

JOURNAL  
DE  
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

---

WOEPCKE

**Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains  
systèmes de courbes ou de surfaces**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1<sup>re</sup> série*, tome 20 (1855), p. 139-142.

[http://www.numdam.org/item?id=JMPA\\_1855\\_1\\_20\\_\\_139\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__139_0)

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Gallica de la Bibliothèque nationale de France  
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc  
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc  
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Nouveaux théorèmes relatifs aux intersections de certains systèmes de courbes ou de surfaces;*

PAR M. WOEPCKE.

I.

Soient

$$B_1, B_2, \dots, B_n \quad \text{et} \quad C_1, C_2, \dots, C_n$$

deux séries de fonctions de  $p$  variables et de degré  $m$ ; posons

$$\begin{aligned} A_1 &= B_1 + \lambda_1 C_1, & A_2 &= B_2 + \lambda_2 C_2, \dots, & A_{n-1} &= B_{n-1} + \lambda_{n-1} C_{n-1}, & A_n &= B_n + \lambda_n C_n, \\ \Sigma_{1,2} &= \lambda_1 B_2 C_1 - \lambda_2 B_1 C_2, \dots, & \Sigma_{1,n-1} &= \lambda_1 B_{n-1} C_1 - \lambda_{n-1} B_1 C_{n-1}, & \Sigma_{1,n} &= \lambda_1 B_n C_1 - \lambda_n B_1 C_n, \\ & \dots \dots \dots & & & & & & \\ \Sigma_{n-2,n-1} &= \lambda_{n-2} B_{n-1} C_{n-2} - \lambda_{n-1} B_{n-2} C_{n-1}, & \Sigma_{n-2,n} &= \lambda_{n-2} B_n C_{n-2} - \lambda_n B_{n-2} C_n, \\ & & \Sigma_{n-1,n} &= \lambda_{n-1} B_n C_{n-1} - \lambda_n B_{n-1} C_n; \end{aligned}$$

et désignons par  $\nu(M = 0, N = 0)$  la totalité des systèmes de valeurs des variables satisfaisant simultanément à deux équations  $M = 0$  et  $N = 0$ . Il est évident

1°. Que

$$\nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0)$$

satisfait aussi à  $A_\alpha = 0$ ;

2°. Que

$$\begin{aligned} & \nu(B_\alpha = 0, B_\beta = 0), \nu(B_\alpha = 0, C_\alpha = 0), \nu(C_\beta = 0, B_\beta = 0), \\ & \nu(C_\beta = 0, C_\alpha = 0), \nu(A_\alpha = 0, A_\beta = 0), \\ & \nu\left(A'_\alpha = B_\alpha + \frac{1}{\lambda_\beta} C_\alpha = 0, A'_\beta = B_\beta + \frac{1}{\lambda_\alpha} C_\beta = 0\right), \end{aligned}$$

ainsi que tous les  $\nu(\Sigma_{\rho,\alpha} = 0, \Sigma_{\rho,\beta} = 0)$ , que l'on obtient en donnant à  $\rho$  successivement les valeurs  $1, 2, \dots, n$ , à l'exception de  $\rho = \alpha$  et  $\rho = \beta$ ,

satisfont simultanément à une seule et même équation du  $(2m)^{i\text{ème}}$  degré

$$\Sigma_{\alpha, \beta} = 0.$$

Si les  $B = 0$  et  $C = 0$  sont des équations de surfaces ou de courbes de degré  $m$ , on obtient que la surface ou courbe du  $(2m)^{i\text{ème}}$  degré  $\Sigma_{\alpha, \beta}$  passe à la fois par les intersections de  $B_\alpha$  avec  $B_\beta$ , de  $B_\alpha$  avec  $C_\alpha$ , de  $C_\beta$  avec  $B_\beta$ , de  $C_\beta$  avec  $C_\alpha$ , de  $A_\alpha$  avec  $A_\beta$ , de  $A'_\alpha$  avec  $A'_\beta$ , qui sont des surfaces ou courbes du  $m^{i\text{ème}}$  degré, et, en outre, par les intersections de tous les couples de surfaces ou courbes du  $(2m)^{i\text{ème}}$  degré  $\Sigma_{\rho, \sigma} = 0$  et  $\Sigma_{\rho, \beta} = 0$ , que l'on obtient en donnant à  $\rho$  successivement les valeurs  $1, 2, \dots, n$ , à l'exception de  $\rho = \alpha$  et  $\rho = \beta$ .

Ainsi, lorsque les  $B = 0$  et  $C = 0$  représentent des courbes de degré  $m$ , on trouve que les  $(4n - 2)m^2$  points d'intersection auxquels donnent lieu les six couples de courbes du  $m^{i\text{ème}}$  degré et les  $n - 2$  couples de courbes du  $(2m)^{i\text{ème}}$  degré, sont tous sur une seule et même courbe du  $(2m)^{i\text{ème}}$  degré.

Si l'on remplace chacune des fonctions  $B$  par une seule et même fonction  $U$ , on obtient les théorèmes précédemment énoncés. (*Voir le cahier de décembre 1854 du présent Journal, page 407.*)

II.

Soient

$$\begin{aligned} &B_1, B_2, \dots, B_n, \\ &C_1, C_2, \dots, C_n, \\ &\dots \dots \dots \\ &R_1, R_2, \dots, R_n, \end{aligned}$$

$q$  séries de fonctions de  $p$  variables et de degré  $m$ ,  $q$  étant un nombre pair.

Formons les fonctions de degré  $qm$

$$\Sigma_{\alpha, \beta} = \lambda_\alpha \cdot B_\beta \cdot C_\alpha \cdot D_\beta \cdot E_\alpha \dots Q_\beta \cdot R_\alpha - \lambda_\beta \cdot B_\alpha \cdot C_\beta \cdot D_\alpha \cdot E_\beta \dots Q_\alpha \cdot R_\beta,$$

en donnant à  $\alpha$  et  $\beta$ , successivement et indépendamment l'un de l'autre, les valeurs  $1, 2, \dots, n$ , et en excluant les combinaisons  $\alpha = \beta$ .



satisfont simultanément à une seule et même équation du  $(qm)^{\text{ième}}$  degré

$$\Sigma_{\alpha, \beta} = 0.$$

Donc, pour parler seulement de courbes, on voit que les  $(qm)^2$  points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons  $(B_\beta = 0, B_\alpha = 0)$ , etc., les  $(n-2)(qm)^2$  points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons  $(\Sigma_{\rho, \alpha} = 0, \Sigma_{\rho, \beta} = 0)$ , et les

$$\left[ q(q-1)^2 + \frac{q(q-1)}{1 \cdot 2} (q-2)^2 + \dots + \frac{q(q-1) \dots \left(\frac{q}{2} + 1\right)}{1 \cdot 2 \dots \frac{q}{2}} \left(\frac{q}{2}\right)^2 \right] m^2$$

points d'intersection auxquels donnent lieu les combinaisons

$$(\sigma_{\alpha, \beta} = 0, \sigma_{\beta, \alpha} = 0),$$

sont tous sur une seule et même courbe du  $(qm)^{\text{ième}}$  degré.