\frac{1}{a}\psi(x-at')-\frac{b'}{a}\psi(2l-x-at').$$

Le rapport $\frac{v}{s}$ est encore ici généralement variable; cependant en B, pour

$$x=l,$$

la valeur de ce rapport devient

$$\frac{1+b'}{1-b'}a,$$

c'est-à-dire qu'il y est constant, positif et plus grand que a.

Les deux cas du bourdon et du tuyau ouvert en B peuvent se confondre en un seul, car il suffit de regarder la quantité b qui entre dans le rapport

$$\frac{1-b}{1+b}a$$

comme positive pour les bourdons, et comme négative pour les tuyaux ouverts en B.

Il résulte de ce qui vient d'être dit, que les hypothèses les plus naturelles et les plus probables que l'on puisse faire sur le mode de réflexion des ondes, nous conduisent à cette conséquence, qu'à l'extrémité B il doit s'établir un rapport constant entre la vitesse et la condensation. Réciproquement, en posant en principe, comme le fait Poisson, la constance de ce rapport, il est facile de voir que, dans le cas d'une réflexion, sans mélange d'autres réflexions, cette hypothèse conduit aux caractères généraux des ondes réfléchies tels qu'on les admet généralement.

Ainsi, nous regarderons l'hypothèse de Poisson sur l'état de l'air en B, non-seulement comme très-simple, mais, en outre, comme naturelle et très-probable, et nous l'admettrons pleinement dans notre théorie.

Je considère maintenant la troisième hypothèse, celle qui est relative à l'état de l'air à l'orifice A. Je suppose que l'on communique artificiellement à l'air de la section A une vitesse et une condensation exprimées par les fonctions quelconques $\psi(t)$ et $\frac{1}{a}\chi(t)$, cette vitesse et cette condensation ne sont pas la vitesse totale v et la condensation totale s de l'air à l'orifice; si, à l'époque t, on cessait d'agir sur cet air, la tranche en A aurait néanmoins une vitesse v' et une condensation s', provenant du mouvement antérieurement établi dans le tuyau, en sorte qu'en réalité, on a

$$v = v' + \psi(t), \quad s = s' + \frac{1}{a}\chi(t).$$

Or la vitesse v' et la condensation s' doivent être soumises à des conditions analogues à celles qui ont lieu à l'extrémité B; j'admettrai donc encore ici qu'il s'établit un rapport constant entre les parties v' et s' de la vitesse et de la condensation totale; je désignerai par $-\frac{a}{k'}$ ce rapport, et j'aurai

$$\frac{v'}{s'} = -\frac{a}{k'},$$

k' est ici une quantité positive, pour que le rapport $\frac{v'}{s'}$ soit négatif. Ce signe provient de ce que, en A, il doit y avoir condensation ou dilatation, suivant que la tranche aérienne tend à sortir ou à entrer dans le tuyau, c'est-à-dire suivant que sa vitesse v' est négative ou positive. Cette hypothèse peut se justifier de la même manière que pour l'extrémité B; en effet, une onde qui arrive de B vers A, au moment où elle atteint l'orifice A, a sa vitesse et sa condensation exprimées par les formules

$$\mu(x), \quad -\frac{1}{a}\mu(x),$$

μ étant une fonction quelconque; l'onde est supposée complétement constituée et établie dans un tuyau indéfini du côté de B, afin de n'avoir pas égard aux réflexions qui pourraient s'opérer en B. Dans une pareille onde, qui se propage de B vers A, les condensations et les dilatations ont lieu, comme on le sait, suivant que la vitesse de la tranche est dans le sens de la propagation ou en sens contraire, c'est-à-dire suivant que $\mu(x)$ est négatif ou positif : c'est pour cela qu'on a mis le signe $-$ devant l'expression de la condensation ; d'ailleurs la vitesse et la condensation doivent avoir un rapport égal à $\frac{1}{a}$, abstraction faite du signe. Après le temps $t+t'$, la tranche MM' reçoit par le mouvement incident la vitesse et la condensation données par

$$\mu(x+at'), \quad -\frac{1}{a}\mu(x+at').$$

Si l'obstacle en A était parfaitement fixe, l'onde réfléchie apporterait en MM', à l'époque $t+t'$, la vitesse et la condensation exprimées par

$$-\mu(at'-x), \quad -\frac{1}{a}\mu(at'-x).$$

Mais, à cause du défaut de fixité de l'obstacle, cette vitesse et cette condensation se trouvent réduites dans un rapport constant c, et sont

$$-c\mu(at'-x), \quad -\frac{c}{a}\mu(at'-x),$$

c étant positif ou négatif, suivant que le tuyau est fermé en A par un corps solide ou s'ouvre librement dans l'atmosphère. La vitesse et la condensation complètes de la tranche MM′ sont donc

$$\mu(x + at') - c\mu(at' - x),$$
$$-\frac{1}{a}\mu(x + at') - \frac{c}{a}\mu(at' - x).$$

Le rapport de ces deux quantités est, en général, variable, mais en A, où l'on a

$$x = 0,$$

ce rapport devient

$$-\frac{1-c}{1+c}a,$$

et la quantité c étant positive ou négative, mais en grandeur absolue plus petite que l'unité, ce rapport est toujours négatif. D'ailleurs, sa valeur absolue est plus petite ou plus grande que a, suivant que le tuyau est fermé en A ou s'ouvre librement dans l'air. Ainsi la considération des ondes incidentes et réfléchies nous amène à ce résultat, qu'il s'établit en A un rapport constant et négatif entre la vitesse et la condensation; réciproquement, si ce rapport constant est admis, il en résultera par la constitution des ondes réfléchies les propriétés qui sont généralement acceptées et que j'ai indiquées. La troisième hypothèse de ma théorie n'est donc pas nouvelle, car elle ne fait avec la deuxième hypothèse qu'une seule et même supposition.

Ces préliminaires étant posés, je remarque qu'en vertu de la première hypothèse les valeurs de v et s pour la tranche quelconque MM′ doivent être de la forme indiquée par les équations (1), (2). En vertu de la deuxième hypothèse, on doit avoir, quel que soit t, mais pour $x = l$, la relation

$$\frac{v}{as} = \frac{1}{k}. \tag{3}$$

En vertu de la troisième hypothèse, on doit avoir, quel que soit t, mais pour $x = 0$, la relation

$$\frac{v - \psi(t)}{as - \chi(t)} = -\frac{1}{k'}. \tag{4}$$

Enfin, l'état initial de l'air dans le tuyau peut être quelconque, et je le représente par

$$(5) \qquad v = \mu(x),$$

$$(6) \qquad as = \lambda(x),$$

équations qui doivent être satisfaites pour $t = 0$, quelle que soit la valeur de x comprise entre o et l; les fonctions $\mu(x)$ et $\lambda(x)$ sont supposées données dans cette étendue. On peut remarquer que ces fonctions, quoique arbitraires, doivent satisfaire à

$$\frac{\mu(l)}{\lambda(l)} = \frac{1}{k},$$

et à

$$\frac{\mu(0) - \psi(0)}{\lambda(0) - \chi(0)} = \frac{1}{k'};$$

le problème consiste maintenant à déterminer les valeurs générales de v et s, de manière à satisfaire aux équations (1), (2), (3), (4), (5), (6).

Je porte les valeurs de v, s des équations (1), (2) dans l'équation (3), et j'ai

$$(k+1)f(l+at) = (1-k)\,F(l-at).$$

Je pose

$$(7) \qquad b = \frac{k-1}{k+1},$$

b sera positif lorsque B sera un fond solide, et négatif lorsque B communiquera avec l'air libre. L'équation précédente devient

$$(8) \qquad f(l+at) = -\,b\,F(l-at).$$

Cette équation doit être satisfaite pour toutes les valeurs positives de t; comme $at + l - x$ est positif, je peux substituer cette quantité au lieu de at dans l'équation (8), et j'ai

$$f(2l - x + at) = -\,b\,F(x - at).$$

En éliminant $F(x - at)$ entre cette équation et les équations (1) et (2), j'ai

$$(9) \qquad v = f(x+at) - \frac{1}{b} f(2l - x + at),$$

$$(10) \qquad as = -f(x+at) - \frac{1}{b} f(2l - x + at).$$

Je fais $t = 0$ dans ces expressions, et je les porte dans les équations (5) et (6); j'ai ainsi

$$\mu(x) = f(x) - \frac{1}{b} f(2l - x),$$

$$\lambda(x) = -f(x) - \frac{1}{b} f(2l - x),$$

d'où l'on tire

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\mu(x) - \frac{1}{2}\chi(x), \\ f(2l - x) &= -\frac{b}{2}\mu(x) - \frac{b}{2}\lambda(x). \end{aligned} \right.$$

Ces équations doivent être satisfaites pour toutes les valeurs de x entre 0 et l; elles donnent donc les valeurs de la fonction $f(z)$ pour toutes les valeurs de z, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 2l$.

Je porte les valeurs de v et s données par les équations (9), (10) dans l'équation (4), et j'ai

$$f(2l + at) = b\frac{k' - 1}{k' + 1} f(at) - \frac{bk'}{k' + 1}\psi(t) - \frac{b}{k' + 1}\chi(t).$$

Je pose

$$(12) \qquad c = \frac{k' - 1}{k' + 1},$$

$$(13) \qquad \chi(t) = \psi(t) + \psi_1(t), \quad r = \frac{b}{k' + 1};$$

la quantité c sera positive ou négative, suivant que A sera un obstacle solide ou communiquera librement avec l'air.

L'équation précédente devient

$$f(2l + at) = bcf(at) - b\psi(t) - r\psi_1(t).$$

t' étant positif et quelconque, je peux substituer t' à t dans cette équation. Je pose, d'ailleurs,

$$at' = 2il + z,$$

i étant un nombre entier qui indique combien de fois $2l$ est contenu dans at', r étant le reste qui est compris entre 0 et $2l$; l'équation précédente me donne ainsi

$$f[2(i+1)l+z] = bcf(2il+z) - b\psi\left(\frac{2il+z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{2il+z}{a}\right).$$

t' étant quelconque, rien n'empêche d'appliquer cette équation à toutes les valeurs de t' qui correspondent à une même valeur de z et aux différents nombres entiers compris depuis i jusqu'à o; on obtient alors la suite d'équations que voici :

$$f[2(i+1)l+z] = bcf(2il+z) - b\psi\left(\frac{2il+z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{2il+z}{a}\right),$$

$$f(2il+z) = bcf[2(i-1)l+z] - b\psi\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right] - r\psi_1\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right],$$

$$f[2(i-1)l+z] = bcf[2(i-2)l+z] - b\psi\left[\frac{2(i-2)l+z}{a}\right] - r\psi_1\left[\frac{2(i-2)l+z}{a}\right],$$

. . . .

$$f(4l+z) = bcf(2l+z) - b\psi\left(\frac{2l+z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{2l+z}{a}\right),$$

$$f(2l+z) = bcf(z) - b\psi\left(\frac{z}{a}\right) - r\psi_1\left(\frac{z}{a}\right).$$

Je multiplie ces $i+1$ équations respectivement par 1, bc, b^2c^2, $b^3c^3,\ldots,(bc)^{i-1}$, $(bc)^i$, puis je les ajoute, et j'ai

$$\begin{aligned} f[2(i+1)l+z] &= (bc)^{i+1}f(z) \\ &- b\left\{\begin{aligned} &\psi\left(\frac{2il+z}{a}\right) + bc\psi\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right]+\ldots \\ &+(bc)^{i-1}\psi\left(\frac{2l+z}{a}\right) + (bc)^i\psi\left(\frac{z}{a}\right)\end{aligned}\right\} \\ &- r\left\{\begin{aligned} &\psi_1\left(\frac{2il+z}{a}\right) + bc\psi_1\left[\frac{2(i-1)l+z}{a}\right]+\ldots \\ &+(bc)^{i-1}\psi_1\left(\frac{2l+z}{a}\right) + (bc)^i\psi_1\left(\frac{z}{a}\right)\end{aligned}\right\}.\end{aligned}$$

Je remets at' à la place de $2il+z$, et j'ai

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&f(2l+at') = (bc)^{i+1} f(z)\\
&-b\left\{\begin{aligned}&\psi(t') + bc\,\psi\left(t'-\frac{2l}{a}\right)+\ldots\\ &+(bc)^{i-1}\psi\left(t'-\frac{2(i-1)l}{a}\right)+(bc)^i\psi\left(t'-\frac{2il}{a}\right)\end{aligned}\right\}\\
&-r\left\{\begin{aligned}&\psi_1(t') + bc\,\psi_1\left(t'-\frac{2l}{a}\right)+\ldots\\ &+(bc)^{i-1}\psi_1\left(t'-\frac{2(i-1)l}{a}\right)+(bc)^i\psi_1\left(t'-\frac{2il}{a}\right)\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Dans cette équation, z étant compris entre 0 et $2l$, $f(z)$ sera une quantité connue d'après l'état initial, comme on l'a déjà vu. Au reste, b et c sont des fractions; abstraction faite du signe, $(bc)^{i+1}$ sera une fraction très-petite et le terme $(bc)^{i+1}f(z)$ sera négligeable lorsqu'on prendra pour i un nombre un peu considérable. Comme $(bc)^{i+1}f(z)$ est le seul terme qui dépende de l'état initial, on voit que $f(2l+at')$ sera sensiblement indépendant de cet état lorsque i sera assez grand.

Je pose maintenant

$$at' = at - x.$$

Lorsque t et x sont donnés, en divisant $at-x$ par $2l$, on aura un quotient entier et un reste; le quotient fournira le nombre i, et le reste la quantité z. En faisant cette substitution dans l'équation précédente, on a

$$
(15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&f(2l-x+at) = (bc)^{i+1} f(z)\\
&-b\left\{\begin{aligned}&\psi\left(t-\frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{2l+x}{a}\right)\\ &+b^2c^2\psi\left(t-\frac{4l+x}{a}\right)+\ldots+(bc)^i\psi\left(t-\frac{2il+x}{a}\right)\end{aligned}\right\}\\
&-r\left\{\begin{aligned}&\psi_1\left(t-\frac{x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t-\frac{2l+x}{a}\right)\\ &+b^2c^2\psi_1\left(t-\frac{4l+x}{a}\right)+\ldots+b^ic^i\psi_1\left(t-\frac{2il+x}{a}\right)\end{aligned}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Je pose dans l'équation (14),

$$at' = at - 2l + x.$$

x et t étant les mêmes quantités que dans l'équation (15), en divisant $at - 2l + x$ par $2l$, on aura un quotient entier et un reste. Je désigne par j le quotient et par y le reste. On a ainsi

$$at - x = 2il + z, \quad at - 2l + x = 2jl + y,$$

d'où

$$j = i - 1 + \frac{x}{l} + \frac{z - y}{2l}.$$

On voit par là que j sera égal à $i - 1$ ou à i, et qu'il sera égal à i, lorsque $x = l$, c'est-à-dire à l'extrémité B du tuyau. En portant la valeur précédente de at' dans l'équation (14), on a

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} f(x + at) = (bc)^{j+1} f(y) \\ - b \left\{ \begin{aligned} &\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right) \end{aligned} \right\} \\ - r \left\{ \begin{aligned} &\psi_1\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi_1\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right) \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Au moyen des valeurs (15), (16), les expressions de v et s données par les équations (9) et (10), deviennent

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} v = (bc)^{j+1} f(y) - b^i c^{i+1} f(z) \\ + \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) + b^2 c^2 \psi\left(t - \frac{4l + x}{a}\right) + \ldots \\ + b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il + x}{a}\right) \\ - b \left\{ \begin{aligned} &\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right) \end{aligned} \right\} \\ + \frac{r}{b} \left\{ \begin{aligned} &\psi_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il + x}{a}\right) \end{aligned} \right\} \\ - r \left\{ \begin{aligned} &\psi_1\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \\ &+ b^j c^j \psi_1\left(t - \frac{2(j+1)l - x}{a}\right) \end{aligned} \right\}. \end{aligned} \right.$$

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
as = &- (bc)^{j+1} f(y) - b^i c^{i+1} f(z) \\
&+ \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{2l+x}{a}\right) + \ldots + b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il+x}{a}\right) \\
&+ b \left\{
\begin{aligned}
&\psi\left(t - \frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l-x}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^j c^j \psi\left(t - \frac{2(j+1)l-x}{a}\right)
\end{aligned}
\right\} \\
&+ \frac{r}{b} \left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{2l+x}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il+x}{a}\right)
\end{aligned}
\right\} \\
&+ r \left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l-x}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^j c^j \psi_1\left(t - \frac{2(j+1)l-x}{a}\right)
\end{aligned}
\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Lorsqu'on appliquera les équations (18), (17) au bout B, on y fera $j = i$, et au bout A, $j = i - 1$.

Il est facile de vérifier que les formules (17), (18) satisfont à toutes les conditions du problème, au moins lorsque t est plus grand que $2l - x$. Ces équations sont déduites de l'équation (14) où t' est essentiellement positif, ce qui suppose que $at - x$ et $at - 2l + x$, qu'on a substitués à at', tour à tour, soient aussi positifs. Je fais $x = l$ dans les formules, alors $j = i$ et $z = y$, et on a

$$
v = (1-b)\left\{
\begin{aligned}
&- b^i c^{i+1} f(z) + \left\{
\begin{aligned}
&\psi\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il+l}{a}\right)
\end{aligned}
\right\} \\
&+ \frac{r}{b}\left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il+l}{a}\right)
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\right\},
$$

$$
as = (b+1)\left\{
\begin{aligned}
&b^i c^{i+1} f(z) + \psi\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi\left(t - \frac{2il+l}{a}\right) \\
&+ \frac{r}{b}\left\{
\begin{aligned}
&\psi_1\left(t - \frac{l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{3l}{a}\right) + \ldots \\
&+ b^i c^i \psi_1\left(t - \frac{2il+l}{a}\right)
\end{aligned}
\right\}
\end{aligned}
\right\};
$$

on tire de là

$$\frac{v}{s} = \frac{1-b}{1+b}\,a.$$

Mais, d'après l'équation (7), on a

$$1 - b = \frac{2}{k+2}, \quad 1 + b = \frac{2k}{k+1}:$$

donc

$$\frac{v}{s} = \frac{a}{k}:$$

c'est là une des conditions imposées au problème.

Je fais $x = 0$ dans les équations (17) et (18), alors $j = i - 1$ et $z = y$, et on a

$$v = (1-c)\left\{\begin{array}{l} b^i c^i f(z) - b\psi\left(t - \frac{2l}{a}\right) - b^2 c\,\psi\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ \qquad + b^i c^{i-1}\,\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \\ - r\left\{\begin{array}{l} \psi_1\left(t - \frac{2l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ + b^{i-1} c^{i-1}\,\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$+ \psi(t) + \frac{r}{b}\psi_1(t),$$

$$as = (c+1)\left\{\begin{array}{l} - b^i c^i f(z) + b\left\{\begin{array}{l} \psi\left(t - \frac{2l}{a}\right) + bc\,\psi\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ + b^{i-1} c^{i-1}\,\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \end{array}\right\} \\ + r\left\{\begin{array}{l} \psi_1\left(t - \frac{2l}{a}\right) + bc\,\psi_1\left(t - \frac{4l}{a}\right) + \ldots \\ + b^{i-1} c^{i-1}\,\psi\left(t - \frac{2il}{a}\right) \end{array}\right\} \end{array}\right\}$$

$$+ \psi(t) + \frac{r}{b}\psi_1(t);$$

on tire de là

$$\frac{v - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)}{s - \frac{1}{a}\psi(t) - \frac{r}{ab}\psi_1(t)} = \frac{c-1}{c+1}\,a.$$

D'après l'équation (12), on a

$$c - 1 = -\frac{2}{k' + 1}, \quad c + 1 = \frac{2k'}{k' + 1}, \quad \frac{c-1}{c+1} = -\frac{1}{k}.$$

D'après cela, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{v - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)}{s - \frac{1}{a}\psi(t) - \frac{r}{ab}\psi_1(t)} = -\frac{a}{k'}.$$

J'ai supposé que la source du son est indépendante du mouvement vibratoire du tuyau, et qu'elle communique à l'orifice une vitesse quelconque $\psi(t)$ et une condensation quelconque

$$\frac{1}{a}\psi(t) + \frac{1}{a}\psi_1(t) = \frac{1}{a}\chi(t),$$

sans préjuger d'avance si cette vitesse et cette condensation doivent remplir certaines conditions pour que l'air du tuyau vibre en satisfaisant aux conditions imposées, sauf à laisser à l'analyse le soin d'indiquer si la vitesse et la condensation communiquées doivent remplir certaines conditions. Si l'on compare l'équation précédente a l'équation (4), on voit que l'on obtient la relation

$$\frac{v - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)}{as - \psi(t) - \frac{r}{b}\psi_1(t)} = \frac{v - \psi(t)}{as - \psi(t) - \psi_1(t)};$$

on tire de là

$$\psi_1(t)\{\psi_1 + v - as - (k' + 1)[v - \psi(t)]\} = 0,$$

ou bien

$$\psi_1(t)\{as - \psi(t) - \psi_1(t) + k'[v - \psi(t)]\} = 0.$$

En vertu de l'équation (14), la quantité

$$as - \psi(t) - \psi_1(t) + k'[v - \psi(t)]$$

étant nulle, il en résulte que l'équation précédente est satisfaite indépendamment de toute forme adoptée pour $\psi(t)$ et $\psi_1(t)$.

Il est permis de considérer le mouvement de l'air dans le tuyau lorsque le temps écoulé t est déjà un peu notable : alors i est un nombre assez grand pour que les fonctions $(bc)^i c$, $(bc)^{j+1}$ rendent insensibles les termes $(bc)^{j+1} f(y)$, $b^i c^{i+i} f(z)$ dans les équations (17) et (18); par suite, les expressions de v et s deviennent indépendantes de l'état initial de l'air dans le tuyau. C'est ce que je ferai désormais. Dans beaucoup d'applications, la fonction $\psi_1(t)$ sera nulle; alors la vitesse communiquée à l'orifice étant $\psi(t)$, la condensation communiquée sera $\frac{1}{a}\psi(t)$: cette circonstance se présentera, par exemple, lorsqu'on entretiendra le mouvement de l'air dans le tuyau par les impulsions continuellement communiquées au moyen d'ondes planes, perpendiculaires au tuyau, excitées dans l'air libre qui précède le tube et complétement formées lorsqu'elles atteignent l'orifice A. Je me bornerai ici à considérer les modes d'ébranlement dans lesquels $\psi_1(t) = 0$; au reste, les calculs que je donnerai se reproduiraient aisément dans le cas général. D'après cela, je réduirai les équations (17) et (18) à

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} v &= \psi\left(t-\frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{2l+x}{a}\right) + b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{4l+x}{a}\right) \\ &\quad + b^3c^3\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \\ &\quad - b\left\{\begin{aligned} &\psi\left(t-\frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{4l-x}{a}\right) \\ &+ b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right.$$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} as &= \psi\left(t-\frac{x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{2l+x}{a}\right) + b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{4l+x}{a}\right) \\ &\quad + b^3c^3\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \\ &\quad + b\left\{\begin{aligned} &\psi\left(t-\frac{2l-x}{a}\right) + bc\,\psi\left(t-\frac{4l-x}{a}\right) \\ &+ b^2c^2\,\psi\left(t-\frac{6l+x}{a}\right) + \ldots \end{aligned}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules on pourra supposer que les séries se prolongent indéfiniment pour les mêmes raisons qui nous ont fait supprimer les termes qui dépendent de l'état initial. Je ferai remarquer que pour passer de l'expression de v à celle de as, il suffit de changer à la fois les signes de b et c; cela nous permettra de nous occuper seulement des transformations de v.

On peut retrouver les expressions de v et de as données par les équations (19), (20) au moyen d'une méthode très-simple, qui servira de contrôle à celle que j'ai déjà employée.

Je suppose, pour plus de simplicité, qu'à l'origine l'air du tuyau est dans son équilibre naturel, et qu'ensuite on communique artificiellement à l'orifice la vitesse $\psi(t)$ et la condensation $\frac{1}{a}\psi(t)$. La tranche MM', placée à la distance $x = \mathrm{MA}$ de l'orifice A, reçoit à l'époque t, par le mouvement direct des ondes qui s'introduisent par l'orifice, la vitesse et la condensation données par les formules

$$\psi\left(t - \frac{x}{a}\right), \quad \frac{1}{a}\psi\left(t - \frac{x}{a}\right).$$

La vitesse et la condensation qui arrivent en MM' à la même époque par suite d'une seule réflexion opérée en B, sont données par

$$-b\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right), \quad \frac{b}{a}\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right),$$

b étant une fraction positive ou négative, suivant que le tuyau est fermé en B ou s'ouvre dans l'air libre.

Par deux réflexions opérées l'une en B, l'autre en A, il arrive aussi à MM' une vitesse et une condensation exprimées par

$$bc\,\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right), \quad \frac{bc}{a}\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right),$$

c désignant une fraction positive ou négative, suivant qu'en A le tuyau est fermé par un corps solide ou s'ouvre librement dans l'atmosphère.

De même, par trois réflexions, opérées successivement en B, en A et en B, on a la vitesse et la condensation

$$-b^2c\,\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right), \quad \frac{b^2c}{a}\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right).$$

Par quatre réflexions, on a

$$b^2c^2\psi\left(t - \frac{4l + x}{a}\right), \quad \frac{b^2c^2}{a}\psi\left(t - \frac{4l + x}{a}\right),$$

et ainsi de suite, tant que les quantités

$$t - \frac{x}{a}, \quad t - \frac{2l - x}{a}, \quad t - \frac{2l + x}{a}, \ldots$$

seront positives. Si l'on admet que le temps t est un peu notable, cette suite de termes pourra être beaucoup prolongée et l'on pourra même la supposer prolongée indéfiniment, sans erreur sensible. Si l'on désigne par v et s la vitesse et la condensation complète de la tranche MM', à l'époque t, on aura

$$\begin{aligned} v &= \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) - b\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) \\ &\qquad - b^2 c\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots, \\ as &= \psi\left(t - \frac{x}{a}\right) + b\psi\left(t - \frac{2l - x}{a}\right) + bc\psi\left(t - \frac{2l + x}{a}\right) \\ &\qquad + b^2 c\psi\left(t - \frac{4l - x}{a}\right) + \ldots \end{aligned}$$

Ces expressions montrent qu'en B, où l'on a

$$x = l,$$

le rapport de v à s est constant et égal à $\frac{1 - b}{1 + b} a$; elles montrent aussi qu'en A, où l'on a

$$x = 0,$$

le rapport $\frac{v - \psi(t)}{s - \frac{1}{a}\psi(t)}$ est constant et égal à $-\frac{1 - c}{1 + c} a$; enfin, ces expressions coïncident avec les formules déjà trouvées (19) et (20).

Je suppose maintenant que la vitesse $\psi(t)$ communiquée à l'orifice se compose d'un nombre quelconque de mouvements simples, et que l'on ait

$$(21) \qquad \psi(t) = h \sin \frac{2\pi a t}{\lambda} + h' \sin \frac{2\pi a t}{\lambda'} + h'' \sin \frac{2\pi a t}{\lambda''} + \ldots,$$

λ, λ', λ'', etc., sont les longueurs complètes des ondes qui correspondent aux mouvements simples; h, h', h'', etc., sont des constantes.

En portant l'équation (21) dans la valeur générale (19) de v, on a une suite de la forme

$$v = u + u' + u'' + u''' + \ldots, \tag{22}$$

dans laquelle

$$\left\{\begin{aligned} u &= h\left\{\begin{array}{l} \sin 2\pi\dfrac{at-x}{\lambda} + bc\sin 2\pi\dfrac{at-2l+x}{\lambda} \\ + b^2c^2\sin 2\pi\dfrac{at-4l+x}{\lambda} + \ldots \end{array}\right\} \\ &- hb\left\{\begin{array}{l} \sin 2\pi\dfrac{at-2l+x}{\lambda} + bc\sin 2\pi\dfrac{at-4l+x}{\lambda} \\ + b^2c^2\sin 2\pi\dfrac{at-6l+x}{\lambda} + \ldots \end{array}\right\}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

u', u'', u''', etc., se déduisent de cette expression de u en y changeant h et λ en h', λ' ou en h'', λ'', etc.

Pour faire la somme de chacune des deux séries contenues dans l'équation (23), il suffit d'employer la formule connue

$$\sin y + e\sin(y-z) + e^2\sin(y-2z) + e^3\sin(y-3z) + \ldots = \frac{\sin y - e\sin(y+z)}{1-2e\cos z + e^2};$$

de cette manière, on a

$$u = \frac{h}{1-2bc\cos\dfrac{4\pi l}{\lambda} + b^2c^2}\left\{\begin{array}{l} \sin 2\pi\dfrac{at-x}{\lambda} - bc\sin 2\pi\dfrac{at+2l-x}{\lambda} \\ - b\sin 2\pi\dfrac{at-2l+x}{\lambda} + b^2c\sin 2\pi\dfrac{at+x}{\lambda} \end{array}\right\}.$$

Je pose

$$\mathrm{H} = \frac{h}{1-2bc\cos\dfrac{4\pi l}{\lambda} + b^2c^2} = \frac{h}{(1-bc)^2 + 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}. \tag{24}$$

Je sépare dans u les quantités $\sin\frac{2\pi at}{\lambda}$, $\cos\frac{2\pi at}{\lambda}$, et j'ai

$$u = \mathrm{H}\left(\mathrm{A}\sin\frac{2\pi at}{\lambda} - \mathrm{B}\cos\frac{2\pi at}{\lambda}\right); \tag{25}$$

les valeurs de A et B sont données par

$$\mathrm{A} = (1+b^2c)\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - b(1+c)\cos 2\pi\frac{2l-x}{\lambda}, \tag{26}$$

$$\mathrm{B} = (1-b^2c)\sin\frac{2\pi x}{\lambda} - b(1-c)\sin 2\pi\frac{2l-x}{\lambda}. \tag{27}$$

Je pose

$$P^2 = A^2 + B^2, \tag{28}$$

A étant plus petit que P, on peut toujours déterminer une suite de valeurs de θ, telles que l'on ait

$$A = P \cos \frac{2\pi\theta}{\lambda}, \tag{29}$$

P étant pris en valeur absolue. Alors on aura, abstraction faite des signes,

$$B = P \sin \frac{2\theta\pi}{\lambda}, \tag{30}$$

et, en prenant $\frac{2\pi\theta}{\lambda}$ entre 0 degré et 360 degrés, on pourra toujours le déterminer de manière que les équations (29), (30) soient satisfaites, quels que soient les signes de A et B. Par ces transformations l'équation (25) devient

$$u = HP \sin 2\pi \frac{at - \theta}{\lambda}. \tag{31}$$

Calculons maintenant P et θ, les équations (26), (27), (28) donnent

$$\begin{aligned}
P^2 = {} & (1 + b^2 c)^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} + (1 - b^2 c)^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda} \\
& + b^2 (1 + c)^2 \sin^2 2\pi \frac{2l - x}{\lambda} + b^2 (1 - c)^2 \sin^2 2\pi \frac{2l - x}{\lambda} \\
& - 2b(1 + c)(1 + b^2 c) \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{2l - x}{\lambda} \\
& - 2b(1 - c)(1 - b^2 c) \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{2l - x}{\lambda},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P^2 = {} & 1 + b^4 c^2 - b^2 (1 + c^2) + 2b^2 c \left(\cos^2 \frac{2\pi x}{\lambda} - \sin^2 \frac{2\pi x}{\lambda}\right) \\
& + 2b^2 c \left(\cos^2 2\pi \frac{2l - x}{\lambda} - \sin^2 2\pi \frac{2l - x}{\lambda}\right) \\
& - 2b(1 + b^2 c^2) \left(\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{2l - x}{\lambda} + \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{2l - x}{\lambda}\right) \\
& - 2bc(1 + b^2) \left(\cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{2l - x}{\lambda} - \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{2l - x}{\lambda}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}^2 &= 1 + b^2 + b^2c^2 + b^4c^2 - 2bc(1+b^2)\cos\frac{4\pi l}{\lambda} \\
&\quad + 2b^2c\left(\cos\frac{4\pi x}{\lambda} + \cos 4\pi\frac{2l-x}{\lambda}\right) - 2b(1+b^2c^2)\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda}, \\
\mathrm{P}^2 &= 1 + b^2 + b^2c^2 + b^4c^2 - 2bc(1+b^2)\cos\frac{4\pi l}{\lambda} \\
&\quad + 4bc^2\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda} - 2b(1+b^2c^2)\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda}, \\
\mathrm{P}^2 &= -2b\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda}\left(1 + b^2c^2 - 2bc\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\right) \\
&\quad + (1+b^2)\left(1 + b^2c^2 - 2bc\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\right), \\
\mathrm{P}^2 &= \left(1 + b^2c^2 - 2bc\cos\frac{4\pi l}{\lambda}\right)\left(1 + b^2 - 2b\cos 4\pi\frac{l-x}{\lambda}\right).
\end{aligned}$$

D'après cela, l'équation (31) devient

$$u = h\sqrt{\frac{1 + b^2 - 2b\cos 4\pi\frac{(l-x)}{\lambda}}{1 + b^2c^2 - 2bc\cos\frac{4\pi l}{\lambda}}}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda},$$

ou bien

$$u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda}, \tag{32}$$

en posant

$$\mathrm{M}^2 = \frac{(1-b)^2 + 4b\sin^2 2\pi\frac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2 + 4bc\sin^2\frac{2\pi l}{\lambda}}. \tag{33}$$

Quant à θ, on pourra le calculer par la formule suivante :

$$\operatorname{tang}\frac{2\pi\theta}{\lambda} = \frac{(1-b^2c)\sin\frac{2\pi x}{\lambda} - b(1-c)\sin 2\pi\frac{2l-x}{\lambda}}{(1+b^2c)\cos\frac{2\pi x}{\lambda} - b(1+c)\cos 2\pi\frac{2l-x}{\lambda}}. \tag{34}$$

En désignant par M', M'', M''', etc., θ', θ'', θ''', etc., ce que deviennent les valeurs de M et θ données par les formules (33), (34) lorsqu'on y change λ en λ', λ'', λ''', etc., la formule (22) deviendra

$$(35)\qquad \begin{cases} v = h\mathrm{M}\sin 2\pi\dfrac{at-\theta}{\lambda} + h'\mathrm{M}'\sin 2\pi\dfrac{at-\theta'}{\lambda'} \\ \quad + h''\mathrm{M}''\sin 2\pi\dfrac{at-\theta''}{\lambda''} + \ldots \end{cases}$$

Si dans cette équation on change les signes de b et c, et que l'on désigne par N, N', N'', etc., φ, φ', φ'', etc., ce que deviennent respectivement M, M', M'', etc., θ, θ', θ'', etc., on aura

$$(36)\qquad \begin{cases} as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\dfrac{at-\varphi}{\lambda} + h'\mathrm{N}'\sin 2\pi\dfrac{at-\varphi'}{\lambda} \\ \quad + h''\mathrm{N}''\sin 2\pi\dfrac{at-\varphi''}{\lambda''} + \ldots; \end{cases}$$

N se calculera par la formule

$$(37)\qquad \mathrm{N} = \frac{(1+b)^2 - 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2 + 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Lorsqu'on suppose que le mouvement communiqué à l'orifice ne consiste qu'en un seul mouvement simple $h\sin\frac{2\pi at}{\lambda}$, on réduira les formules (35), (36) à leur premier terme.

Pour les tuyaux ouverts aux deux bouts, b et c sont négatifs et égaux; je mets leur signe en évidence, et j'ai

$$(38)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda},\qquad (39)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1+b)^2 - 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-b^2)^2 + 4b^2\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(40)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda},\qquad (41)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1-b)^2 + 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-b^2)^2 + 4b^2\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Lorsque le tuyau est ouvert en A et fermé en B, ce qui constitue un bourdon ordinaire, b est positif et c négatif. En mettant les signes en évidence, j'ai

$$(42)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda},\qquad (43)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1-b)^2 + 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2 - 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(44)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda},\qquad (45)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1+b)^2 - 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2 - 4bc\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}.$$

Lorsque le tuyau est ouvert en B et fermé en A, et que, par un petit trou pratiqué au milieu de A, on communique les vibrations à la tranche A, on a ce qu'on appelle improprement un tuyau ouvert, et ce qui n'est autre chose qu'un bourdon renversé. Quoiqu'il soit difficile par ce moyen de donner à la première tranche le mouvement régulier que suppose la théorie, on peut néanmoins considérer les formules qui se rapportent au bourdon renversé, quel que soit le moyen qu'on puisse employer pour ébranler l'air, comme l'exige la théorie, ici b est négatif et c positif. En mettant les signes en évidence, on a

$$(46)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda},\qquad (47)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1+b)^2 - 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2 - 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(48)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda},\qquad (49)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1-b)^2 + 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1+bc)^2 - 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

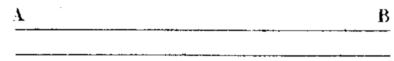
Enfin, pour un tuyau fermé aux deux bouts, b et c sont positifs, et l'on a

$$(50)\quad u = h\mathrm{M}\sin 2\pi\frac{at-\theta}{\lambda},\qquad (51)\quad \mathrm{M}^2 = \frac{(1-b)^2 + 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2 + 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}},$$

$$(52)\quad as = h\mathrm{N}\sin 2\pi\frac{at-\varphi}{\lambda},\qquad (53)\quad \mathrm{N}^2 = \frac{(1+b)^2 - 4b\sin^2 2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}}{(1-bc)^2 + 4bc\sin^2\dfrac{2\pi l}{\lambda}}.$$

Tuyaux ouverts aux deux bouts.

Fig. 2.



La formule (38) montre que dans chaque section du tuyau le maximum de vitesse est égal à hM. A l'extrémité B, ce maximum est donné par hM', en posant

$$M'^2 = \frac{(1+b)^2}{(1-b^2)^2 + 4b^2 \sin^2 \frac{2\pi l}{\lambda}}. \tag{54}$$

Le coefficient h dépend de l'intensité du son qui entretient le mouvement à l'orifice A; par son carré, il sert de mesure à cette intensité. La proportion dans laquelle ce carré est augmenté, par l'effet du tuyau, dans l'ébranlement de B, n'est autre chose que M'^2; c'est pour cela que M'^2 sera regardé comme la mesure de la sonorité du tuyau ou de son pouvoir résonnant.

L'équation (54) fait voir que le son correspondant à $\lambda = 2l$ n'est pas le plus grave que le tuyau puisse rendre. Des sons beaucoup plus graves que celui-là, à des degrés très-divers, peuvent être rendus par le tuyau, d'après la formule. Cette conséquence est tout à fait conforme à d'anciennes expériences de Mersenne, par lesquelles il est parvenu à faire descendre le son de la valeur de sept tons entiers, sans changer la longueur du tuyau; l'artifice qu'il a employé, pour obtenir cet effet avec les embouchures ordinaires, consiste à faire varier le diamètre du tuyau. Voici, au reste, le tableau, pour ainsi dire inconnu, de Mersenne.

Longueur commune des six tuyaux, 72 lignes.

Diamètre des tuyaux......	51^{l}	25^{l}	18^{l}	12^{l}	6^{l}	3^{l}
Sons rendus.............	$\text{la}^{\ast}_{-1}$	$\text{ut}^{\ast}_{-1}$	mi_{-1}	sol_{-1}	$\text{la}^{\ast}_{-1}$	ut

On a désigné par ut le son rendu par le tuyau de 3 lignes de diamètre, afin de nommer commodément les autres sons, mais on ne l'a pas classé dans la gamme absolue.

Savart a répété les expériences de Mersenne avec six tuyaux de 72 lignes de longueur commune, et il a obtenu les résultats suivants :

Diamètre des tuyaux.......	54^{l}	33^{l}	23^{l}	18^{l}	15^{l}	10^{l}
Sons rendus.............	fa_4^{*}	sol_4	la_4	la_4^{*}	si_4	ut_5

Ici les sons se trouvent classés dans la gamme absolue. Le son ut_5 correspond à une onde dont la longueur est de 144 lignes, et par conséquent le double de la longueur du tuyau; il correspond au son fondamental de Bernoulli. On voit que Savart a fait descendre par degrés le son fondamental de la valeur de trois tons.

L'équation (54) montre que, si l'air du tuyau peut vibrer sous l'influence de tous les sons, la sonorité du tuyau est bien loin d'être la même pour chacun d'eux. On peut dire aussi que l'air de tous les tuyaux peut vibrer sous l'influence d'un son donné, mais qu'il y a des longueurs de tuyau qui laissent les vibrations très-faibles, et d'autres qui leur donnent beaucoup de puissance. La sonorité des tuyaux est la plus grande possible, lorsque les sons produits sont compris dans la série normale des tuyaux ouverts, c'est-à-dire lorsqu'ils correspondent aux valeurs suivantes :

$$\lambda = 2l,\ \frac{2l}{2},\ \frac{2l}{3},\ \frac{2l}{4},\ \frac{2l}{5},\dots,\ \frac{2l}{i}.$$

La sonorité est encore très-grande lorsque les sons se trouvent voisins de cette série; néanmoins, elle décroît de plus en plus à mesure que l'on s'en écarte. Elle devient minimum pour les sons de la série normale des bourdons, c'est-à-dire pour ceux qui correspondent à

$$\lambda = 4l,\ \frac{4l}{3},\ \frac{4l}{5},\dots,\ \frac{4l}{2i+1},$$

et elle est très-faible, sans être minimum, pour les sons voisins de cette dernière série.

On a une image assez exacte de ces divers phénomènes dans les anneaux colorés de Newton; je me suis assuré qu'en effet l'intensité de la lumière dans les anneaux transmis, lorsqu'on tient compte de toutes les réflexions successives, est représentée par une formule complétement analogue à (54). Pour une lumière simple donnée, chaque anneau brillant n'est pas infiniment mince, mais a une certaine largeur, en sorte qu'il correspond à diverses épaisseurs de la lame mince voisine de l'épaisseur relative au maximum d'éclat; chaque anneau obscur a aussi une certaine étendue qui correspond à diverses épaisseurs en deçà et au delà de l'épaisseur relative au minimum d'éclat. De même, une épaisseur donnée de la lame mince transmet toutes les lumières, quelques-unes vivement, l'une d'elles avec le maximum d'éclat, quelques autres médiocrement et l'une d'elles avec le minimum d'intensité. Lorsqu'un mouvement simple de lumière traverse une lame mince et qu'on tient compte des réflexions infinies dans la lame, la vitesse dans l'onde transmise est représentée par

$$m \sin 2\pi \frac{at - \theta}{\lambda},$$

en posant

$$m^2 = \frac{\alpha^2}{(1 - b\gamma)^2 + 4b\gamma \sin^2 \frac{2\pi e}{\lambda}},$$

α, β, γ étant les coefficients de transmission à travers la deuxième surface et de réflexion sur cette surface et sur la première; e désignant l'équivalent optique de l'épaisseur de la lame mince, λ étant la longueur d'ondulation, a désignant la vitesse dans le milieu où se propage la lumière transmise, et θ une quantité qui dépend de la distance à laquelle on reçoit la lumière transmise.

La valeur de m^2 représente l'intensité de la lumière transmise : on voit qu'elle est tout à fait de même forme que M'^2 donné par l'équation (54) et qu'elle conduit aux mêmes lois.

La valeur de M^2 donnée par l'équation (39) montre qu'il n'existe pas dans le tuyau de sections normales dans lesquelles la vitesse soit constamment nulle. En effet, la quantité $(1 + b)^2 - 4b$ est égale à $(1 - b)^2$; elle est constamment positive et ne peut pas devenir nulle, car b est toujours une fraction; à plus forte raison la quantité $(1 + b)^2 - 4b \sin^2 2\pi \frac{l - x}{\lambda}$ ne peut-elle pas devenir nulle. De même, il n'y a pas dans le tuyau de sections pour lesquelles la condensation soit constamment nulle; c'est ce que montre la valeur de N^2 donnée par l'équation (41). Les nœuds et les ventres, tels que les définit Bernoulli, n'existent donc pas dans les tuyaux. Mais on peut appeler nœuds et ventres les sections dans lesquelles la vitesse ou la condensation sont constamment minimum; alors de tels nœuds ou de tels ventres existent en général; ils possedent d'ailleurs les principales propriétés des nœuds et des ventres que l'expérience reconnaît.

Quel que soit le son produit, les nœuds sont toujours équidistants entre eux et leur distance est égale à une demi-ondulation. En effet, l'équation (39) montre que les nœuds sont donnés par la relation

$$l - x = \frac{\lambda}{4}(2i + 1),$$

i étant un nombre entier. On voit par là que la distance de l'extrémité B au premier nœud est égale à $\frac{\lambda}{4}$, et que la distance d'un nœud quelconque au suivant est égale à $\frac{\lambda}{2}$.

L'équation (41) montre que l'extrémité B est toujours un ventre, mais qu'il n'en est pas de même de l'orifice A. Les ventres sont équidistants entre eux, car ils sont donnés par la relation

$$l - x = i\frac{\lambda}{2},$$

leur distance est égale à $\frac{\lambda}{2}$, et, par suite, à une concamération. La distance du ventre B au premier nœud est toujours égale à $\frac{\lambda}{4}$.

Puisque à partir de B les ventres sont successivement placés à des distances les uns des autres égales à $\frac{\lambda}{2}$, cette suite de longueurs n'aboutira à l'orifice A qu'autant que $\frac{\lambda}{2}$ sera une partie aliquote de la longueur du tuyau, c'est-à-dire qu'autant qu'il s'agira des sons de la série normale des tuyaux ouverts. Pour les autres sons, la distance de l'ouverture A au premier ventre sera plus petite que $\frac{\lambda}{2}$, et sa distance au premier nœud quand il y aura un nœud interposé entre A et le premier ventre, sera plus petite que $\frac{\lambda}{4}$. Les ventres et les nœuds ne sont donc pas symétriquement placés par rapport au milieu du tuyau, lorsque le son produit n'appartient pas à la série normale des tuyaux ouverts.

Si, en partant d'un son quelconque de cette série normale, on augmente la gravité du son, la demi-concamération du second bout du tuyau en B s'allongera, tandis que la distance de l'orifice au premier nœud diminuera et deviendra de plus en plus petite jusqu'à devenir nulle; alors le son produit appartient à la série normale des bourdons; l'orifice devient un nœud et le tuyau résonne médiocrement. Si la gravité du son augmente encore, la distance de l'orifice au premier ventre devient plus petite que $\frac{\lambda}{4}$, diminue de plus en plus jusqu'à devenir nulle; alors le son produit appartient à la série normale des tuyaux ouverts; l'orifice redevient un ventre; tous les nœuds et tous les ventres se trouvent de nouveau symétriquement placés par rapport au milieu du tuyau.

Une discussion analogue se reproduirait facilement pour les bourdons et les tuyaux fermés aux deux bouts; il suffirait de traiter comme précédemment les formules qui se rapportent à ces cas nouveaux.