

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Note sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique,
présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 20 (1855), p. 137-138.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__137_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

NOTE

*Sur l'intégration des équations différentielles de la Dynamique,
présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin 1853;*

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans le Rapport qui précède, sur le Mémoire de M. Edmond Bour, j'ai parlé d'un théorème que j'ai donné il y a deux ans dans mon cours au Collège de France, puis communiqué au Bureau des Longitudes. L'extrait suivant du procès-verbal de la séance du 29 juin 1853, que je dois à l'obligeance du Secrétaire du Bureau, M. Daussy, contient textuellement la Note que j'ai présentée à ce corps savant.

BUREAU DES LONGITUDES.

Paris, le 28 mars 1855.

Le Secrétaire du Bureau des Longitudes certifie que ce qui suit est extrait du procès-verbal de la séance du Bureau du mercredi 29 juin 1853.

« M. Liouville communique la Note ci-jointe sur l'intégration des équations de la Dynamique. Il y ajoute verbalement tous les développements nécessaires pour en expliquer l'utilité et les applications.

*Note sur les équations de la Dynamique ;
par M. J. LIOUVILLE.*

(Communiquée au Bureau des Longitudes, le mercredi 29 juin 1853.)

» Considérons les équations de la Dynamique, ou plutôt le système plus général d'équations différentielles que voici :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dV}{dx}, & \frac{dy}{dt} &= \frac{dV}{dy}, \dots, & \frac{dz}{dt} &= \frac{dV}{dz}, \\ \frac{dx'}{dt} &= -\frac{dV}{dx}, & \frac{dy'}{dt} &= -\frac{dV}{dy}, \dots, & \frac{dz'}{dt} &= -\frac{dV}{dz}, \end{aligned}$$

» V étant une fonction donnée quelconque de $t, x, y, \dots, x', y', \dots$; admettons
 » qu'on ait trouvé la moitié des intégrales de ce système

$$\begin{aligned} \alpha &= \varphi(t, x, y, \dots, x', y', \dots), \\ \beta &= \psi(t, x, y, \dots, x', y', \dots), \\ &\dots\dots\dots \\ \gamma &= \omega(t, x, y, \dots, x', y', \dots), \end{aligned}$$

» et supposons que toutes les quantités $(\beta, \alpha), (\gamma, \beta), \dots, (\alpha, \gamma), \dots$, où nous
 » prenons

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) &= \frac{d\alpha}{dx'} \cdot \frac{d\beta}{dx} - \frac{d\alpha}{dx} \cdot \frac{d\beta}{dx'} + \frac{d\alpha}{dy'} \cdot \frac{d\beta}{dy} - \frac{d\alpha}{dy} \cdot \frac{d\beta}{dy'} + \dots \\ &\quad + \frac{d\alpha}{dz'} \cdot \frac{d\beta}{dz} - \frac{d\alpha}{dz} \cdot \frac{d\beta}{dz'}, \end{aligned}$$

» soient égales à zéro. Je dis que si, cela étant, les équations intégrales trouvées peu-
 » vent fournir les valeurs de x', y', \dots, z' , en t, x, y, \dots, z , la quantité

$$x'dx + y'dy + \dots + z'dz - V dt$$

» sera une différentielle exacte par rapport à x, y, \dots, z, t . Soit dS cette différen-
 » tielle; S contiendra les constantes $\alpha, \beta, \dots, \gamma$; et le système complet des inté-
 » grales de nos équations différentielles sera

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} &= x', & \frac{dS}{dy} &= y', \dots, & \frac{dS}{dz} &= z', \\ \frac{dS}{d\alpha} &= -\alpha', & \frac{dS}{d\beta} &= -\beta', \dots, & \frac{dS}{d\gamma} &= -\gamma', \end{aligned}$$

» $\alpha', \beta', \dots, \gamma'$, étant de nouvelles constantes arbitraires.

» Il n'y aura à cet énoncé qu'un très-léger changement à faire si les intégrales don-
 » nées $\alpha = \varphi, \beta = \psi, \dots, \gamma = \omega$, au lieu de fournir x', y', \dots, z' , fournissaient
 » les valeurs d'une moitié quelconque des quantités $x, y, \dots, z, x', y', \dots, z'$,
 » en fonction de t et des autres, pourvu que dans cette moitié il n'y ait que des lettres
 » de nom différent comme x', y', \dots, z . J'ai donné de longs développements sur
 » toutes ces questions dans mes leçons au Collège de France.

» Le 29 juin 1853.

» Signé J. LIOUVILLE. »

P. DAUSSY.