JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JULES VIEILLE

Remarques sur la théorie des lignes de courbure, et spécialement sur la plus courte distance des deux normales infiniment voisines dont l'une passe par un ombilic

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 121-132.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__121_0>

Remarques sur la théorie des lignes de courbure, et spécialement sur la plus courte distance des deux normales infiniment voisines dont l'une passe par un ombilic;

PAR M. JULES VIEILLE.

Nous reprendrons d'abord sommairement la mise en équation des lignes de courbure, en suivant une marche différente de celle qu'on adopte d'ordinaire, et qui fera mieux ressortir l'ordre infinitésimal de la plus courte distance de deux normales consécutives.

Les équations de la normale au point (x, y, z) d'une surface

$$z = \mathrm{F}(x, y)$$

sont de la forme

$$x' = -pz' + \alpha,$$
$$y' = -qz' + \beta,$$

en posant

$$\alpha = x + pz, \quad \beta = y + qz, \quad \frac{dz}{dx} = p, \quad \frac{dz}{dy} = q,$$

et désignant par x', y', z' les coordonnées courantes.

Les équations de la normale menée par un point voisin de la surface, et dont nous désignerons les coordonnées par $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$, sont

$$x' = -(p + \Delta p)z' + \alpha + \Delta\alpha,$$
$$y' = -(q + \Delta q)z' + \beta + \Delta\beta;$$

et la plus courte distance δ des deux normales a pour expression

$$\delta = \frac{\Delta q \Delta\alpha - \Delta p \Delta\beta}{\sqrt{\Delta p^2 + \Delta q^2 + (p\Delta q - q\Delta p)^2}}.$$

Le dénominateur est du même ordre infinitésimal que le plus grand des deux accroissements arbitraires Δx, Δy, ou du premier ordre; tandis que le numérateur est, *en général,* du second ordre.

Par conséquent, δ est, en général, du premier ordre infinitésimal.

Mais on peut demander quelle dépendance il faudrait établir entre Δx et Δy, ou, ce qui revient au même, quelle ligne il faudrait tracer sur la surface pour que, en assujettissant le point $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ à la décrire, la plus courte distance δ fût constamment infiniment petite d'un ordre supérieur au premier.

La ligne qui jouit de cette propriété s'appelle *ligne de courbure.*

Comme elle doit être située sur la surface

$$z = \mathrm{F}(x, y),$$

cette ligne sera complétement déterminée, si l'on assigne une seconde équation entre les coordonnées de ses différents points, par exemple celle qui lie y à x et représente sa projection sur le plan des (x, y). A cet effet, on développe d'abord Δp, Δq, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ en séries ordonnées suivant les différentielles des divers ordres, prises par rapport à la variable indépendante x,

$$\Delta p = dp + \frac{1}{1.2} d^2 p + \frac{1}{1.2.3} d^3 p + \ldots,$$

$$\Delta q = dq + \frac{1}{1.2} d^2 q + \frac{1}{1.2.3} d^3 q + \ldots,$$

$$\Delta\alpha = d\alpha + \frac{1}{1.2} d^2\alpha + \frac{1}{1.2.3} d^3\alpha + \ldots,$$

$$\Delta\beta = d\beta + \frac{1}{1.2} d^2\beta + \frac{1}{1.2.3} d^3\beta + \ldots,$$

et substituant dans le numérateur de δ, puis groupant les termes de même ordre, il vient

$$\delta = \frac{(dq\, d\alpha - dp\, d\beta) + \frac{1}{1.2}(dq\, d^2\alpha + d\alpha\, d^2 q - dp\, d^2\beta - d\beta\, d^2 p) + \ldots}{\mathrm{A}\, dx};$$

A désigne une quantité *finie*, qu'il est inutile de développer.

Pour que δ satisfasse à la condition d'être d'un ordre infinitésimal supérieur au premier, il faut et il suffit que le terme du second ordre disparaisse du numérateur, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad dq\, d\alpha - dp\, d\beta = 0;$$

cette équation se transforme, eu égard aux relations

$$d\alpha = dx + p\, dz + z\, dp, \quad d\beta = dy + q\, dz + z\, dq,$$
$$dz = p\, dx + q\, dy, \quad dp = r\, dx + s\, dy, \quad dq = s\, dx + t\, dy,$$

et devient

$$[(1+q^2)s - pqt]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + [(1+q^2)r - (1+p^2)t]\frac{dy}{dx} - [(1+p^2)s - pqr] = 0.$$

Les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ que l'on tire de cette équation, font connaître les projections sur le plan des x, y des tangentes aux lignes de courbure issues du point (x, y, z). Il y a donc deux directions suivant lesquelles on peut passer d'un point de la surface à un point infiniment voisin, pour que la plus courte distance des normales en ces points soit d'un ordre infinitésimal supérieur au premier. L'équation précédente est identique avec celle qui détermine les tangentes aux deux sections normales de plus grande et de plus petite courbure. On en conclut que les lignes de courbure sont tangentes aux sections principales, et, par suite, qu'elles se coupent à angle droit ainsi que ces dernières.

Enfin, rappelons que si p, q, r, s, t ont été remplacés par leurs valeurs en x et y, tirées de l'équation

$$z = \mathbf{F}(x, y),$$

l'équation (1) deviendra une équation différentielle ordinaire à deux variables dont l'intégrale sera de la forme

$$c^2 + \varphi(x, y)\, c + \psi(x, y) = 0,$$

c désignant la constante arbitaire. Puis, la condition que cette intégrale soit vérifiée par les coordonnées du point assigné sur la surface, fournira deux valeurs de c; et ces valeurs étant reportées successivement dans l'intégrale, on aura les équations finies des projections des deux lignes de courbure qui passent par le point dont il s'agit.

Maintenant, de quel ordre est la plus courte distance des deux normales consécutives le long d'une ligne de courbure?

Le second terme du numérateur de δ

$$\frac{1}{1.2}\left(dq\, d^2\alpha + d\alpha\, d^2 q - dp\, d^2\beta - d\beta\, d^2 p\right)$$

est précisément la moitié de la différentielle du premier $(dq\, d\alpha - dp\, d\beta)$; et puisque celui-ci est constamment nul quand le point (x, y, z) décrit la ligne de courbure, l'autre est nul aussi le long de cette même ligne. Le numérateur de δ est donc un infiniment petit du quatrième ordre *au moins;* d'ailleurs le dénominateur est du premier. Donc δ sera du troisième ordre au moins.

Cette remarque intéressante, relative à l'ordre infinitésimal de la plus courte distance, a été faite pour la première fois par M. Bouquet [*], sur un *système de droites, qu'il assujettit à la condition d'être tangentes à une même courbe dans l'espace.* Cette condition de contact ne laisse subsister qu'*un seul paramètre arbitraire* dans les coefficients des équations de la série de droites considérées par M. Bouquet, et c'est aussi ce qui a lieu dans le cas qui nous occupe. Mais la démonstration précédente est fondée sur le développement en série des accroissements Δp, Δq, $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$, lequel n'exige pas que p, q, α, β soient fonctions d'une seule variable indépendante. Ainsi, la propriété remarquée par M. Bouquet s'appliquerait à toute série de droites

$$x = az + b, \quad y = cz + d,$$

[*] Tome XI de ce Journal, page 126.

où a, b, c, d seraient fonctions *continues* d'une ou de plusieurs variables indépendantes. S'il arrive que, pour deux quelconques de ces droites infiniment voisines, la distance δ soit infiniment petite d'un ordre supérieur au premier, elle sera au moins du troisième ordre.

Quant au troisième terme du numérateur de δ,

$$\frac{1}{1.2.3}(dq\,d^3\alpha + d\alpha\,d^3q - dp\,d^3\beta - d\beta\,d^3p) + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2}(d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta),$$

il n'est pas la différentielle du second, et, par conséquent, ne s'annule pas avec lui. Seulement il se réduit (eu égard à cette différentielle qui est nulle) à

$$-\frac{1}{12}(d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta),$$

et nous verrons plus bas, conformément à un second théorème également prouvé par M. Bouquet, que ce dernier terme ne saurait être nul pour tous les points de la ligne de courbure, qu'autant que toutes les normales le long de cette ligne seraient dans un même plan. Alors δ serait rigoureusement nulle.

Avant d'aller plus loin, il convient de démontrer que les normales à la surface, le long d'une ligne de courbure, sont tangentes à une même courbe dans l'espace.

Si l'on associe aux deux équations de la première normale, celles de la normale infiniment voisine, *réduites à ne plus contenir les infiniment petits d'ordre supérieur au premier*, je dis que le système de ces quatre équations :

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= -pz' + \alpha, \\ y' &= -qz' + \beta, \\ x' &= -(p+dp)z' + \alpha + d\alpha, \\ y' &= -(q+dq)z' + \beta + d\beta, \end{aligned}\right.$$

sera vérifié par les coordonnées (x', y', z') d'un certain point de l'espace. En effet, les deux dernières se réduisent, en vertu des deux autres, à

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} z'\,dp &= d\alpha, \\ z'\,dq &= d\beta, \end{aligned}\right.$$

et, d'après la condition (1), elles s'accordent à donner la même valeur de z'.

Pour déterminer les coordonnées de ce point qui appartient évidemment à la première normale, on remplacera le système (2) par le suivant :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x' &= -pz' + \alpha, \\ y' &= -qz' + \beta, \\ [1+p^2 - r(z'-z)][1+q^2 - t(z'-z)] &= [(z'-z)s - pq]^2, \end{aligned}\right.$$

dont la troisième équation résulte de l'élimination de $\frac{dy}{dx}$ entre les équations (3). Quand le point (x, y, z) se déplacera sur la surface en suivant une ligne de courbure, le point (x', y', z') défini par les équations ci-dessus, se déplacera, en même temps, suivant une courbe parfaitement déterminée et dont on aurait les équations en éliminant x, y, z entre le système (4), l'équation de la surface

$$z = \mathrm{F}(x, y),$$

et l'intégrale

$$c^2 + \varphi(x, y)c + \psi(x, y) = 0.$$

Maintenant il est facile de voir que la tangente à cette courbe au point (x', y', z') n'est autre que la normale même au point (x, y, z) de la surface. En effet, si l'on différentie les deux premières équations (4) par rapport à x, en regardant z, y, x', y', z', comme fonction de cette variable indépendante, il vient

$$dx' = -p\,dz' - z'\,dp + d\alpha,$$
$$dy' = -q\,dz' - z'\,dq + d\beta,$$

lesquelles se réduisent, eu égard aux équations (3), à

$$(5) \qquad \frac{dx'}{dz'} = -p, \quad \frac{dy'}{dz'} = -q.$$

Donc la normale à la surface, qui déjà passe par le point (x', y', z'), a ses coefficients angulaires égaux à ceux de la tangente à la courbe que décrit ce point, et, par suite, se confond avec cette tangente. Cette courbe est ainsi l'enveloppe des normales consécutives ou l'arête de rebroussement de la surface développable qu'elles forment.

Enfin, nous avons dit que si l'on supposait

$$(6) \qquad d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta = 0,$$

en même temps que la condition (1) a lieu, les normales consécutives seraient dans un même plan, et, par suite, δ rigoureusement nulle. En effet, cela revient à prouver que l'arête de rebroussement est alors plane. Or les équations (3) différentiées donnent

$$d^2\alpha = z'\,d^2p + dp\,dz',$$
$$d^2\beta = z'\,d^2q + dq\,dz',$$

et ces valeurs, substituées dans l'équation (6), la réduisent à

$$\frac{d^2p}{dp} = \frac{d^2q}{dq}.$$

Intégrant, il vient

$$l(dp) = l(c\,dq) \quad \text{ou} \quad p = cq - c',$$

et, en vertu des équations (5),

$$dx' = c\,dy' + c'\,dz',$$

dont l'intégrale est

$$x' = cy' + c'z' + c'',$$

c, c', c'' étant des constantes arbitraires. C. Q. F. D.

Des ombilics.

Un ombilic est un point d'une surface où toutes les sections normales ont des rayons de courbure égaux et de même signe. Cette condition s'exprime, comme on sait, par les équations

$$(7) \qquad \frac{1+p^2}{r} = \frac{1+q^2}{t} = \frac{pq}{s},$$

auxquelles il faut joindre

$$z = \mathrm{F}(x, y).$$

Pour ce point singulier, l'équation (1), ou sa transformée du second degré en $\frac{dy}{dx}$, devient identique. Il en résulte que, dans toutes les directions autour de l'ombilic, la plus courte distance δ, de la normale issue de ce point à la normale d'un point infiniment voisin, est infiniment petite d'un ordre supérieur au premier. Mais *il ne s'ensuit plus que δ soit du troisième ordre au moins.* Car l'*identité*

$$dq\,d\alpha - dp\,d\beta = 0,$$

n'a lieu ici que pour l'ombilic seulement, et non pour une suite continue de points. On n'est donc pas en droit d'égaler à zéro sa différentielle, pour en conclure que le terme du second ordre que renferme δ est nul.

Considérons, par exemple, le paraboloïde elliptique,

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b},$$

nous trouvons, abstraction faite d'un facteur constant,

$$dp\,d\beta - dq\,d\alpha = dx^2\left[\mathrm{A}xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2 - \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B})\frac{dy}{dx} - xy\right],$$

en posant

$$\mathrm{A} = \frac{a}{b}, \quad \mathrm{B} = a(a-b).$$

Les équations qui déterminent les ombilics sont

$$(8) \qquad xy = 0, \quad x^2 - \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B} = 0.$$

Soit $a > b$; les seules solutions réelles sont

$$x = 0, \quad y = \pm\sqrt{b(a-b)},$$

d'où

$$z = \frac{a-b}{2}.$$

Ces coordonnées déterminent deux ombilics situés sur la parabole principale de plus petit paramètre.

Si l'on prend maintenant la différentielle relative à x de $(dp\,d\beta - dq\,d\alpha)$, on trouve

$$(9)\qquad dx^3\left\{\left[2\,\mathrm{A}\,xy\frac{dy}{dx} + (x^2 - \mathrm{A}y^2 + \mathrm{B})\right]\frac{d^2y}{dx^2} + \left[\mathrm{A}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\right\},$$

expression dont le terme affecté de $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ disparaît pour les ombilics, en vertu des équations (8).

[Il est bon de remarquer que cette simplification n'est pas particulière au paraboloïde, et qu'elle aura évidemment lieu, en vertu des équations (7), pour un ombilic de toute autre surface. Cette remarque nous dispensera désormais de tenir compte des termes provenant de la différentiation de $\dfrac{dy}{dx}$. Toutefois ceci suppose que $\dfrac{dy}{dx}$ ne soit pas infini.]

Ainsi, dans le cas d'un ombilic, la différentielle ci-dessus se réduit, *pour toute valeur finie de* $\dfrac{dy}{dx}$, à la forme

$$(10)\qquad dx^3\left[\mathrm{A}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right).$$

Pour que δ fût du troisième ordre, il faudrait donc que l'on eût l'équation

$$(11)\qquad \left[\mathrm{A}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1\right]\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0.$$

Mais le facteur $\mathrm{A}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1$ est essentiellement positif, et la valeur $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$, que l'on tire du second facteur, devient infinie pour les coordonnées

$$x = 0,\quad y = \pm\sqrt{b\,(a-b)},$$

des ombilics.

L'équation (11) n'a donc pas de racines réelles et finies.

Donc δ n'est pas du troisième ordre, mais seulement du second, dans toutes les directions autour de l'ombilic.

Nous devons toutefois excepter la direction pour laquelle $\dfrac{dy}{dx} = \infty$; or c'est précisément celle de la parabole principale dont le plan est celui des (y, z). L'expression (9) se présente alors sous une forme illusoire $0 \times \infty$; et, en effet, ce n'est pas à l'accroissement dx (qui est, dans ce cas, infiniment petit par rapport à dy) qu'il convient de rapporter l'ordre infinitésimal de δ ; mais c'est dy qu'il convient alors de regarder comme l'accroissement indépendant, et de mettre en facteur dans les deux termes de δ. Ce changement de variable indépendante fournit pour la différentielle de $dp\,d\beta - dq\,d\alpha$, l'expression analogue à (10),

$$(12)\qquad dy^3\left[\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + \mathrm{A}\right]\left(x - y\frac{dx}{dy}\right),$$

et en y substituant les coordonnées des ombilics, elle devient

$$\pm dy^3 \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \mathrm{A} \right] \sqrt{b\,(a-b)}\, \frac{dx}{dy}.$$

On voit qu'elle s'annule, en effet, pour $\frac{dx}{dy} = 0$; et seulement pour cette direction qui répond bien au plan des (y, z) indiqué par la racine infinie de l'équation (11). Mais alors les deux normales infiniment voisines sont contenues dans le plan de cette section principale, et, par suite, leur plus courte distance est rigoureusement nulle. D'ailleurs, quel que soit l'accroissement fini Δy, tant qu'on ne quittera pas la section principale zoy, on aura visiblement

$$\Delta p = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \alpha = 0,$$

et, par conséquent,

$$\Delta q\, \Delta \alpha - \Delta p\, \Delta \beta = 0, \quad \text{ou} \quad \delta = 0.$$

En résumé, quelque direction que l'on suive sur le paraboloïde elliptique à partir de l'un des ombilics, δ n'est jamais du troisième ordre, mais toujours du second, excepté suivant la direction de la parabole principale qui contient l'ombilic et pour laquelle δ est rigoureusement nulle. En sorte que par l'ombilic il ne passe pas de ligne continue ayant la propriété des lignes de courbure ordinaires, c'est-à-dire telle que δ soit infiniment petite du troisième ordre.

Si le paraboloïde était de révolution, on aurait

$$a = b,$$

et pour coordonnées des ombilics,

$$x = 0, \quad y = 0,$$

sommet du paraboloïde.

La différentielle (10) devient alors identiquement nulle; mais il en est de même du terme du troisième ordre, ainsi que des suivants. Car dans toutes les directions autour du sommet, toute normale à la surface est contenue dans un plan méridien qui passe par la normale au sommet, et δ est rigoureusement nulle.

Considérons encore l'ellipsoïde à trois axes inégaux,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

On trouve, abstraction faite d'un facteur constant,

$$dp\, d\beta - dq\, d\alpha = dx^2 \left[\mathrm{A}\, xy \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + (x^2 - \mathrm{A} y^2 - \mathrm{B}) \frac{dy}{dx} - xy \right],$$

en posant

$$\mathrm{A} = \frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)}, \quad \mathrm{B} = \frac{a^2 (a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}.$$

Les équations propres aux ombilics sont

$$xy = 0, \quad x^2 - Ay^2 - B = 0.$$

Soit $a > b > c$; les seules solutions réelles sont

$$y = 0, \quad x = \pm a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

d'où

$$z = \pm c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Elles déterminent quatre ombilics symétriquement placés dans le plan de la section principale qui contient le plus grand et le plus petit axe.

Prenons maintenant la différentielle de $(dp\, d\beta - dq\, d\alpha)$; il suffira évidemment de changer B en $-$ B dans les résultats obtenus pour le paraboloïde. L'équation (10) et l'équation (11) garderont la même forme. Seulement la constante A, au lieu de désigner $\frac{a}{b}$, représentera $\frac{a^2(b^2 - c^2)}{a^2 - c^2}$. Ce sera toujours une quantité positive, et, par suite, il n'y aura encore de valeur réelle pour $\frac{dy}{dx}$ que celle tirée du facteur $x\frac{dy}{dx} - y$, égalé à zéro.

Ainsi l'équation (11) n'admet qu'une seule racine réelle et cette racine est nulle D'ailleurs il n'y a point ici de racines infinies. La valeur $\frac{dy}{dx} = 0$ indique une direction comprise dans le plan zox, c'est-à-dire tangente à l'ellipse principale qui contient les ombilics. Mais, comme les normales à la surface menées par les différents points de cette section sont toutes comprises dans son plan, δ est encore rigoureusement nulle.

Si l'ellipsoïde était de révolution, autour de son petit axe, on aurait

$$a = b, \quad A = 1, \quad B = 0,$$

et pour coordonnées des ombilics,

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \pm c;$$

ce sont les deux pôles de l'ellipsoïde aplati. La différentielle (10) devient identiquement nulle, et $\frac{dy}{dx}$ reste indéterminé. Mais alors δ est encore rigoureusement nulle, puisque les normales sont comprises dans un même plan méridien.

Si l'ellipsoïde était de révolution autour de son grand axe, on aurait

$$b = c, \quad A = 0, \quad B = a^2,$$

et pour coordonnées des ombilics,

$$x = \pm a, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

ce sont les deux pôles de l'ellipsoïde allongé. L'équation (11) se réduit, en n'ayant égard d'abord qu'aux valeurs finies de $\frac{dy}{dx}$, à $\frac{dy}{dx} = 0$. Cette racine indique le plan méridien zox.

De plus, comme l'équation (11) est tombée du troisième degré au premier par l'évanouissement du coefficient A, on peut la regarder comme admettant deux racines infinies. Ces racines sont, d'ailleurs, mises en évidence en partant de la différentielle (12), où l'on a pris dy pour accroissement arbitraire, et qui donne, dans ce cas particulier,

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0.$$

La solution $\frac{dy}{dx} = \infty$ correspond ici à une section méridienne *quelconque*, puisque la tangente menée par l'ombilic à cette section, étant comprise dans un plan tangent perpendiculaire à l'axe de révolution, ne peut manquer de se projeter sur le plan des (x, y) suivant une perpendiculaire à cet axe.

Dans les deux cas, que $\frac{dy}{dx}$ soit nul ou infini, la plus courte distance δ est toujours nulle, puisque les normales que l'on compare sont dans un même plan.

On est donc en droit de conclure pour les ombilics de l'ellipsoïde, comme pour ceux du paraboloïde elliptique, que la plus courte *distance* δ *est du second ordre ou nulle, jamais du troisième ordre;* en sorte qu'il ne passe pas par ces points singuliers de lignes telles, que δ soit de l'ordre infinitésimal qui appartient aux lignes de courbure ordinaires.

Pour passer de l'ellipsoïde à l'hyperboloïde à deux nappes, on changera b^2 en $-b$, et c^2 en $-c^2$ dans les formules précédentes. Les conclusions resteront évidemment les mêmes quant à l'ordre infinitésimal de δ.

Quant aux deux autres surfaces du second ordre, l'hyperboloïde à une nappe et le paraboloïde hyperbolique, il ne peut être question d'ombilics, puisque dans ces deux surfaces, il y a autour de chaque point quatre régions, séparées par les deux génératrices rectilignes, dans lesquelles les sections normales ont des courbures opposées.

En général, quel que soit le degré de la surface, le terme

$$dp\, d\beta - dq\, d\alpha$$

est de la forme

$$M\, dy^2 + N\, dy\, dx + P\, dx^2, \tag{13}$$

M, N, P étant des fonctions de x et de y, dont nous avons donné l'expression dans la transformée de l'équation (1), et qui sont identiquement nulles pour un ombilic. Dans toutes les directions autour de ce point, δ est au moins du second ordre infinitésimal. Mais si l'on demande une direction telle, que δ soit au moins de troisième ordre, on aura, pour déterminer la valeur correspondante de $\frac{dy}{dx}$, l'équation du troisième degré

$$(14)\qquad \frac{dM}{dy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+\left(\frac{dM}{dx}+\frac{dN}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dN}{dx}+\frac{dP}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\frac{dP}{dx}=0,$$

qui résulte de la différentiation de l'expression ci-dessus par rapport à x.

Quand $\frac{dM}{dy}$ ne s'évanouira pas pour l'ombilic dont il s'agit, cette équation fera connaître au moins une et au plus trois directions suivant lesquelles δ sera d'un ordre supérieur au second ; mais, dans toutes les autres directions, δ ne sera que du second ordre, en sorte que le rapprochement des normales sera *moins* intime que suivant une ligne de courbure passant par un point quelconque de la surface. De plus, il ne faut pas perdre de vue que δ n'est du troisième ordre que pour *les normales qui correspondent à une ou trois directions d'éléments infiniment petits partant de l'ombilic*, et non *pour une suite continue de normales*. Il ne faut donc pas dire qu'il passera par l'ombilic trois *lignes* de courbure, dans le sens ordinairement attaché au mot ligne.

Quand $\frac{dM}{dy}$ sera réduit à zéro par les coordonnées de l'ombilic, l'équation (14) aura une racine infinie, qui indiquera une direction perpendiculaire à l'axe des x. Les deux autres racines, étant fournies par une équation du second degré, pourront être imaginaires. Dans ce cas, qui s'est présenté pour le paraboloïde elliptique, il n'y aura pas de direction oblique à l'axe des x, suivant laquelle δ soit d'un ordre supérieur au second. Quant à la racine infinie, pour apprécier l'ordre de grandeur correspondant de δ, il convient de mettre dy^2 en facteur dans l'expression (13), et de prendre pour inconnue $\frac{dx}{dy}$. Or, en égalant à zéro la différentielle de

$$P\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+N\frac{dx}{dy}+M,$$

il est visible qu'on trouvera

$$\frac{dx}{dy}=0.$$

Ainsi la discussion de ce cas revient, au fond, à celle du cas où l'équation (14) aurait une racine nulle.

Enfin, s'il arrivait que tous les coefficients de l'équation (14) fussent identiquement nuls pour l'ombilic, δ serait au moins du troisième ordre infinitésimal dans toutes les directions autour de ce point, et l'on pourrait se proposer de chercher dans quelle direction δ s'élèverait au quatrième ordre. Pour cela, il faudrait égaler à zéro le troisième terme du numérateur de δ, savoir

$$\frac{1}{6}(dq\,d^3\alpha+d\alpha\,d^3q-dp\,d^3\beta-d\beta\,d^3p)+\frac{1}{4}(d^2q\,d^2\alpha-d^2p\,d^2\beta)$$

nous avons dit que ce terme n'est pas la différentielle du second. Mais si l'on désigne celui-ci par H, en sorte que

$$H = dq\,d^2\alpha + d\alpha\,d^2q - dp\,d^2\beta - d\beta\,d^2p,$$

le premier membre de l'équation (14) ne sera autre chose que $\frac{H}{dx^3}$, et le troisième terme du numérateur de δ prendra la forme

$$\frac{1}{6}dH - \frac{1}{12}(d^2q\,d^2\alpha - d^2p\,d^2\beta).$$

En développant ces différentielles, mettant dx^4 en facteur, puis égalant à zéro, on obtiendrait une équation du quatrième degré en $\frac{dy}{dx}$. Il y aurait donc au plus quatre directions à partir de l'ombilic suivant lesquelles δ serait du quatrième ordre infinitésimal. Et ainsi de suite.