JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Rapport sur un Mémoire de M. Bour, concernant l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 135-136.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__135_0>

Rapport sur un Mémoire de M. Bour, *concernant l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique;*

Par M. J. LIOUVILLE.

(*Comptes rendus*, tome XL, page 661. — Séance du 26 mars 1855.)

L'Académie nous a chargés, M. Lamé, M. Chasles et moi, de lui faire un Rapport sur un Mémoire de M. Edmond Bour, élève ingénieur des Mines, concernant l'intégration des équations différentielles de la mécanique analytique. On sait qu'avec deux intégrales quelconques (α), (β) de ces équations, Poisson a formé [*] une combinaison (α, β) dont il a prouvé que la valeur est indépendante du temps, de sorte que, si la quantité (α, β) ne se réduit identiquement ni à zéro ni à une constante, on a, en l'égalant à une constante arbitraire, une intégrale des équations différentielles proposées. Le théorème de Poisson fournit donc, comme l'a observé Jacobi (*Comptes rendus*, tome IX, ou *Journal de Mathématiques*, tome V, année 1840), une méthode d'intégration singulière qui pourra quelquefois faire connaître successivement toutes les intégrales au moyen de deux d'entre elles données d'abord. Mais il peut arriver aussi qu'on ne trouve par là qu'un nombre très-limité d'intégrales distinctes. Il se peut même qu'on n'en ajoute aucune aux deux (α), (β) dont on part. Il en sera, par exemple, toujours ainsi quand l'une d'elles est celle des forces vives et que l'autre ne contient pas le temps; car alors on a identiquement $(\alpha, \beta) = 0$.

Mais Jacobi nous avertit et M. Bour prouve, dans son Mémoire, que, dans les cas où la méthode d'intégration indiquée plus haut échoue, il y a souvent un autre parti à tirer des intégrales connues, pour achever ou du moins pour pousser plus loin l'intégration. Déjà l'un de nous l'avait montré dans les Cours du Collége de France en 1853 et dans une Note présentée au Bureau des Longitudes le 29 juin de la même année, mais pour le seul cas où l'on possède

[*] *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les questions de mécanique*, lu à l'Institut le 16 octobre 1809. (*Journal de l'École Polytechnique*, xv^{e} cahier.)

la moitié des intégrales. C'est en effet par des équations comme $(\alpha, \beta) = 0$, que l'on exprime les conditions d'intégrabilité exigées par Poisson (*Journal de Mathématiques*, tome II, année 1837) pour la détermination d'une fonction qui, de suite, fournit alors les intégrales restantes [*]. M. Bour pénètre plus profondément dans le cœur de la question, et il examine en général l'abaissement successif qui résulte de la connaissance de chaque intégrale nouvelle. Il nous serait difficile d'exposer en langage ordinaire les détails de son analyse. Contentons-nous de dire qu'il opère sur l'équation linéaire aux différences partielles du premier ordre que toute intégrale doit vérifier. C'est sur cette équation qu'il effectue un abaissement de deux unités dans le nombre des variables, à mesure qu'une nouvelle intégrale convenable lui est fournie. M. Bour montre de plus qu'un abaissement égal ou même supérieur peut quelquefois être obtenu au moyen d'intégrales qui semblaient d'abord étrangères à sa méthode.

M. Bour s'est restreint au cas où les forces et les liaisons sont indépendantes du temps et où l'intégrale des forces vives a lieu, de sorte que, dans les équations

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq_1}, \quad \frac{dq_1}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dp_1}, \ldots, \quad \frac{dp_n}{dt} = \frac{d\mathrm{H}}{dq_n}, \quad \frac{dq_n}{dt} = -\frac{d\mathrm{H}}{dp_n},$$

dont il s'est servi, la fonction H ne contient pas t; mais nous nous sommes assurés que son analyse, légèrement modifiée, s'étend au cas général où H est une fonction quelconque de t et des autres variables.

Les géomètres liront avec intérêt le Mémoire de M. Edmond Bour. C'est dans les excellentes leçons de M. Bertrand sur la mécanique que M. Bour a surtout puisé les idées premières de son travail. L'élève s'est montré digne du maître.

Nous proposons à l'Académie d'approuver le Mémoire de M. Bour et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers*.

---

[*] M. Adrien Lafon a inséré mon théorème (en me citant et en le démontrant à sa manière) dans une Thèse remarquable pour le doctorat ès-sciences, imprimée l'an dernier. Je le retrouve encore dans un Mémoire de M. Donkin, qui vient de paraître dans les *Transactions Philosophiques* de la Société royale de Londres; mais le Mémoire de M. Donkin n'est daté que du 23 février 1854. L'estimable auteur ne paraît du reste avoir eu aucune connaissance des résultats que j'avais obtenus avant lui.

(*Note de M. Liouville.*)