# JOURNAL

DE

# MATHÉMATIQUES

## PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE



J. LIOUVILLE


## Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes


*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 20 (1855), p. 133-134.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__133_0>

# *Valeur d'une intégrale définie qui se rattache aux intégrales trinômes;*

PAR M. J. LIOUVILLE.

Voici la composition de cette intégrale définie. Posons

$$P = (1 + ax_1)(1 + ax_1 + ax_2)\ldots(1 + ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1})$$

et

$$Q = x_1 x_2 \ldots x_{n-1}(1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-1}),$$

$a$ désignant une constante, et $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ des variables en nombre $(n-1)$. Soit de plus

$$p = \frac{1-\mu}{n}, \quad q = \frac{\mu}{n} - 1,$$

$\mu$ étant une constante positive, ou du moins à partie réelle positive. Cela posé, l'intégrale dont je veux parler, et que je représenterai par U, est

$$U = \int\int\cdots\int P^p Q^q \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1};$$

l'intégration s'étend à tous les systèmes de valeurs *positives* des variables $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ pour lesquels on a

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} < 1:$$

on pourra donc intégrer d'abord par rapport à $x_{n-1}$ entre les limites

$$x_{n-1} = 0, \quad x_{n-1} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-2},$$

puis par rapport à $x_{n-2}$, entre les limites

$$x_{n-2} = 0, \quad x_{n-2} = 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{n-3},$$

et ainsi de suite, la dernière intégrale relative à $x_1$ étant prise de $x_1 = 0$ à $x_1 = 1$.

J'ai obtenu pour l'intégrale U la valeur suivante, où $\Gamma$ désigne à l'ordinaire l'intégrale eulérienne de seconde espèce,

$$U = \frac{n^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n \left(\frac{\sqrt[n]{1+a}-1}{a}\right)^{\mu-1}.$$

En posant $a = 0$, on a $P = 1$; et l'équation

$$\iint \ldots \int Q^q \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1} = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{n}\right)^n,$$

à laquelle on arrive alors, n'est qu'un cas très-particulier d'un résultat bien connu.

On aurait une seconde vérification facile et du même genre en supposant $\mu = 1$; mais cette fois encore $a$ disparaîtrait.

Il restera si l'on prend $\mu = n$. On doit avoir alors

$$\iint \ldots \int P^{\frac{1-n}{n}} \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_{n-1} = \frac{n^{n-1}}{\Gamma(n)} \left(\frac{\sqrt[n]{1+a} - 1}{a}\right)^{n-1};$$

or on peut aisément s'assurer qu'il en est ainsi en effectuant les intégrations qui sont ici très-faciles.

Si l'on pose $n = 2$, U n'est plus qu'une intégrale simple. Notre formule donne pour ce cas :

$$\int_0^1 (1 + ax_1)^{\frac{1-\mu}{2}} [x_1(1 - x_1)]^{\frac{\mu}{2} - 1} \, dx_1 = \frac{2^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{1+a} - 1}{a}\right)^{\mu - 1}.$$

Pour $n = 3$, l'intégrale U est double : notre formule devient

$$\int_0^1 x_1^{\frac{\mu}{3} - 1} (1 + ax_1)^{\frac{1-\mu}{3}} dx_1 \int_0^{1-x_1} (1 + ax_1 + ax_2)^{\frac{1-\mu}{3}} [x_2(1 - x_1 - x_2)]^{\frac{\mu}{3} - 1} \, dx_2$$
$$= \frac{3^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \Gamma\left(\frac{\mu}{3}\right)^3 \left(\frac{\sqrt[3]{1+a} - 1}{a}\right)^{\mu-1}.$$

Et ainsi de suite.

La formule pour U n'est pas la seule de cette espèce que l'on puisse trouver. L'emploi des différentielles à indices quelconques m'en a fait rencontrer beaucoup d'autres : les équations qu'on obtient d'abord contiennent même une fonction arbitraire. Mais la place me manque pour les écrire : je crois utile, d'ailleurs, de fixer un moment l'attention sur la formule particulière ci-dessus, qui me semble importante.

L'intégrale simple qui répond au cas de $n = 2$ est une intégrale trinôme. En m'occupant de ce genre d'intégrales, je suis arrivé à des résultats intéressants qui feront le sujet d'un autre article.