JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un théorème relatif à l'intégrale eulérienne de seconde espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 157-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__157_0>

Sur un théorème relatif à l'intégrale eulérienne de seconde espèce;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Il s'agit de l'équation célèbre

$$\text{(A)}\qquad \Gamma(t)\,\Gamma\left(t+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(t+\frac{n-1}{n}\right)=n^{\frac{1}{2}-nt}.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.\Gamma(nt),$$

que Gauss a établie de la manière la plus simple, en définissant $\Gamma(t)$ comme la limite vers laquelle tend l'expression

$$\frac{1.2.3\ldots s.s^{t-1}}{t(t+1)(t+2)\ldots(t+s-1)},$$

lorsque le nombre entier s augmente à l'infini. Cette définition, qui permet de donner à t une valeur quelconque, positive ou négative, réelle ou imaginaire, offre sans contredit la base la meilleure pour la théorie de la fonction $\Gamma(t)$. Elle fournit d'ailleurs de suite la valeur de cette fonction en intégrale définie, et ne laisse pour ainsi dire échapper aucune des particularités du sujet, tout en lui donnant plus d'étendue.

Au point de vue des progrès du calcul intégral, on a toutefois naturellement désiré d'avoir une démonstration de la formule (A) uniquement tirée des procédés propres à ce calcul, et de la définition de Legendre, qui pose

$$\text{(B)}\qquad \Gamma(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx:$$

cela exige que l'on se borne d'abord aux valeurs de t positives, ou du moins à partie réelle positive, pour lesquelles seules l'intégrale a un sens précis; sauf à prolonger plus tard la fonction $\Gamma(t)$ hors de ces limites (comme je l'ai fait au tome XI du Journal de M. Crelle, page 5, à une époque où la définition générale de Gauss m'était inconnue) au moyen de l'équation

$$\text{(C)}\qquad \Gamma(t+1)=t\Gamma(t)\quad\text{ou}\quad\Gamma(t)=\Gamma(t+1):t,$$

que l'on obtient de suite quand la partie réelle de t est positive, et que l'on peut étendre par un complément de définition au cas où cette partie réelle est égale à o ou comprise entre o et -1, puis au cas où elle est égale à -1 ou comprise entre -1 et -2, et ainsi de suite; d'où résulte une valeur de $\Gamma(t)$ en intégrale définie successivement propre à ces divers cas.

Il faut citer surtout, comme remplissant parfaitement ce but spécial de tirer du calcul intégral seul les propriétés des intégrales eulériennes, un excellent Mémoire de M. Lejeune-Dirichlet (Journal de M. Crelle, tome XV). Je me place au même point de vue que l'illustre géomètre; mais on verra que ma méthode pour la formule (A) diffère entièrement de la sienne, où l'on opère sur le logarithme de $\Gamma(t)$. Je ne dirai qu'un mot des formules

$$\text{(D)} \qquad \int_0^1 x^{r-1}(1-x)^{t-1}\,dx = \frac{\Gamma(r)\Gamma(t)}{\Gamma(r+t)},$$

et

$$\text{(E)} \qquad \Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}$$

qu'Euler, du reste, connaissait déjà. Pour la formule (D), on a la démonstration toute simple de Poisson, rappelée au tome IV du présent Journal, page 227. Quant à la formule (E), elle se déduit de l'équation (D) en y prenant $r = 1 - t$, ce qui donne

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \int_0^1 x^{-t}(1-x)^{t-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{y^{t-1}\,dy}{1+y}.$$

L'intégrale relative à y est composée de deux parties où y va de o à 1, puis de 1 à ∞ : on ramène la seconde aux limites de la première en remplaçant y par $\frac{1}{y}$, et l'on a

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \int_0^1 (y^{t-1} + y^{-t})\frac{dy}{1+y},$$

après quoi, développant en série suivant les puissances de y sous le signe d'intégration, l'on obtient

$$\Gamma(t)\Gamma(1-t) = \frac{1}{t} - \frac{2t}{t^2-1} + \frac{2t}{t^2-4} - \ldots = \frac{\pi}{\sin(\pi t)}.$$

On pourrait varier ces démonstrations; mais comme je n'ai en vue, pour le moment, que la formule (A), je termine ces préliminaires en écrivant l'équation connue

$$\text{(F)} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = n^{-\frac{1}{2}}.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}},$$

trop facile à déduire de la formule (E) pour que je m'y arrête.

Cela posé, je vais montrer que la formule (A) est une conséquence presque immédiate de la valeur que j'ai donnée d'une intégrale définie multiple dans le dernier cahier de ce Journal (page 133). En faisant

$$P = (1 + ax_1)(1 + ax_1 + ax_2)\ldots(1 + ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1})$$

et

$$Q = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}), \quad p = \frac{1-\mu}{n}, \quad q = \frac{\mu}{n} - 1.$$

cette intégrale est

$$U = \int\int\cdots\int P^p Q^q\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{n-1},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs positives de $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour lesquelles on a $x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1$. Je me suis assuré que

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n \left(\frac{\sqrt[n]{1+a} - 1}{a}\right)^{\mu-1}.$$

On peut supposer que la première intégration est relative à x_{n-1} et qu'elle a lieu entre les limites 0 et $1 - x_1 - \ldots - x_{n-2}$. En substituant à x_{n-1} une variable y_{n-1} telle que

$$y_{n-1}(1 - x_1 - \ldots - x_{n-2}) = x_{n-1},$$

les limites pour y_{n-1} seront 0 et 1. La seconde intégration relative à x_{n-2}, entre les limites 0 et $1 - x_1 - \ldots - x_{n-3}$, sera de même remplacée par une intégration entre 0 et 1, en faisant

$$y_{n-2}(1 - x_1 - \ldots - x_{n-3}) = x_{n-2}.$$

On continuera ainsi; et arrivé à l'intégrale relative à x_2, entre les limites 0 et $1 - x_1$, on posera

$$y_2(1 - x_1) = x_2,$$

de manière à avoir 0 et 1 pour limites de y_2. Quant à la dernière intégration, relative à x_1, c'est entre ces limites 0 et 1 qu'elle doit s'opérer.

Or il arrive qu'en posant $a = -1$, toutes les intégrations relatives à $x_1, y_2, y_3, \ldots, y_{n-1}$, entre les limites fixes 0 et 1, deviennent indépendantes les unes des autres; en sorte qu'on n'a plus à effectuer qu'un produit d'intégrales eulériennes de première espèce, dont chacune s'exprime en Γ par la formule (D). Cela tient à ce que, pour $a = -1$, les quantités $1 + ax_1$, $1 + ax_1 + ax_2, \ldots$, $1 + ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1}$ se réduisent à celles-ci $1 - x_1$, $1 - x_1 - x_2, \ldots$, $1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}$, et par conséquent se décomposent comme elles en produits où les variables sont séparées, puisque l'on a

$$1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_m = (1 - x_1)(1 - y_2)(1 - y_3)\ldots(1 - y_m).$$

Un calcul facile donne, réductions faites,

$$U = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^{n-1} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right)},$$

ou bien

$$U = \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^{n-1} . n^{-\frac{1}{2}}.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right)},$$

eu égard à l'équation (F).

Mais la formule générale

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n \left(\frac{\sqrt[n]{1+a}-1}{a}\right)^{\mu-1}$$

devient, pour $a = -1$,

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n.$$

En égalant cette valeur à la précédente, on a donc

$$\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{\mu+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-\mu}.(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.\Gamma(\mu).$$

Maintenant remplacez μ par nt, et vous aurez précisément la formule (A) qu'il s'agissait de démontrer.