JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur une formule pour les différentielles à indices quelconques, à l'occasion d'un Mémoire de M. Tortolini

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 20 (1855), p. 115-120.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1855_1_20__115_0>

NOTE

Sur une formule pour les différentielles à indices quelconques, à l'occasion d'un Mémoire de M. TORTOLINI;

PAR M. J. LIOUVILLE.

Dans le XXI^e cahier du *Journal de l'Ecole Polytechnique,* et plus tard au tome XII du Journal de M. Crelle, j'ai donné la formule suivante :

$$(1) \qquad \int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = (-1)^\mu\,\Gamma(\mu)\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu,$$

où l'indice μ peut avoir une valeur positive quelconque, et même une valeur imaginaire dont la partie réelle soit positive. J'établis l'équation (1) de plusieurs manières, mais sous la condition que dans le développement de $\varphi(x)$ en exponentielles les exposants soient négatifs, ou du moins aient tous leur partie réelle négative, de sorte que dans l'équation

$$\varphi(x) = \sum A e^{-ax},$$

qui exprime ce développement, toutes les quantités a doivent être de la forme

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0.$$

On se rappelle que je définis les différentielles et les intégrales, à indice quelconque μ, d'une fonction y de la variable indépendante x, au moyen du développement de cette fonction en série d'exponentielles. Ayant

$$y = \sum A_m e^{mx},$$

je pose

$$\frac{d^\mu y}{dx^\mu} = \sum A_m\, e^{mx}\, m^\mu$$

et

$$\int^{\mu} y\,dx^{\mu} = \sum A_m \frac{e^{mx}}{m^{\mu}}.$$

Cette définition, qui repose sur la considération des séries, a sans doute ses inconvénients, que je connais fort bien. On a pu et on pourra en présenter d'autres, et dès lors arriver à des résultats en apparence différents des miens, sans que j'aie le droit ni la pensée de m'en étonner. Peut-être reviendrai-je moi-même un jour sur ce sujet en me plaçant à un point de vue tout différent de celui sous lequel je l'ai envisagé d'abord. Mais on doit du moins reconnaître qu'en prenant pour point de départ les séries d'exponentielles on a étendu, sans en altérer en rien la pureté, la belle analogie des puissances et des différences que d'autres notions amoindriraient peut-être ou rendraient en tout cas moins intuitive, moins évidente. N'est-ce pas du reste à l'occasion de cette analogie, qu'il venait de découvrir, que Leibnitz a songé aux différentielles à indices quelconques? Et n'est-ce pas sur l'exponentielle e^{mx} qu'il en a donné un premier exemple, en présentant $e^{mx}\,m^{\mu}$ comme étant, quel que soit μ, la différentielle à indice μ ou l'intégrale à indice $-\mu$ de cette exponentielle? Je l'affirme sans hésiter : c'est en conservant ainsi les grandes liaisons des choses qu'on se prépare des méthodes propres à l'invention, ou tout au moins des inductions suivies et puissantes, auxiliaires souvent indispensables des méthodes rigoureuses, et qu'on ne doit pas dédaigner, même en mathématiques, dussent les résultats auxquels on est ainsi conduit avoir parfois besoin d'une vérification *a posteriori* qu'on demandera à d'autres procédés.

Quoi qu'il en soit, l'équation (1) est une conséquence immédiate de ma définition des intégrales à indice μ. Ayant

$$\varphi(x) = \sum A\, e^{-ax}$$

avec

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0,$$

et la partie réelle de μ étant positive, j'en conclus

$$\int_0^{\infty} \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \sum A\,e^{-ax}\int_0^{\infty} e^{-a\alpha}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha.$$

Mais

$$\int_0^\infty e^{-a\alpha}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}.$$

Donc

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \Gamma(\mu)\sum A\,\frac{e^{-ax}}{a^\mu}.$$

Et puisque, par la définition,

$$\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu = \frac{1}{(-1)^\mu}\sum A\,\frac{e^{-ax}}{a^\mu},$$

il s'ensuit finalement,

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = (-1)^\mu\,\Gamma(\mu)\int^\mu \varphi(x)\,dx^\mu;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si, en supposant toujours

$$a = p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0,$$

on considérait une fonction $f(x)$ se développant en série sous la forme

$$f(x) = \sum A\,e^{ax},$$

où la partie réelle des exposants est positive, la même méthode donnerait

$$\int^\mu f(x)\,dx^\mu = \sum A\,\frac{e^{ax}}{a^\mu},$$

et

$$\int_0^\infty f(x-\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \sum A\,e^{ax}\int_0^\infty e^{-a\alpha}\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha,$$

c'est-à-dire

$$\int_0^\infty f(x-\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \Gamma(\mu)\sum A\,\frac{e^{ax}}{a^\mu},$$

par suite

$$(2) \qquad \int_0^\infty f(x-\alpha)\,\alpha^{\mu-1}\,d\alpha = \Gamma(\mu)\int^\mu f(x)\,dx^\mu:$$

La formule (2) est le complément naturel de la formule (1). Je n'avais donné que la formule (1) dans les Mémoires déjà cités; elle suffisait aux applications que j'avais en vue. Mais M. Alfred Serret ayant eu besoin de la formule (2), dans des recherches sur l'intégration de certaines équations différentielles, l'a démontrée (au tome IX du présent Journal, page 205) comme je viens de le faire, c'est-à-dire comme j'avais démontré auparavant la formule (1) dans le *Journal de l'École Polytechnique ;* ce dont il a eu du reste soin d'avertir. Au surplus, on fait coïncider la formule (2) avec la formule (1), en remplaçant $f(x)$ par $\varphi(-x)$, puis x par $-x$.

Dans un intéressant travail sur les *intégrales générales de quelques équations aux dérivées partielles à coefficients constants,* qu'il a inséré dans la seconde partie du tome XXV des *Mémoires de la Société italienne* résidente à Modène, et dont il m'a fait l'honneur de m'envoyer un exemplaire que je recois à l'instant, M. Tortolini s'est proposé (n° 16) de tirer de l'analogie des puissances et des différences une formule propre à exprimer l'intégrale à indice $\frac{1}{2}$ d'un fonction $f(x)$. En désignant cette intégrale par u, de manière que pour nous

$$u = \int^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx^{\frac{1}{2}},$$

M. Tortolini arrive à la formule suivante :

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f\left(x - \frac{r^2}{4y^2}\right) dy\, dr,$$

où l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ est relative à y, ce qui permet d'écrire aussi

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} f\left(x - \frac{r^2}{4y^2}\right) dy\, dr.$$

M. Tortolini compare ensuite son résultat à celui que donnerait ma formule (1) en y posant $\mu = \frac{1}{2}$, et il observe qu'il y a désaccord, ce que la présence du facteur $\sqrt{-1}$ provenant de $(-1)^\mu$ rend de suite évident. Mais M. Tortolini ne parle pas de la formule (2), et c'est pourtant de celle-là seule qu'il aurait dû rapprocher la sienne d'après les conditions implicitement imposées à la nature de la fonction f

par son analyse. Or pour $\mu = \frac{1}{2}$, la formule (2) nous donne

$$\int^{\frac{1}{2}} f(x)^{\frac{1}{2}} dx^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(x-\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

puisque

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

et c'est précisément à cela que se réduit la formule

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} f\left(x - \frac{r^2}{4y^2}\right) dy\, dr.$$

Posez en effet

$$r = 2y\sqrt{\alpha}, \quad dr = \frac{y\, d\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

et cette formule deviendra

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} f(x-\alpha) \frac{y\, d\alpha}{\sqrt{\alpha}}\, dy;$$

l'intégration relative à y s'effectue alors, et comme

$$\int_0^\infty e^{-y^2} y\, dy = \frac{1}{2},$$

on a définitivement

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty f(x-\alpha) \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}},$$

comme ci-dessus.

Voici du reste en deux mots la méthode de M. Tortolini : je remplace à mon ordinaire l'analogie des puissances et des différences par la considération équivalente du développement en série d'exponentielles. On a

$$f(x) = \sum \mathrm{A}\, e^{ax}, \quad \int^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx^{\frac{1}{2}} = \sum \mathrm{A} \frac{e^{ax}}{\sqrt{a}}.$$

Mettez pour $\frac{1}{\sqrt{a}}$ sa valeur déduite des deux équations

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \int_0^\infty e^{-r\sqrt{a}}\, dr, \quad e^{-r\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(y^2 + \frac{ar^2}{4y^2}\right)}\, dy.$$

qui donnent

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} . e^{-\frac{ar^2}{4r^2}} dy\, dr,$$

et la formule de M. Tortolini s'ensuivra, mais sous l'hypothèse visiblement nécessaire que a soit de la forme

$$p + q\sqrt{-1}, \quad p > 0.$$

Cette méthode ne diffère de celle qui donnerait la formule (2) pour le cas de $\mu = \frac{1}{2}$, qu'en ce que M. Tortolini a employé une valeur de $\frac{1}{\sqrt{a}}$ en intégrale double, tandis que nous avons pris la valeur en intégrale simple,

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a\alpha} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}}.$$

En résumé, la formule de M. Tortolini s'accorde parfaitement avec nos principes, ou plutôt elle en découle, et cela devait être, puisque le point de départ de l'habile géomètre italien est au fond le même que le nôtre.