JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Formules générales relatives à la question de la Stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 164-184.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__164_0>

FORMULES GÉNÉRALES

Relatives à la question de la Stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe;

PAR M. J. LIOUVILLE [*].

---

1. Rapportons d'abord les points de la masse liquide à trois axes rectangulaires fixes Ox', Oy', Oz. Soient p la pression au point (x', y', z) et t le temps écoulé depuis une certaine époque. En vertu du principe de d'Alembert combiné avec l'hypothèse de l'égalité de pression en tous sens que nous admettrons ici, on a ces trois équations

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx'} &= \rho\left(X' - \frac{d^2x'}{dt^2}\right),\\ \frac{dp}{dy'} &= \rho\left(Y' - \frac{d^2y'}{dt^2}\right),\\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right),\end{aligned}\right.$$

où X', Y', Z désignent les composantes parallèles aux trois axes de la force accélératrice qui agit sur le point (x', y', z); ρ est la densité constante du liquide.

Maintenant, imaginons deux axes Ox, Oy perpendiculaires entre eux et à l'axe Oz, et, de plus, animés autour de ce dernier axe d'un mouvement commun de rotation dont la vitesse angulaire peut varier d'un instant à l'autre. Soit θ l'angle compris entre Ox et Ox', θ étant

---

[*] Extrait du premier paragraphe d'un Mémoire *Sur la stabilité de l'équilibre des mers*, communiqué à l'Académie des Sciences le 14 novembre 1842 (voir *Comptes rendus*, tome XV, page 903). Cet extrait a été inséré il y a trois ans dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1855. J'ai cru convenable de le reproduire ici.

une fonction de t; on aura

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta,$$
$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

La pression p qui était fonction de t, x', y', z deviendra ainsi fonction de t, x, y, z; ses dérivées partielles relativement à x et y seront

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dx'}\frac{dx'}{dx} + \frac{dp}{dy'}\frac{dy'}{dx} = \cos\theta\frac{dp}{dx'} + \sin\theta\frac{dp}{dy'},$$
$$\frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dx'}\frac{dx'}{dy} + \frac{dp}{dy'}\frac{dy'}{dy} = \cos\theta\frac{dp}{dy'} - \sin\theta\frac{dp}{dx'},$$

ou bien, à cause des équations (1),

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left(\text{X}'\cos\theta + \text{Y}'\sin\theta - \cos\theta\frac{d^2x'}{dt^2} - \sin\theta\frac{d^2y'}{dt^2}\right),$$
$$\frac{dp}{dy} = \rho\left(\text{Y}'\cos\theta - \text{X}'\sin\theta - \cos\theta\frac{d^2y'}{dt^2} + \sin\theta\frac{d^2x'}{dt^2}\right);$$

Mais $\text{X}'\cos\theta + \text{Y}'\sin\theta$, $\text{Y}'\cos\theta - \text{X}'\sin\theta$ sont les composantes de la force accélératrice suivant les axes $\text{O}x$, $\text{O}y$; nous les représenterons par X, Y. D'un autre côté, il est aisé de former les différentielles secondes $\frac{d^2x'}{dt^2}$, $\frac{d^2y'}{dt^2}$, et, par suite, de calculer les deux quantités

$$\cos\theta\frac{d^2x'}{dt^2} + \sin\theta\frac{d^2y'}{dt^2}, \quad \cos\theta\frac{d^2y'}{dt^2} - \sin\theta\frac{d^2x'}{dt^2};$$

on les trouve respectivement égales à

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{dy}{dt}\frac{d\theta}{dt} - y\frac{d^2\theta}{dt^2},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} - y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\frac{dx}{dt}\frac{d\theta}{dt} + x\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

De là résulte

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left[\text{X} - \frac{d^2x}{dt^2} + x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2\frac{dy}{dt}\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2}\right],$$
$$\frac{dp}{dy} = \rho\left[\text{Y} - \frac{d^2y}{dt^2} + y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2\frac{dx}{dt}\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2}\right].$$

Ces deux équations nouvelles, jointes à l'ancienne équation

$$\frac{dp}{dz} = \rho\left(\text{Z} - \frac{d^2z}{dt^2}\right),$$

remplaceront les équations (1). On les mettra sous une autre forme en représentant par u, v, w les composantes parallèles aux axes mobiles Ox, Oy, Oz de la vitesse relative qui a lieu en (x, y, z), c'est-à-dire en faisant

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

puis en exprimant les composantes X, Y, Z de la force accélératrice par les dérivées partielles d'une seule fonction V, comme on en a le droit lorsque cette force résulte d'actions attractives fonctions des distances. On a ainsi finalement

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \rho\left[\frac{dV}{dx} - \frac{1}{dt}du + x\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + 2v\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2}\right], \\ \frac{dp}{dy} &= \rho\left[\frac{dV}{dy} - \frac{1}{dt}dv + y\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - 2u\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2}\right], \\ \frac{dp}{dz} &= \rho\left(\frac{dV}{dz} - \frac{1}{dt}dw\right). \end{aligned}\right.$$

Les différentielles de u, v, w, qui entrent dans ces équations sont des différentielles totales : en les développant on a, par exemple,

$$\frac{1}{dt}du = \frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz},$$

expression qu'on pourrait toutefois, dans le cas des oscillations très-petites dont nous nous occupons surtout, réduire à son premier terme par rapport auquel les autres sont négligeables. Quant aux forces exprimées par les dérivées partielles de V, elles proviendront toujours, dans ce Mémoire, d'actions attractives proportionnelles aux masses, et en raison inverse du carré de la distance; V sera donc la somme des éléments des masses agissantes divisées chacun par sa distance au point (x, y, z). De plus, dans les questions de stabilité que nous nous proposons de résoudre, les masses dont nous parlons se réduiront à celles du liquide lui-même et du noyau solide à la surface duquel ce liquide peut être placé.

Aux trois équations (2) il faut joindre naturellement l'équation dite de continuité, qui exprime la condition d'incompressibilité du liquide. Cette équation, savoir

$$(3)\quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

a la même forme et se démontre de la même manière que si Ox, Oy, Oz étaient des axes fixes.

2. L'équation (3), multipliée par $dxdydz$, puis intégrée dans toute l'étendue de la masse liquide, conduit à une conséquence évidente du reste *à priori*, mais qui nous sera très-utile plus tard. Si l'on décompose, en effet, en trois parties le premier membre de l'équation

$$\int\int\int\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)dx\,dy\,dz = 0,$$

on voit qu'une des intégrations s'effectue de suite. En se bornant à l'intégrale indéfinie, on a, par exemple,

$$\int\int\int\frac{du}{dx}dx\,dydz = \int\int u\,dy\,dz.$$

Pour passer de là à l'intégrale définie, observons que, pour chaque couple de valeurs de y et z, les produits $u\,dy\,dz$ sont relatifs aux points où une même parallèle à l'axe des x entre dans la masse liquide ou sort de cette masse, et que, de plus, ces produits doivent être pris successivement avec le signe $-$ et le signe $+$ en allant du premier au dernier dans le sens des x positives; d'un autre côté, si $d\omega$ désigne l'élément de la surface liquide qui répondant tour à tour à ces divers points d'entrée ou de sortie a $dy\,dz$ pour projection sur le plan des yz, et α l'angle que fait avec l'axe des x la normale à $d\omega$ menée en dehors du liquide, on aura successivement aussi

$$dydz = -\cos\alpha\,d\omega,\quad \text{puis}\quad dydz = \cos\alpha\,d\omega,$$

puisque $dydz$ et $d\omega$ sont des quantités positives, et que l'angle α est obtus, puis aigu alternativement. Les produits $u\,dy\,dz$, pris avec le signe qu'ils doivent avoir dans l'intégrale définie, sont donc égaux à $u\cos\alpha\,d\omega$, et l'on a, pour le premier terme de notre équation, l'expression simple

$$\int\int\int\frac{du}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int\int u\cos\alpha\,d\omega;$$

l'intégrale relative à $d\omega$ s'étendant non-seulement à toute la surface libre du liquide, mais encore, dans le cas d'un noyau solide, à la surface commune au liquide et au noyau, et s'il se forme un vide dans l'intérieur de la masse, à la surface par laquelle ce vide est limité.

En désignant par β, γ les angles que la normale à $d\omega$ fait avec Oy et Oz, on trouvera de même

$$\iiint \frac{dv}{dy}\,dx\,dy\,dz = \iint v\cos\beta\,d\omega,$$
$$\iiint \frac{dw}{dz}\,dx\,dy\,dz = \iint w\cos\gamma\,d\omega.$$

Il s'ensuit que

$$\iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,d\omega = 0.$$

Or $u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma$ est précisément la composante de la vitesse des molécules liquides placées à la surface $d\omega$, dans une direction normale à cette surface $d\omega$. On conclut de là que *si l'on fait à chaque instant la somme des produits de chacun des éléments de la surface du liquide par la vitesse normale correspondante, cette somme sera égale à zéro.* C'est ce que l'on pouvait voir *à priori*, car le volume total du liquide est supposé invariable, et la somme des produits dont nous parlons, multipliée par l'élément dt du temps, exprime précisément la variation que ce volume éprouve pendant l'instant dt; j'ai pensé néanmoins devoir en donner la démonstration précédente, où l'on emploie le calcul intégral. L'artifice (bien connu des géomètres) à l'aide duquel nous avons introduit dans nos calculs l'élément de surface $d\omega$, devant en effet être mis en usage plusieurs fois dans le cours de ce Mémoire, il était bon de l'appliquer d'abord à un exemple simple.

3. Les questions de stabilité se résolvant d'ordinaire par la considération de la force vive du système dont on s'occupe, cherchons pour notre masse liquide l'expression de cette force vive $\sum(m\vartheta^2)$, où $\vartheta^2 = u^2 + v^2 + w^2$. En posant

$$\rho V + \frac{\rho}{2}(x^2 + y^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - p = \rho\varphi,$$

on tire des équations (2),

$$\frac{1}{dt}du = \frac{d\varphi}{dx} + 2v\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{1}{dt}dv = \frac{d\varphi}{dy} - 2u\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

$$\frac{1}{dt}dw = \frac{d\varphi}{dz}.$$

On obtiendra la force vive $\sum(m\,\delta^2)$ en multipliant par les facteurs respectifs $2\rho u\,dt\,dx\,dy\,dz$, $2\rho v\,dt\,dx\,dy\,dz$, $2\rho w\,dt\,dx\,dy\,dz$ les premiers membres de ces équations, et formant ainsi la quantité

$$2(u\,du + v\,dv + w\,dw)\rho\,dx\,dy\,dz = md.\delta^2,$$

laquelle, d'après les équations ci-dessus, est équivalente à

$$2\rho\left(\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w + (uy - vx)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt,$$

puis intégrant par rapport au temps en suivant pour ainsi dire chaque molécule m dans son mouvement, ce qui donne $m\,\delta^2$; puis intégrant de nouveau pour toutes les molécules m, d'où résulte la force vive cherchée $\sum(m\,\delta^2)$. Mais il reviendra au même d'intégrer d'abord la quantité

$$2\rho\left(\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w + (uy - vx)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)dx\,dy\,dz\,dt$$

par rapport à x, y, z, en laissant t constant et en parcourant le volume total occupé par le liquide à chaque instant t, puis d'intégrer ensuite par rapport à t jusqu'à la valeur actuelle de cette variable. Dans cette nouvelle manière de procéder, les limites de x, y, z dans nos intégrales seront fonctions de t, et l'expression de $\sum(m\,\delta^2)$, à une constante près, dépendante de la force vive initiale, deviendra

$$2\rho\int dt\int\int\int\left[\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w + (uy - vx)\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]dx\,dy\,dz.$$

Cette expression se décompose en deux parties, savoir

$$2\rho\int dt\int\int\int\left(\frac{d\varphi}{dx}u + \frac{d\varphi}{dy}v + \frac{d\varphi}{dz}w\right)dx\,dy\,dz$$

et

$$2\rho \int dt \int\int\int (uy - vx) \frac{d^2\theta}{dt^2} dx\,dy\,dz.$$

La dernière peut s'écrire

$$2\rho \int \frac{d^2\theta}{dt^2} dt \int\int\int (uy - vx) dx\,dy\,dz.$$

Or les hypothèses que nous adopterons dans le cours de ce Mémoire sur la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ avec laquelle les axes Ox, Oy tournent autour de Oz rendront toujours nul un des facteurs

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{ou} \quad \int\int\int (uy - vx) dx\,dy\,dz$$

de l'élément qu'on doit intégrer par rapport au temps, ce qui rendra nulle l'intégrale elle-même. Nous admettrons, en effet, ou que $\frac{d\theta}{dt}$ est une constante n, auquel cas $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$; ou que $\frac{d\theta}{dt}$ a pour valeur la vitesse angulaire moyenne de rotation des molécules liquides autour de Oz, je veux dire a pour valeur la vitesse de rotation qui conviendrait par le principe des aires à notre masse liquide tout à coup solidifiée et abandonnée à elle-même; le mouvement des axes Ox, Oy est alors tel, qu'il n'y a en quelque sorte, relativement à eux, aucune aire décrite sur le plan des xy, les aires positives étant compensées exactement par les aires négatives, et l'on a

$$\int\int\int (uy - vx) dx dy dz = \int\int\int \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt}\right) dx dy dz = 0.$$

D'après cela, nous écrirons simplement

$$\sum (m\mathrm{g}^2) = 2\rho \int dt \int\int\int \left(\frac{d\varphi}{dx} u + \frac{d\varphi}{dy} v + \frac{d\varphi}{dz} w\right) dx\,dy\,dz + \text{const.}$$

Considérons en particulier l'intégrale

$$\int\int\int \frac{d\varphi}{dx} u\,dx\,dy\,dz,$$

où $dx\,dy\,dz$ représente l'un après l'autre les éléments du volume du liquide. En intégrant par parties, elle devient

$$\int\int u\varphi\, dy\, dz - \int\int\int \varphi \frac{du}{dx}\, dx\, dy\, dz\,;$$

les éléments de l'intégrale double se rapportent à la surface du liquide; on peut donc, comme au n° **2**, introduire l'élément $d\omega$ et les angles α, β, γ pour passer de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie; il vient ainsi, pour valeur de l'intégrale citée,

$$\int\int u \cos\alpha\,.\,\varphi\, d\omega - \int\int\int \varphi \frac{du}{dx}\, dx\, dy\, dz\,;$$

les intégrales

$$\int\int\int \frac{d\varphi}{dy}\, v\, dx\, dy\, dz, \quad \int\int\int \frac{d\varphi}{dz}\, w\, dx\, dy\, dz,$$

sont de même respectivement égales à

$$\int\int v \cos\beta\, \varphi\, d\omega - \int\int\int \varphi \frac{dv}{dy}\, dx\, dy\, dz,$$
$$\int\int w \cos\gamma\, \varphi\, d\omega - \int\int\int \varphi \frac{dw}{dz}\, dx\, dy\, dz.$$

En ajoutant ces trois quantités, on aura la valeur de

$$\int\int\int \left(\frac{d\varphi}{dx}\, u + \frac{d\varphi}{dy}\, v + \frac{d\varphi}{dz}\, w\right) dx\, dy\, dz\,;$$

cette somme est composée de deux termes, savoir d'une intégrale double

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, \varphi\, d\omega,$$

puis d'une intégrale triple, qui se retranche de la première,

$$\int\int\int \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) \varphi\, dx\, dy\, dz\,;$$

mais cette intégrale triple est nulle en vertu de l'équation (3). C'est donc à l'intégrale double que se réduit la somme indiquée. Il suit immédiatement de là que

$$(4)\quad \sum(m8^2) = 2\rho \int dt \int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, \varphi\, d\omega + \text{const.}$$

L'élément $d\omega$ ne se rapporte pas seulement à la surface libre du liquide, mais, en outre, s'il se forme un vide, à la surface qui limite ce vide, et s'il y a un noyau solide, à la surface commune au liquide et au noyau. Cela résulte de la manière même dont cet élément a été introduit dans nos formules.

4. Quand il s'agit de trouver la condition de stabilité pour une masse liquide placée à la surface d'un noyau solide animé autour de l'axe Oz d'un mouvement uniforme de rotation dont n est la vitesse angulaire, il est commode de supposer la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ constante aussi et égale à n, de telle sorte que le noyau solide reste immobile par rapport aux axes Ox, Oy, Oz. Quand on s'occupera du mouvement d'une masse entièrement liquide qui tourne autour d'un axe Oz passant par son centre de gravité O, on pourra encore attribuer à $\frac{d\theta}{dt}$ une valeur constante n; et si la figure primitive d'équilibre est de révolution autour de Oz, comme cela arrive pour les ellipsoïdes de Maclaurin, il n'y aura aucun inconvénient à continuer de prendre pour valeur de n celle de la vitesse angulaire qui avait lieu dans l'état d'équilibre. Mais rien n'empêcherait non plus d'adopter une valeur de n un peu plus grande ou un peu plus petite, et relative à la rotation d'une autre figure d'équilibre, voisine de celle que le liquide affectait d'abord. Cela revient, au reste, à modifier la figure d'équilibre à laquelle on rapporte les perturbations. Par exemple, on peut choisir cette figure telle, qu'elle réponde à la somme des aires décrites sur le plan fixe $x'Oy'$, au premier instant dt, dans le mouvement troublé, par les projections des rayons vecteurs menés de l'origine O à toutes les molécules égales du système : dès lors cette somme devra toujours rester la même que dans l'état d'équilibre. Les considérations précédentes seront d'une grande importance dans la théorie des ellipsoïdes à trois axes inégaux de M. Jacobi, si l'on veut *à priori*, en s'en occupant, faire dans nos formules $\frac{d\theta}{dt}$ constante. Mais quand la figure primitive d'équilibre est un des ellipsoïdes de M. Jacobi, la nature de la question semble en quelque sorte inviter à prendre pour valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire moyenne de la masse liquide, vitesse qui, pour une masse connue et une somme d'aires décrites aussi connue,

varie d'un instant à l'autre avec le moment d'inertie. Examinons successivement les deux hypothèses que nous venons d'indiquer concernant la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, et voyons comment, en se bornant à considérer des oscillations très-petites, on ramène à sa forme la plus simple le second membre de l'équation (4).

5. Soit d'abord $\frac{d\theta}{dt} =$ une constante n; on aura

$$\rho\varphi = \rho \mathrm{V} + \frac{\rho n^2}{2}(x^2 + y^2) - p = \rho \mathrm{W} - p,$$

en posant

$$\mathrm{W} = \mathrm{V} + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2).$$

L'intégrale

$$\int\!\!\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, \varphi\, d\omega$$

sera donc la différence des deux suivantes :

$$\int\!\!\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, \mathrm{W}\, d\omega,$$

et

$$\frac{1}{\rho}\int\!\!\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, p\, d\omega;$$

mais la seconde de ces deux intégrales est nulle, du moins lorsqu'on exclut (ce qui n'a évidemment aucun inconvénient dans nos questions de stabilité) le cas particulier où il se ferait un vide dans l'intérieur de la masse en mouvement. En effet, pour tous les éléments $d\omega$ qui peuvent appartenir à la surface commune du liquide et d'un noyau solide, la vitesse $u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma$, normale à $d\omega$, doit être nulle, puisque le noyau reste immobile par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, et que, par suite, les molécules liquides avoisinantes ne peuvent que glisser dans une direction tangentielle; on peut donc faire abstraction de la partie de notre intégrale qui répond à de tels éléments. D'un autre côté, à la surface libre du liquide, p est une constante que l'on peut faire sortir des signes $\int$; on obtient ainsi l'expression

$$\frac{p}{\rho}\int\!\!\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, d\omega;$$

or le second facteur de ce produit est nul, car il revient précisément à l'intégrale considérée n° **2**, en supprimant seulement dans cette intégrale la partie nulle d'elle-même qui répond à la surface commune au liquide et au noyau.

Dans l'intégrale

$$\iint (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,\mathrm{W}\,d\omega,$$

on peut regarder la valeur de W comme composée de deux parties, dont l'une se rapporte à l'état d'équilibre et l'autre à la variation que W éprouve pendant le mouvement. A cet effet, considérons chaque point M de la surface d'équilibre, menons par ce point une normale à cette surface, et soit, au bout d'un temps t quelconque, ζ l'élévation positive ou négative (comptée sur la normale qui part du point M) de la surface libre du liquide en mouvement au-dessus de la surface d'équilibre. Nous supposerons que cette élévation ζ réponde à l'élément $d\omega$ de la surface libre du liquide en mouvement; ζ' sera de même l'élévation correspondante à un autre élément $d\omega'$. Bornons-nous d'ailleurs au cas des oscillations très-petites, en sorte que ζ soit une très-petite quantité. Soit U la valeur que W avait dans l'état d'équilibre, pour un point quelconque et spécialement pour le point M; U désignera dans cet état la *fonction* des forces (j'entends par là, avec M. Jacobi, la fonction dont les dérivées partielles fournissent les composantes des forces accélératrices qui agissent sur les divers points du liquide et parmi lesquelles je comprends la force centrifuge). L'état d'équilibre continuant à subsister, si l'on se transporte du point M au point extrême de la petite normale ζ, W ou U éprouvera par ce seul déplacement une variation exprimée par $\frac{d\mathrm{U}}{d\zeta}\zeta$ ou par $-g\zeta$, g désignant la pesanteur qui a lieu à la surface dans l'état d'équilibre, laquelle pesanteur est, au signe près, exprimée par $\frac{d\mathrm{U}}{d\zeta}$. Mais la figure du liquide étant de plus altérée par l'état du mouvement, V et, par suite, W augmentent de toute la valeur due à l'excès de la figure actuelle du liquide sur la figure d'équilibre; cette valeur est

$$\rho\iint \frac{\zeta'\,d\omega'}{\Delta},$$

Δ désignant la distance de chacune des petites masses $\rho\zeta' d\omega'$ au point (x, y, z) situé à l'extrémité de la normale ζ. La valeur complète de W est, d'après cela,

$$W = U - g\zeta + \rho \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta}.$$

Le premier terme U se rapporte à l'état d'équilibre; il est, comme on sait, constant, et, par suite, on peut le faire sortir du signe $\int$, quand on s'occupe de l'intégrale

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, U d\omega;$$

cette intégrale se réduit donc à zéro par la même raison qui a fait disparaître celle où entrait la pression p. Ainsi, dans l'intégrale

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, W d\omega,$$

on peut négliger le premier terme U de W. Il reste à substituer les deux derniers termes, et c'est ce que nous allons faire en observant, de plus, que, dans l'hypothèse des petites oscillations, la composante $u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma$ de la vitesse, estimée dans une direction normale à $d\omega$, se réduit sensiblement à $\frac{d\zeta}{dt}$; nous trouvons ainsi pour

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, W d\omega,$$

et, par conséquent, pour

$$\int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, \varphi d\omega,$$

la valeur suivante,

$$-\int\int g\zeta \frac{d\zeta}{dt} d\omega + \rho \int\int \frac{d\zeta}{dt} d\omega \int\int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta},$$

dans laquelle on pourra même regarder $d\omega$ et $d\omega'$ comme exprimant les éléments de la surface libre dans l'état d'équilibre; en effet, ζ étant une quantité très-petite et la surface libre du liquide en mouvement devant, dans le cas des petites oscillations, différer très-peu de la surface d'équilibre, on ne néglige que des quantités du troisième ordre en remplaçant dans nos intégrales, qui sont du second ordre, une de ces surfaces par l'autre.

De cette discussion résulte pour valeur de la force vive du liquide

$$\sum m v^2 = -2\rho \int dt \iint g\zeta \frac{d\zeta}{dt} d\omega + 2\rho^2 \int dt \iint \frac{d\zeta}{dt} d\omega \iint \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} + \text{const.}$$

L'intégrale relative à t peut être effectuée. On a d'abord

$$2\rho \int dt \iint g\zeta \frac{d\zeta}{dt} d\omega = 2\rho \iint g\, d\omega \int \zeta \frac{d\zeta}{dt} dt = \rho \iint g\zeta^2 d\omega,$$

puisque la pesanteur g relative à la surface d'équilibre est indépendante de t.

On a, d'un autre côté,

$$2\rho^2 \int dt \iint \frac{d\zeta}{dt} d\omega \iint \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} = 2\rho^2 \iiiint \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} \int \zeta' \frac{d\zeta}{dt} dt,$$

puisque les éléments $d\omega$, $d\omega'$ appartiennent à la surface d'équilibre, et sont, par suite, aussi bien que leur distance Δ, indépendants de t. D'ailleurs, Δ ne change pas lorsqu'on permute ces deux éléments l'un dans l'autre : le second membre de l'équation qu'on vient d'écrire peut donc être remplacé par

$$2\rho^2 \iiiint \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} \int \zeta \frac{d\zeta'}{dt} dt,$$

ou encore par la demi-somme

$$\rho^2 \iiiint \frac{d\omega\, d\omega'}{\Delta} \int \left(\zeta' \frac{d\zeta}{dt} + \zeta \frac{d\zeta'}{dt}\right) dt,$$

laquelle revient à

$$\rho^2 \iiiint \frac{\zeta\zeta' d\omega\, d\omega'}{\Delta}.$$

Il suit finalement de là que

$$(5) \qquad \sum (m v^2) = \rho^2 \iiiint \frac{\zeta\zeta' d\omega\, d\omega'}{\Delta} - \rho \iint g\zeta^2 d\omega + \text{const.}$$

Telle est la formule fondamentale dont nous ferons usage dans les questions de stabilité d'équilibre, soit pour une masse liquide placée sur un noyau solide, soit pour une masse entièrement liquide, surtout quand la figure d'équilibre est de révolution. De plus, nous prendrons, en général, pour unité la densité ρ du liquide; en posant ainsi $\rho = 1$, nous aurons

$$(6) \qquad \sum(mz^2) = \iiiint \frac{\zeta\zeta' d\omega\, d\omega'}{\Delta} - \iint g\zeta^2 d\omega + \text{const.}$$

6. Considérons maintenant une masse entièrement liquide, dont la figure d'équilibre ne soit pas de révolution, et voyons à quelle forme simple se ramène l'équation (4) lorsqu'on suppose à chaque instant la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$ égale à celle de la vitesse angulaire moyenne de la masse liquide, ou, en d'autres termes, telle que l'on ait toujours

$$\iiint (vx - uy)\, dxdydz = 0.$$

Nous savons que

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt};$$

le produit $(vx - uy)\, dt$ est donc égal au double de l'aire décrite dans l'instant dt, relativement aux axes mobiles Ox, Oy, par la projection, sur leur plan, du rayon vecteur mené de l'origine des coordonnées au point (x, y, z). Soient r cette projection et ψ l'angle qu'elle fait avec l'axe des x : il nous viendra

$$vx - uy = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\psi}{dt},$$

et, par suite,

$$\iiint r^2 \frac{d\psi}{dt} dx\, dy\, dz = 0.$$

Mais $\theta + \psi$ étant l'angle que r fait avec l'axe fixe Ox', l'intégrale triple

$$\rho \iiint r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\right) dx\, dy\, dz$$

doit, par le principe des aires, conserver la même valeur pendant toute la durée du mouvement; or, d'après la condition trouvée ci-dessus, le second terme de cette intégrale triple disparaît de lui-même; on peut d'ailleurs, dans le premier terme, faire sortir des signes $\int$ le facteur $\frac{d\theta}{dt}$ qui est une simple fonction de t; c'est donc le produit

$$\rho \frac{d\theta}{dt} \int\int\int r^2\, dxdydz$$

de la vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$ par le moment d'inertie, qui doit avoir une expression constante. En désignant donc par n et G les valeurs de ces deux dernières quantités dans l'état d'équilibre, et par δn, δG les petites variations qu'elles éprouvent dans l'état de mouvement, on aura, en négligeant les quantités du second ordre,

$$\delta(n\mathrm{G}) = n\delta\mathrm{G} + \mathrm{G}\delta n = 0.$$

En remplaçant $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ par sa valeur $n^2 + 2n\delta n$ (je néglige δn^2), et en observant que $x^2 + y^2 = r^2$, la valeur de $\rho\varphi$ donnée au n° **5** deviendra

$$\rho\varphi = \rho\mathrm{V} + \frac{\rho n^2}{2}(x^2 + y^2) - p + \rho n r^2 \delta n = \rho\mathrm{W} - p + \rho n r^2 \delta n,$$

W représentant la quantité

$$\mathrm{V} + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Or, si l'on substitue cette valeur de $\rho\varphi$ dans la formule (4), on se trouvera évidemment conduit à une expression toute semblable à celle que l'on a discutée dans le n° 5 et qui nous a fourni le second membre de l'équation (5); mais on aura, de plus, un terme provenant de $\rho n r^2 \delta n$; ce terme nouveau sera

$$2\rho n \int dt \int\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, r^2 \delta n\, d\omega.$$

Occupons-nous successivement des deux parties dont la valeur de $\sum(m s^2)$ se trouve ainsi composée.

La première de ces deux parties, savoir

$$2\int dt \int\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)(\rho\mathrm{W} - p)\, d\omega,$$

peut d'abord être réduite à

$$2\rho \int dt \int\int (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,\mathrm{W}\, d\omega,$$

car on prouvera, comme au n° 5, que l'intégrale double

$$\int\int (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \gamma) p\, d\omega$$

est égale à zéro, du moins en excluant le cas particulier où il se formerait un vide dans l'intérieur de la masse. En regardant ensuite W comme composée d'une partie constante et d'une partie variable, on verra de même qu'on peut faire abstraction de la partie constante. Nous prendrons pour partie constante de W celle qui aurait lieu à la surface de l'ancienne figure d'équilibre solidifiée et soumise ensuite à un mouvement variable de rotation dont la vitesse angulaire serait $\frac{d\theta}{dt}$, c'est-à-dire la vitesse moyenne de rotation de notre masse liquide. Si l'on remplaçait cette masse par un tel corps solide, la quantité W ou plutôt $V + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2)$ aurait, en effet, à la surface, une valeur constante pour tous les points et indépendante du temps, la vitesse primitive n d'équilibre y étant conservée ainsi que la valeur de V qui dépend constamment des mêmes molécules réunies pour toujours en un système de forme invariable. La surface du corps solide auxiliaire et fictif que nous venons d'introduire jouissant dès lors dans nos calculs de toutes les propriétés dont jouissait au n° 5 la figure primitive d'équilibre de la masse liquide, nous arriverons ici au même résultat final que dans le n° 5, d'où naîtra, dans l'expression de $\sum (m\vartheta^2)$, la quantité suivante :

$$\rho^2 \int\int\int\int \frac{\zeta\zeta'\, d\omega\, d\omega'}{\Delta} - \rho \int\int g\zeta^2\, d\omega,$$

$d\omega$ étant à volonté ou l'élément de la surface libre du liquide, ou, ce qui est plus simple et tout aussi exact au degré d'approximation propre à nos formules, l'élément de la surface solide auxiliaire, et ζ représentant pour chaque élément de cette surface solide la hauteur positive ou négative du liquide qui la recouvre dans l'état de mouvement, tandis que g exprime la pesanteur dans l'état d'équilibre où la vitesse constante de rotation était n.

Quant au terme

$$2\rho n \int dt \int\int (u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma)\, r^2\, \delta n\, d\omega,$$

où l'on peut également regarder l'élément $d\omega$ comme appartenant à la surface solide auxiliaire, il devient $\left(\text{à cause de } \frac{d\zeta}{dt} = u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma\right)$,

$$2\rho n \int dt \iint \frac{d\zeta}{dt} r^2 \delta n d\omega;$$

δn est une simple fonction de t, et les limites de l'intégrale $\iint \zeta r^2 d\omega$, qui s'étend à toute la surface solide auxiliaire, sont indépendantes du temps; le terme en question peut donc s'écrire

$$2\rho n \int \delta n dt \frac{d}{dt} \iint \zeta r^2 d\omega, \quad \text{ou} \quad 2n \int \delta n \frac{d\delta G}{dt} dt,$$

puisque $\rho \iint \zeta r^2 d\omega$ ne diffère pas de la variation δG que le moment d'inertie éprouve dans l'état de mouvement. D'un autre côté, on a

$$\delta n = -\frac{n}{G}\delta G;$$

il vient donc

$$2n \int \delta n \frac{d\delta G}{dt} dt = -2\frac{n^2}{G} \int \delta G \frac{d\delta G}{dt} dt = -\frac{n^2}{G}(\delta G)^2.$$

Le dernier terme de l'expression de $\sum (m v^2)$ est ainsi

$$-\frac{n^2}{G}(\delta G)^2 \quad \text{ou} \quad -\frac{\rho^2 n^2}{G}\left(\iint \zeta r^2 d\omega\right)^2.$$

De là résulte finalement

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum (m v^2) &= \rho^2 \iiiint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} - \rho \iint g\zeta^2 d\omega \\ &\quad - \frac{\rho^2 n^2}{G}\left(\iint \zeta r^2 d\omega\right)^2 + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

et si l'on fait $\rho = 1$,

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum (m v^2) &= \iiiint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} - \iint g\zeta^2 d\omega \\ &\quad - \frac{n^2}{G}\left(\iint \zeta r^2 d\omega\right)^2 + \text{const.} \end{aligned} \right.$$

On peut observer que les formules (5) et (7), ou (6) et (8) ne dépendent que de quantités relatives à la surface; les vitesses u, v, w relatives aux points de l'intérieur en ont disparu complétement. On arriverait au reste à ces formules, en appliquant directement aux fluides incompressibles le principe des vitesses virtuelles combiné avec le principe de d'Alembert, puis passant de là au principe des forces vives, en remplaçant les vitesses virtuelles par les vitesses effectives. Mais la marche que nous avons suivie paraît préférable.

7. Revenons maintenant aux équations (2), ou plutôt à celles qu'on en déduit en posant

$$\rho \mathrm{V} + \frac{\rho}{2}(x^2+y^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - p = \rho\varphi,$$

lesquelles, en négligeant des termes très-petits du second ordre, peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{d\varphi}{dx} + 2v\frac{d\theta}{dt} + y\frac{d^2\theta}{dt^2},\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{d\varphi}{dy} - 2u\frac{d\theta}{dt} - x\frac{d^2\theta}{dt^2},\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{d\varphi}{dz}.
\end{aligned}$$

Quelle que soit la valeur de $\frac{d\theta}{dt}$, on peut la représenter par $n + \delta n$, n étant une constante et δn une quantité de l'ordre des perturbations. On embrassera ainsi dans un même calcul les deux hypothèses distinctes des n^{os} **5** et **6**. Pour exprimer, par exemple, qu'on adopte la première de ces deux hypothèses, il suffira de faire dans nos formules finales $\delta n = 0$. En négligeant les termes du second ordre δn^2, $2v\delta n$, $2u\delta n$, nous aurons

$$\rho\varphi = \rho\mathrm{V} + \frac{\rho n^2}{2}(x^2+y^2) - p + \rho n r^2 \delta n,$$

où $r^2 = x^2 + y^2$, et

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{d\varphi}{dx} + 2nv + y\frac{d\delta n}{dt},\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{d\varphi}{dy} - 2nu - x\frac{d\delta n}{dt},\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{d\varphi}{dz}.
\end{aligned}\right.$$

Différentions les équations (9) par rapport à x, y, z respectivement, puis ajoutons, et rappelons-nous que

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Il nous viendra

$$0 = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} + 2n\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right):$$

d'où

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + 2n\left(\frac{d^3v}{dx\,dt^2} - \frac{d^3u}{dy\,dt^2}\right) = 0.$$

Mais, en différentiant la deuxième des équations (9) par rapport à x, et la première par rapport à y, puis retranchant, on a

$$\frac{d^2v}{dx\,dt} - \frac{d^2u}{dy\,dt} = -2n\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) - 2\frac{d\delta n}{dt} = 2n\frac{dw}{dz} - 2\frac{d\delta n}{dt}.$$

Donc

$$\frac{d^3v}{dx\,dt^2} - \frac{d^3u}{dy\,dt^2} = 2n\frac{d}{dz}\left(\frac{dw}{dt}\right) - 2\frac{d^2\delta n}{dt^2} = 2n\frac{d^2\varphi}{dz^2} - 2\frac{d^2\delta n}{dt^2},$$

en vertu de la dernière des équations (9). On est ainsi conduit à l'équation remarquable

$$(10)\qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + 4n^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 4n\frac{d^2\delta n}{dt^2}.$$

L'équation

$$\rho\varphi = \rho V + \frac{\rho n^2}{2}(x^2 + y^2) - p + \rho n r^2 \delta n,$$

appliquée à la surface libre du liquide, fournit encore un résultat simple, qu'il faut indiquer, ou plutôt rappeler; car on l'a déjà obtenu plus haut. Le long de cette surface libre, la pression p est constante. Quant à la quantité

$$V + \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2),$$

c'est celle que nous avons représentée par W au n° 5 et au n° 6, où l'on a vu qu'elle se compose d'une partie constante et d'une partie variable, qui est

$$\rho \iint \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} - g\zeta,$$

ζ, g, Δ ayant la signification indiquée aux numéros cités. Ainsi, à la surface libre, on a

$$(11) \qquad \varphi = \rho \iint \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} - g\zeta + nr^2 \delta n + \text{const.},$$

ou, si l'on prend $\rho = 1$,

$$(12) \qquad \varphi = \iint \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} - g\zeta + nr^2 \delta n + \text{const.}$$

Pour plus de simplicité, on pourra d'ailleurs appliquer cette équation à la surface primitive d'équilibre, solidifiée et animée de la vitesse de rotation $n + \delta n$; car cette surface ne diffère que très-peu de la surface libre en mouvement, tant que les quantités ζ restent très-petites.

On se souvient aussi que l'on a trouvé, en considérant la composante de la vitesse suivant la normale à l'élément $d\omega$,

$$(13) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma.$$

Ces conditions définies relatives à la surface et celle qui exprime que, dans le cas d'un noyau solide, les molécules liquides ne peuvent que glisser sur le noyau, doivent être jointes aux équations indéfinies (9) et (10). Réunies aux conditions de l'état initial, elles déterminent les arbitraires qu'introduit l'intégration des équations indéfinies. Il ne faut pas non plus oublier que ζ doit toujours vérifier l'équation

$$\iint \zeta d\omega = 0,$$

puisque le volume total du liquide est invariable. Enfin, s'il s'agit d'un système entièrement fluide et sans noyau intérieur, il faut placer l'origine O des coordonnées au centre de gravité de ce système, et dès lors on doit avoir

$$\iint x\zeta d\omega = 0, \qquad \iint y\zeta d\omega = 0, \qquad \iint z\zeta d\omega = 0.$$

Est-il nécessaire de faire observer que quelques-unes des formules précédentes se simplifient quand on pose $\delta n = 0$? Les équations (9) et (10) se réduisent alors à

$$
(14) \qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dx} + 2nv, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dy} - 2nu, \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dz}, \end{cases}
$$

et

$$
(15) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) + 4n^2\frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.
$$

Quant à l'équation (11), elle devient

$$
(16) \qquad \varphi = \rho\iint\frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} - g\zeta + \text{const.},
$$

et plus simplement encore

$$
(17) \qquad \varphi = \iint\frac{\zeta' d\omega'}{\Delta} - g\zeta + \text{const.},
$$

en prenant $\rho = 1$.