

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

**Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains
systèmes de courbes ou de surfaces**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 20 (1855), p. 139-142.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__139_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains systèmes de courbes ou de surfaces;

PAR M. WOEPCKE.

I.

Soient

$$B_1, B_2, \dots, B_n \quad \text{et} \quad C_1, C_2, \dots, C_n$$

deux séries de fonctions de p variables et de degré m ; posons

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 + \lambda_1 C_1, & A_2 &= B_2 + \lambda_2 C_2, \dots, & A_{n-1} &= B_{n-1} + \lambda_{n-1} C_{n-1}, & A_n &= B_n + \lambda_n C_n, \\ \Sigma_{1,2} &= \lambda_1 B_2 C_1 - \lambda_2 B_1 C_2, \dots, & \Sigma_{1,n-1} &= \lambda_1 B_{n-1} C_1 - \lambda_{n-1} B_1 C_{n-1}, & \Sigma_{1,n} &= \lambda_1 B_n C_1 - \lambda_n B_1 C_n, \\ & \dots \dots \dots & & & & & & \\ \Sigma_{n-2,n-1} &= \lambda_{n-2} B_{n-1} C_{n-2} - \lambda_{n-1} B_{n-2} C_{n-1}, & \Sigma_{n-2,n} &= \lambda_{n-2} B_n C_{n-2} - \lambda_n B_{n-2} C_n, \\ & & \Sigma_{n-1,n} &= \lambda_{n-1} B_n C_{n-1} - \lambda_n B_{n-1} C_n; \end{aligned}$$

et désignons par $\nu(M = 0, N = 0)$ la totalité des systèmes de valeurs des variables satisfaisant simultanément à deux équations $M = 0$ et $N = 0$. Il est évident

1°. Que

$$\nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0)$$

satisfait aussi à $A_\alpha = 0$;

2°. Que

$$\begin{aligned} & \nu(B_\alpha = 0, B_\beta = 0), \nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0), \nu(C_\beta = 0, B_\beta = 0), \\ & \nu(C_\beta = 0, C_\alpha = 0), \nu(A_\alpha = 0, A_\beta = 0), \\ & \nu\left(A'_\alpha = B_\alpha + \frac{1}{\lambda_\beta} C_\alpha = 0, A'_\beta = B_\beta + \frac{1}{\lambda_\alpha} C_\beta = 0\right), \end{aligned}$$

ainsi que tous les $\nu(\Sigma_{\rho,\alpha} = 0, \Sigma_{\rho,\beta} = 0)$, que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$,

satisfont simultanément à une seule et même équation du $(2m)^{\text{ième}}$ degré

$$\Sigma_{\alpha, \beta} = 0.$$

Si les $B = 0$ et $C = 0$ sont des équations de surfaces ou de courbes de degré m , on obtient que la surface ou courbe du $(2m)^{\text{ième}}$ degré $\Sigma_{\alpha, \beta}$ passe à la fois par les intersections de B_α avec B_β , de B_α avec C_α , de C_β avec B_β , de C_β avec C_α , de A_α avec A_β , de A'_α avec A'_β , qui sont des surfaces ou courbes du $m^{\text{ième}}$ degré, et, en outre, par les intersections de tous les couples de surfaces ou courbes du $(2m)^{\text{ième}}$ degré $\Sigma_{\rho, \sigma} = 0$ et $\Sigma_{\rho, \beta} = 0$, que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$.

Ainsi, lorsque les $B = 0$ et $C = 0$ représentent des courbes de degré m , on trouve que les $(4n - 2)m^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les six couples de courbes du $m^{\text{ième}}$ degré et les $n - 2$ couples de courbes du $(2m)^{\text{ième}}$ degré, sont tous sur une seule et même courbe du $(2m)^{\text{ième}}$ degré.

Si l'on remplace chacune des fonctions B par une seule et même fonction U , on obtient les théorèmes précédemment énoncés. (*Voir le cahier de décembre 1854 du présent Journal, page 407.*)

II.

Soient

$$B_1, B_2, \dots, B_n,$$

$$C_1, C_2, \dots, C_n,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$R_1, R_2, \dots, R_n,$$

q séries de fonctions de p variables et de degré m , q étant un nombre pair.

Formons les fonctions de degré qm

$$\Sigma_{\alpha, \beta} = \lambda_\alpha \cdot B_\beta \cdot C_\alpha \cdot D_\beta \cdot E_\alpha \dots Q_\beta \cdot R_\alpha - \lambda_\beta \cdot B_\alpha \cdot C_\beta \cdot D_\alpha \cdot E_\beta \dots Q_\alpha \cdot R_\beta,$$

en donnant à α et β , successivement et indépendamment l'un de l'autre, les valeurs $1, 2, \dots, n$, et en excluant les combinaisons $\alpha = \beta$.

La fonction $\Sigma_{\alpha, \beta}$ est la différence de deux produits que nous désignons un instant par $\lambda_{\alpha} \cdot \pi_{\alpha, \beta}$ et $\lambda_{\beta} \cdot \pi_{\beta, \alpha}$. Divisons le produit $\pi_{\alpha, \beta}$ d'une façon quelconque en deux produits $\varphi_{\alpha, \beta}$ et $\psi_{\alpha, \beta}$, de telle sorte que

$$\Sigma_{\alpha, \beta} = \lambda_{\alpha} \cdot \varphi_{\alpha, \beta} \cdot \psi_{\alpha, \beta} - \lambda_{\beta} \cdot \varphi_{\beta, \alpha} \cdot \psi_{\beta, \alpha},$$

et formons les fonctions

$$\sigma_{\alpha, \beta} = \lambda_{\alpha} \cdot \varphi_{\alpha, \beta} - \psi_{\beta, \alpha}, \quad \sigma_{\beta, \alpha} = \lambda_{\beta} \cdot \varphi_{\beta, \alpha} - \psi_{\alpha, \beta}.$$

Nous obtiendrons ainsi : q fonctions $\sigma_{\alpha, \beta}$ de degré $(q - 1) m$, telles que

$$\lambda_{\alpha} \cdot B_{\beta} - C_{\beta} \cdot D_{\alpha} \cdot E_{\beta} \dots Q_{\alpha} \cdot R_{\beta}, \text{ etc. ;}$$

$\frac{q(q-1)}{1 \cdot 2}$ fonctions $\sigma_{\alpha, \beta}$ de degré $(q - 2) m$, telles que

$$\lambda_{\alpha} \cdot B_{\beta} \cdot C_{\alpha} - D_{\alpha} \cdot E_{\beta} \dots Q_{\alpha} \cdot R_{\beta}, \text{ etc. ,}$$

et ainsi de suite; enfin, $\frac{q(q-1) \dots (\frac{q}{2} + 1)}{1 \cdot 2 \dots \frac{q}{2}}$ fonctions $\sigma_{\alpha, \beta}$ de degré $\frac{q}{2} m$,

telles que

$$\lambda_{\alpha} \cdot B_{\beta} \cdot C_{\alpha} \cdot D_{\beta} \dots J_{\alpha} - K_{\alpha} \cdot L_{\beta} M_{\alpha} \dots R_{\beta}, \text{ etc.}$$

Il est évident que :

$$1^{\circ}. \nu(B_{\beta} = 0, B_{\alpha} = 0), \quad \nu(B_{\beta} = 0, C_{\beta} = 0), \dots, \nu(B_{\beta} = 0, R_{\beta} = 0),$$

$$\nu(C_{\alpha} = 0, B_{\alpha} = 0), \quad \nu(C_{\alpha} = 0, C_{\beta} = 0), \dots, \nu(C_{\alpha} = 0, R_{\beta} = 0),$$

.....

$$\nu(R_{\alpha} = 0, B_{\alpha} = 0), \quad \nu(R_{\alpha} = 0, C_{\beta} = 0), \dots, \nu(R_{\alpha} = 0, R_{\beta} = 0);$$

$$2^{\circ}. \text{Tous les } \nu(\Sigma_{\rho, \alpha} = 0, \quad \Sigma_{\rho, \beta} = 0)$$

que l'on obtient en donnant à ρ successivement les valeurs $1, 2, \dots, n$, à l'exception de $\rho = \alpha$ et $\rho = \beta$;

$$3^{\circ}. \text{Tous les } \nu(\sigma_{\alpha, \beta} = 0, \quad \sigma_{\beta, \alpha} = 0),$$

satisfont simultanément à une seule et même équation du $(qm)^{\text{ième}}$ degré

$$\Sigma_{\alpha, \beta} = 0.$$

Donc, pour parler seulement de courbes, on voit que les $(qm)^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons $(B_\beta = 0, B_\alpha = 0)$, etc., les $(n-2)(qm)^2$ points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons $(\Sigma_{\rho, \alpha} = 0, \Sigma_{\rho, \beta} = 0)$, et les

$$\left[q(q-1)^2 + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} (q-2)^2 + \dots + \frac{q(q-1) \dots \left(\frac{q}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{q}{2}} \left(\frac{q}{2}\right)^2 \right] m^2$$

points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons

$$(\sigma_{\alpha, \beta} = 0, \sigma_{\beta, \alpha} = 0),$$

sont tous sur une seule et même courbe du $(qm)^{\text{ième}}$ degré.