JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DE LA GOURNERIE

Étude sur la courbure des surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 145-156.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__145_0>

ÉTUDE SUR LA COURBURE DES SURFACES;

PAR M. DE LA GOURNERIE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École Polytechnique et au Conservatoire des Arts et Métiers.

Nous nous proposons d'étudier la courbure des surfaces d'une manière plus intime que lorsqu'on se borne à considérer les rayons des cercles osculateurs des sections. Nous présenterons d'abord quelques considérations sur les sections planes des surfaces.

I.

1. Par un point pris arbitrairement sur une surface, faisons passer un plan vertical; nous aurons, en considérant la section,

$$dx = d\eta \cos\alpha, \quad dy = d\eta \sin\alpha,$$

et, par suite,

$$\frac{dz}{d\eta} = \cos\alpha\,(q \operatorname{tang}\alpha + p),$$

η étant l'abscisse mesurée sur la trace horizontale du plan sécant, α l'angle de ce plan avec l'axe des abscisses, et x, y, z, p, q,... ayant leur signification ordinaire.

Par des différentiations successives, on obtient

$$\frac{d^2 z}{d\eta^2} = \cos^2\alpha\,(t \operatorname{tang}^2\alpha + 2s \operatorname{tang}\alpha + r),$$

$$\frac{d^3 z}{d\eta^3} = \cos^3\alpha\,(v \operatorname{tang}^3\alpha + 3w \operatorname{tang}^2\alpha + 3u \operatorname{tang}\alpha + u),$$

et, généralement,

$$\frac{d^n z}{d\eta^n} = \cos\alpha \left(\frac{d\dfrac{d^{n-1} z}{d\eta^{n-1}}}{dy} \operatorname{tang}\alpha + \frac{d\dfrac{d^{n-1} z}{d\eta^{n-1}}}{dx} \right).$$

Nous représenterons les seconds membres de ces équations par Z_1, $Z_2, Z_3, \ldots, Z_n$.

2. Si une surface est telle, qu'en chacun de ses points une même valeur de $\operatorname{tang}\alpha$ anéantisse simultanément deux dérivées consécutives Z_n et Z_{n+1}, cette valeur anéantira toutes les dérivées d'un ordre plus élevé.

Pour prouver ce théorème, considérons les équations

$$(1) \qquad Z_n = 0, \qquad \frac{dZ_n}{dy}\operatorname{tang}\alpha + \frac{dZ_n}{dx} = 0,$$

qui, par hypothèse, doivent subsister pour tout point de la surface. Nous pouvons les différentier par rapport à chacune des variables x et y; prenant leurs dérivées par rapport à x, et éliminant entre elles $\frac{d\operatorname{tang}\alpha}{dx}$, on a

$$\frac{dZ_n}{dx}\left(\frac{d^2Z_n}{dy\,d\operatorname{tang}\alpha}\operatorname{tang}\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx\,d\operatorname{tang}\alpha} + 2\frac{dZ_n}{dy}\right) = \frac{dZ_n}{d\operatorname{tang}\alpha}\left(\frac{d^2Z_n}{dx\,dy}\operatorname{tang}\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx^2}\right).$$

On obtient de la même manière, en différentiant par rapport à y et éliminant $\frac{d\operatorname{tang}\alpha}{dy}$,

$$\frac{dZ_n}{dy}\left(\frac{d^2Z_n}{dy\,d\operatorname{tang}\alpha}\operatorname{tang}\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx\,d\operatorname{tang}\alpha} + 2\frac{dZ_n}{dy}\right) = \frac{dZ_n}{d\operatorname{tang}\alpha}\left(\frac{d^2Z_n}{dy^2}\operatorname{tang}\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx\,dy}\right).$$

Divisons ces équations l'une par l'autre; le rapport des premiers membres sera $-\operatorname{tang}\alpha$ en vertu de la seconde équation (1), et nous aurons

$$\frac{d^2Z_n}{dy^2}\operatorname{tang}^2\alpha + 2\frac{d^2Z_n}{dx\,dy}\operatorname{tang}\alpha + \frac{d^2Z_n}{dx^2} = 0 \quad \text{ou} \quad Z_{n+2} = 0,$$

Z_{n+3} et toutes les dérivées d'un ordre plus élevé seront évidemment nulles comme Z_{n+2}.

Si une surface est telle, que pour chacun de ses points une dérivée Z_n ait une racine double, cette valeur de $\operatorname{tang}\alpha$ sera une racine de $\frac{dZ_n}{dx}$, et, par suite, de Z_{n+1}; elle anéantira ainsi deux dérivées consécutives, et, d'après ce que nous venons de voir, toutes les dérivées suivantes.

3. Si les deux premières dérivées Z_1 et Z_2 sont nulles en même temps, toutes le seront, et une droite horizontale passera par chacun des points de la surface; et en effet, si l'on élimine $\tang \alpha$ entre ces deux dérivées égalées à zéro, on trouve l'équation connue des surfaces engendrées par une droite toujours horizontale.

Supposons maintenant que la seconde dérivée et la troisième soient nulles simultanément,

$$t \operatorname{tang}^2 \alpha + 2s \operatorname{tang} \alpha + r = 0, \tag{2}$$

$$v \operatorname{tang}^3 \alpha + 3w \operatorname{tang}^2 \alpha + 3u \operatorname{tang} \alpha + u = 0. \tag{3}$$

Monge a montré que dans ce cas la surface était réglée. Une petite discussion paraît ici nécessaire.

Si une seule des deux racines de l'équation (2) satisfait à (3), par tout point on pourra faire une section rectiligne, et la surface sera gauche.

Si les deux racines de l'équation (2) sont égales, cette valeur de $\operatorname{tang} \alpha$ satisfera à l'équation (3), et la surface sera réglée, et même développable, car il serait facile de reconnaître que le plan tangent ne change pas quand on déplace le point de contact sans faire varier α.

Dans le cas où les deux racines de l'équation (2) satisfont l'une et l'autre à l'équation (3), si ces racines sont réelles, la surface est doublement réglée; si elles deviennent imaginaires, la surface n'admet plus de sections rectilignes, mais elle est toujours du second degré, car le changement ne peut provenir que d'une modification dans les grandeurs relatives des coefficients numériques de son équation. Si les racines communes sont égales, la surface toujours du second degré devient développable.

D'après cela, en exprimant que l'équation (3) est exactement divisible par l'équation (2), on obtiendra une équation aux différences partielles qui représentera les surfaces du second ordre

$$(ut^2 - 3wrt + 2vrs)^2 + (vr^2 - 3utr + 2uts)^2 = 0.$$

Nous pourrions déduire d'autres conséquences du théorème de l'article **2**, mais celles que nous venons d'indiquer suffisent dans cette étude, où nous ne considérerons pas les dérivées au delà du troisième ordre.

II.

4. Soient α, β et γ les angles que forme avec les axes une tangente à la surface au point considéré, et R le rayon de courbure de la section normale qui contient cette tangente. On a, d'après une formule connue,

$$(4)\qquad R^2 = \frac{p^2+q^2+1}{Z_2^2},$$

en posant

$$Z_2 = t\cos^2\beta + 2s\cos\beta\cos\alpha + r\cos^2\alpha.$$

La différentiation donne

$$(5)\quad R\,dR = -(p^2+q^2+1)\frac{dZ_2}{Z_2^3} + \frac{(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha}{Z_2^2}\,dS,$$

en faisant

$$Z_3 = v\cos^3\beta + 3w\cos^2\beta\cos\alpha + 3u\cos\beta\cos^2\alpha + u\cos^3\alpha,$$

dS est la différentielle de l'arc, égale à $\frac{dx}{\cos\alpha}$ et à $\frac{dy}{\cos\beta}$.

Les polynômes représentés par Z_2 et Z_3 ne sont pas les mêmes que dans la première partie de cette étude, mais en les divisant respectivement par $\cos^2\alpha$ et $\cos^3\alpha$, ils se trouvent composés en $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ comme les premiers en tang α.

Différentiant la valeur de Z_2, on trouve

$$(6)\quad dZ_2 = Z_3\,dS + 2(s\cos\beta + r\cos\alpha)\,d\cos\alpha + 2(t\cos\beta + s\cos\alpha)\,d\cos\beta;$$

il faut déterminer $d\cos\alpha$ et $d\cos\beta$.

Le plan sécant contient la normale à la surface et la tangente déterminée par les angles α, β et γ; son équation est

$$\begin{aligned}(\cos\beta + q\cos\gamma)(x'-x) - (\cos\alpha + p\cos\gamma)(y'-y)&\\ + (p\cos\beta - q\cos\alpha)(z'-z) = 0&,\end{aligned}$$

x', y', z', étant les coordonnées variables.

Les différentielles $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, doivent être telles, que la nouvelle tangente soit dans le plan sécant. Cette condition donne

$$(\cos\beta + q\cos\gamma)\,d\cos\alpha - (\cos\alpha + p\cos\gamma)\,d\cos\beta + (p\cos\beta - q\cos\alpha)\,d\cos\gamma = 0.$$

Les axes étant rectangulaires, et les angles α, β et γ appartenant à une tangente, on a

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l}\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,\\ p\cos\alpha + q\cos\beta - \cos\gamma = 0,\end{array}\right.$$

d'où l'on déduit

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0,$$
$$p\,d\cos\alpha + q\,d\cos\beta - d\cos\gamma + Z_2\,dS = 0.$$

Nous avons maintenant trois équations pour déterminer $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$ et $d\cos\gamma$, nous en déduisons

$$d\cos\alpha = -\frac{p}{p^2+q^2+1} Z_2\,dS,\quad d\cos\beta = -\frac{q}{p^2+q^2+1} Z_2\,dS;$$

portant ces valeurs dans l'équation (6), on a

$$dZ_2 = Z_3\,dS - 2\frac{(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha}{p^2+q^2+1} Z_2,$$

et enfin, d'après les équations (5) et (4),

$$(8)\quad R\frac{dR}{dS} = \frac{-(p^2+q^2+1)Z_3 + 3Z_2[(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha]}{Z_2^3},$$

$$(9)\quad \frac{dR}{dS} = \frac{(p^2+q^2+1)Z_3 - 3Z_2[(ps+qt)\cos\beta + (pr+qs)\cos\alpha]}{Z_2^2\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Il est à remarquer que $R\frac{dR}{dS}$ est égal au rayon de courbure de la développée de la section considérée; car, si ε est l'angle de contingence, les rayons de courbure de la section et de sa développée sont $\frac{dS}{\varepsilon}$ et $\frac{dR}{\varepsilon}$.

On peut construire une parabole surosculatrice d'une courbe en un point donné, quand on connaît le rayon de courbure R et sa dérivée

$\frac{dR}{dS}$. Si $x^2 - 2pz = 0$ est l'équation de la parabole, on a

$$p = \frac{R}{\left[1 + \left(\frac{1}{3}\frac{dR}{dS}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \qquad x = \frac{R\left(\frac{1}{3}\frac{dR}{dS}\right)}{\left[1 + \left(\frac{1}{3}\frac{dR}{dS}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}};$$

la première équation fait connaître le paramètre de la parabole; la seconde, l'abscisse du point où la surosculation peut être établie.

5. Proposons-nous de trouver sur une surface les sections normales qui peuvent être surosculées par un cercle. Pour les déterminer, il faut égaler à zéro la valeur de $\frac{dR}{dS}$,

$$(10)\quad \begin{cases} (p^2 + q^2 + 1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) + w\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + u\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right) + \frac{u}{3}\right) \\ - \left[(ps + qt)\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + (pr + qs)\right]\left[t\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + 2s\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} + r\right] = 0. \end{cases}$$

Cette équation, étant du troisième degré, donnera toujours au moins une valeur réelle pour $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$, et par suite une surface a, en tout point, une section normale surosculée par un cercle; elle en a quelquefois trois, dont deux peuvent se confondre. Enfin, dans quelques points exceptionnels, il y en a une infinité. Si nous remplaçons $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ par $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (10), nous aurons l'équation différentielle des courbes qui, en chacun de leurs points, sont tangentes aux sections normales surosculées par un cercle :

$$(11)\quad \begin{cases} (p^2 + q^2 + 1)\left[\frac{v}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + w\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + u\frac{dy}{dx} + \frac{u}{3}\right] \\ - \left[(ps + qt)\frac{dy}{dx} + (pr + qs)\right]\left[t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r\right] = 0. \end{cases}$$

Pour la surface du second degré, Z_2 est facteur commun dans l'équation (10); il représente les génératrices rectilignes qui sont, en effet, surosculées par un cercle d'un rayon infini. En le faisant disparaître, l'équation devient du premier degré : d'où l'on voit qu'en tout point de la surface du second degré il existe une seule section normale surosculée par un cercle d'un rayon fini.

Pour la surface réglée générale, Z_3 et Z_2 ont un facteur commun du premier degré qui représente les génératrices rectilignes. En le faisant disparaître, l'équation (10) devient du second degré; quelquefois il y aura deux solutions, d'autres fois il n'y en aura pas.

Il existe une infinité de surfaces du second ordre osculatrices en un de leurs sommets d'une surface quelconque en un point donné. Ces surfaces du second ordre traversent la surface considérée, et les courbes d'intersection sont évidemment tangentes aux sections normales surosculées par un cercle. Si la surface osculée est du second ordre, elle aura trois lignes communes avec la surface osculatrice; deux droites et une courbe tangente à la section normale surosculée par un cercle de rayon fini.

6. Pour la surface du second degré nous pourrons faire disparaître de l'équation (10) le facteur $\left[t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2s\frac{dy}{dx} + r\right]$ qui représente les génératrices, et nous aurons

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left[\frac{v}{3t}(p^2+q^2+1) - (ps+qt)\right]\frac{dy}{dx} \\ &+ \left[\frac{u}{3r}(p^2+q^2+1) - (pr+qs)\right] = 0. \end{aligned}\right.$$

Appliquant cette équation à la surface à centre

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

on trouve, après diverses simplifications qui se présentent spontanément,

$$\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{xdx}{a^2} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{ydy}{b^2} = 0;$$

d'où

$$(13)\qquad \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2} + \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2} = C.$$

Donc les courbes qui sont toujours tangentes aux sections normales surosculées par un cercle (comme les lignes de courbure aux sections principales), se projettent sur l'un quelconque des plans principaux de la surface suivant des courbes du second degré semblables entre elles. Ces projections sont des hyperboles sur le plan perpendiculaire à l'axe parallèle aux sections circulaires, et des ellipses sur les deux autres plans principaux.

Aux sommets de la surface, une section normale quelconque est surosculée par un cercle, mais elle n'est pas touchée par une des lignes que représente l'équation (13). Ces courbes enveloppent les sommets sans y passer; deux d'entre elles seulement se croisent aux sommets qui sont sur l'axe parallèle aux sections circulaires. Leur projection sur le plan perpendiculaire à cet axe est formée de deux droites que l'on obtient quand on fait la constante nulle dans l'équation (13). Elles sont par conséquent planes.

Si la surface est de révolution, les courbes sont des parallèles; si c'est une sphère, l'équation (13) disparaît, et toute courbe satisfait au problème.

Considérons maintenant la surface du second degré dépourvue de centre

$$z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b},$$

portant les dérivées partielles dans l'équation (12), on trouve apres l'intégration

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \mathrm{C},$$

et

$$z = \left(1 - \frac{b}{a}\right)\frac{x^2}{a} + b\mathrm{C}.$$

On voit que les projections des courbes sont des paraboles sur les plans principaux de la surface, et des ellipses sur le plan tangent au sommet.

7. Nous prendrons pour exemple de surface gauche la surface de la vis à filets carrés. Elle a pour équation

$$z = h\omega,$$

h est une constante et ω l'azimut de la projection horizontale d'un point. Si l'on appelle ρ la distance de ce point à l'axe vertical, on a

$$\frac{d\omega}{dx} = -\frac{\sin\omega}{\rho}, \quad \frac{d\omega}{dy} = \frac{\cos\omega}{\rho}, \quad \frac{d\rho}{dx} = \cos\omega, \quad \frac{d\rho}{dy} = \sin\omega.$$

Calculant d'après ces formules les dérivées partielles de la fonction z, et les portant dans l'équation (9), on obtient

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{h^2+\rho^2}{h^2}\left[\dfrac{1}{3}\cos 3\omega\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^3 - \sin 3\omega\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 - \cos 3\omega\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{1}{3}\sin 3\omega\right] \\ -\left(\sin\omega\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \cos\omega\right)\left[\dfrac{1}{2}\sin 2\omega\left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 + \cos 2\omega\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \dfrac{1}{2}\sin 2\omega\right] \end{array}\right\} = 0.$$

Dans la surface de la vis à filets carrés les courbures sont identiques le long des différentes génératrices; on peut donc se borner à étudier ce qui se passe pour l'une d'elles, celle dont l'azimut est nul. Faisant $\omega = 0$, on trouve

$$(14) \qquad \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\left[\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 - \frac{3\rho^2}{h^2+\rho^2}\right] = 0.$$

Si l'on appelle μ l'angle que forme avec l'axe des abscisses la projection de la tangente à la section normale qui est surosculée par un cercle, on a

$$\operatorname{tang}\mu\left(\operatorname{tang}^2\mu - \frac{3\rho^2}{h^2+\rho^2}\right) = 0.$$

Nous trouvons trois valeurs pour $\operatorname{tang}\mu$: l'une nulle indique la génératrice rectiligne; nous aurions pu la faire disparaître dès le commencement du calcul en mettant en évidence et supprimant le facteur $\left(\cos\omega\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} - \sin\omega\right)$. Les autres valeurs de μ sont toujours réelles, et, par suite, en tout point de la surface deux sections normales ont un contact du troisième ordre avec leur cercle osculateur. Si nous remplaçons $\operatorname{tang}\mu$ par l'expression analytique de la tangente de l'angle qu'une courbe fait avec son rayon vecteur, nous aurons l'équation différentielle des lignes tangentes aux sections normales qui sont surosculées par un cercle :

$$\frac{\rho\, d\omega}{d\rho} = \sqrt{3}\,\frac{\rho}{\sqrt{h^2+\rho^2}}.$$

Intégrant, on a

$$\rho = \frac{h}{2} e^{\frac{\omega - \omega'}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\rho'}{h} + \sqrt{\frac{\rho'^2}{h^2} + 1} \right) - \frac{h}{2} e^{-\frac{\omega - \omega'}{\sqrt{3}}} \left(\frac{\rho'}{h} + \sqrt{\frac{\rho'^2}{h^2} + 1} \right)^{-1};$$

ρ' et ω' sont les coordonnées du point par lequel on fait passer la courbe. En donnant successivement les deux signes au radical, on trouve les deux courbes qui passent par chaque point.

Les cosinus des angles α, β et γ sont toujours liés par les équations (7); la seconde se simplifie parce qu'ici p est nul. Avec ces deux équations et l'équation (14) on peut calculer $\cos\alpha$; on trouve que sa valeur est $\pm \frac{1}{2}$, d'où il résulte que les lignes que nous étudions rencontrent les génératrices rectilignes, et se coupent elles-mêmes suivant des angles de 60 degrés.

8. L'équation (11) se simplifie encore pour les surfaces de révolution; ses deux termes contiennent alors, en effet, un facteur commun qui représente les parallèles. On peut le mettre en évidence en prenant les équations aux différences partielles des trois premiers ordres des surfaces de révolution, et éliminant avec elles cinq dérivées, par exemple p, q, w, u et v.

Nous allons opérer d'une manière différente qui permettra de discuter plus facilement les résultats.

Soit

$$z = f(\rho)$$

une équation qui représentera la surface de révolution ou sa méridienne, suivant que l'on considérera ρ comme un rayon vecteur ou comme une abscisse.

Employant le même artifice qu'à l'article **7**, nous calculons les dérivées partielles, et, après y avoir fait ω nul, nous portons leurs valeurs dans l'équation (11); nous avons ainsi

$$(15) \qquad \tan^2\mu = \rho^2 \frac{\frac{dz}{d\rho}\left(\frac{d^2z}{d\rho^2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left[\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + 1\right]\frac{d^3z}{d\rho^3}}{\rho\frac{d^2z}{d\rho^2} - \frac{dz}{d\rho}\left[\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 + 1\right]},$$

μ représente comme à l'article **7** l'angle que forme avec l'axe des abscisses la projection de la tangente à la section normale qui est surosculée par un cercle, $\operatorname{tang}\mu$ remplace $\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$.

L'équation (15) n'est que du second degré; le coefficient du terme du troisième degré est nul, ce qui donne pour μ une valeur de 90 degrés qui indique les parallèles.

Si l'on veut avoir l'équation des courbes, il faudra remplacer $\operatorname{tang}\mu$ dans l'équation (15) par $\rho\frac{d\omega}{d\rho}$, et intégrer.

Appelant g le rayon de courbure de la méridienne, nous aurons

$$g = -\frac{\left[1+\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{d\rho^2}},$$

et différentiant,

$$\frac{dg}{d\rho} = -3\frac{\left[1+\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{d^2z}{d\rho^2}\right)^2}\left\{\frac{dz}{d\rho}\left(\frac{d^2z}{d\rho^2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left[1+\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]\frac{d^3z}{d\rho^3}\right\}.$$

D'après ces valeurs l'équation (14) devient

$$(16)\qquad \operatorname{tang}^2\mu = -\frac{1}{3}\rho^2\frac{\frac{d^2z}{d\rho^2}\frac{dg}{d\rho}}{\rho\left[1+\left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} + g\frac{dz}{d\rho}};$$

$\operatorname{tang}\mu$ est constamment nul pour le tore et le cône; les méridiens de ces surfaces satisfont en effet à la question. Pour les autres surfaces de révolution on trouve deux séries de lignes qui se croisent en rencontrant toujours les méridiens sous des angles égaux. Ces lignes disparaissent quand la valeur de $\operatorname{tang}^2\mu$ est négative. On déduit de l'équation (16) une méthode géométrique pour reconnaître quand ces lignes existent réellement.

Si l'on égale à zéro le dénominateur du second membre de l'équation (15), on trouve, en intégrant, un cercle qui a son centre sur l'axe. La surface est alors une sphère. Le numérateur de l'équation (15) devient nul en même temps que le dénominateur, et tang μ est arbitraire.

9. Si l'on étudie la courbure d'une surface en un point, on pourra simplifier les équations (8) et (9) en supposant le plan tangent horizontal. On aura alors

$$(17) \qquad \mathrm{R}\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}} = -\frac{v\sin^3\alpha + 3w\sin^2\alpha\cos\alpha + 3u\sin\alpha\cos^2\alpha + u\cos^3\alpha}{(t\sin^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + r\cos^2\alpha)^3}$$

et

$$(18) \qquad \frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}} = \frac{v\sin^3\alpha + 3w\sin^2\alpha\cos\alpha + 3u\sin\alpha\cos^2\alpha + u}{(t\sin^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + r\cos^2\alpha)^2}.$$

Si l'on projette sur le plan tangent les centres de courbure des développées des sections normales, on a une courbe qui est représentée par (15), l'azimut étant α et le rayon vecteur étant $\frac{\mathrm{R}\,d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}}$. Cette courbe est généralement du sixième degré; elle descend au cinquième degré pour les surfaces gauches, et au quatrième pour celles qui sont du second ordre. Elle a deux asymptotes qui sont parallèles aux asymptotes de l'indicatrice.

La courbe située dans le plan tangent et telle, que ses rayons vecteurs seraient proportionnels aux dérivées $\frac{d\mathrm{R}}{d\mathrm{S}}$, n'est que du quatrième degré. Son équation en coordonnées rectilignes est

$$(ty^2 + 2sxy + rx^2)^2 + vy^3 + 3wxy^2 + 3uxx^2y + ux^3 = 0.$$

Le degré de l'équation s'abaisse d'une unité pour les surfaces gauches. Pour les surfaces du second ordre, l'équation devient

$$ty^2 + 2sxy + rx^2 + \frac{v}{t}y + \frac{u}{r}x = 0;$$

aux ombilics la courbe est un cercle.

On voit que les surfaces du second ordre et les surfaces simplement réglées forment, pour les courbures, des catégories spéciales, et qu'une surface ne peut être surosculée par une surface du second ordre ou par une surface réglée qu'en des points exceptionnels.