JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'équation différentielle du premier ordre $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 143-144.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__143_0>

SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y);$$

PAR M. J. LIOUVILLE.

On sait que pour trouver l'intégrale en série de l'équation

$$\text{(A)} \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

telle que la fournit le théorème de Taylor, il faut exécuter sur $f(x, y)$ ou f les opérations successives que voici :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f = f_1(x, y), \quad \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} f = f_2(x, y), \quad \text{etc.};$$

après quoi l'on a

$$y = b + \frac{x-a}{1} f(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f_1(a, b) + \ldots,$$

b étant la valeur arbitraire de y pour $x = a$.

Il est bon, je crois, d'ajouter que la considération de la fonction

$$f_1 = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} f$$

peut être quelquefois utile à un autre point de vue. En effet, si f renferme une constante indéterminée α qui disparaisse dans f_1, ou plus généralement qui disparaisse dans $\varphi(f) f_1$, $\varphi(f)$ désignant une fonction connue quelconque de f, je dis que la formule

$$\varphi(f) \frac{df}{d\alpha} (dy - f dx)$$

remplira la condition d'intégrabilité relativement aux deux variables x et y, en sorte que l'intégrale sous forme finie de l'équation (A) sera

$$\int \varphi(f) \frac{df}{d\alpha} (dy - f dx) = \text{constante}.$$

La démonstration est très-simple. Puisque $\varphi(f)f_1$ ne contient plus α, on a

$$\frac{d.\varphi(f)f_1}{d\alpha} = 0.$$

Développez la différentiation indiquée, après avoir remplacé f_1 par sa valeur

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}f;$$

et vous verrez que l'équation qu'on vient de poser peut s'écrire

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right) + \frac{d}{dy}\left(f\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}\right) = 0;$$

elle exprime donc précisément que

$$\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}(dy - f\,dx)$$

est une différentielle exacte, comme nous l'avions avancé.

Observons, en terminant, que si l'équation

$$\frac{d.\varphi(f)f_1}{d\alpha} = 0,$$

sans avoir lieu en général, se trouvait vérifiée pour une certaine valeur particulière de la constante α, le produit

$$\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}(dy - f\,dx)$$

serait de même une différentielle exacte, pour cette valeur particulière; circonstance dont on pourra tirer parti, pourvu que $\varphi(f)\frac{df}{d\alpha}$ ne se réduise ni à 0, ni à ∞, ce qui peut arriver ici, mais non dans le cas général traité d'abord.