JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CHASLES

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. F. Woepcke, intitulé : Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 413-430.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__413_0>

Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. F. Woepcke, *intitulé :* Essai d'une restitution des travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles, d'après les indications tirées d'un manuscrit arabe [*].

(Commissaires, MM. Lamé, Chasles rapporteur.)

Le travail dont nous avons à rendre compte se rapporte, tout à la fois, à l'histoire des sciences chez les Grecs et chez les Arabes. A ce double titre, il nous a paru mériter l'attention de l'Académie, surtout dans un moment où, par des révélations inattendues sur l'astronomie égyptienne à des époques reculées, l'illustre doyen de cette Académie a donné un nouvel attrait et une nouvelle impulsion à ces recherches qui nous dévoilent les sources antiques de nos sciences mathématiques et de la civilisation moderne [**].

L'ouvrage de M. Woepcke contient, outre l'*Essai de restitution des travaux d'Apollonius sur les quantités irrationnelles*, qui en est l'objet principal, plusieurs autres parties qu'il eût été difficile d'indiquer sous un seul titre. Nous en ferons, dès le début, l'énumération, pour donner une idée de l'ensemble de ce travail. Voici donc les paragraphes principaux que l'on y distingue :

1°. Notice historique sur les ouvrages d'Apollonius et sur un commentaire inédit du Xe livre d'Euclide, composé par un auteur grec nommé Valens, et retrouvé dans un texte arabe;

---

[*] Voir les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXXVII, page 553; séance du 17 octobre 1853.

[**] *Ibid.*, tome XXXVI, page 245, et tome XXXVII, page 257; séances des 7 février et 16 août 1853.

2°. Analyse de ce Xe livre d'Euclide, qui traite des quantités irrationnelles;

3°. Texte arabe des passages du commentaire de Valens relatifs aux travaux d'Apollonius, avec la traduction et l'éclaircissement de ces passages;

4°. Essai d'une restitution conjecturale des travaux d'Apollonius sur les irrationnelles;

5°. Analyse des deux livres du commentaire de Valens.

Le Ier paragraphe présente un aperçu des divers ouvrages d'Apollonius. Ils se rapportent principalement, comme on sait, à la géométrie, mais non exclusivement, car un fragment du IIe livre des *Collections mathématiques* de Pappus, découvert et publié par Wallis, roule sur des spéculations arithmétiques du grand géomètre de Perge. Le commentaire grec sur le Xe livre d'Euclide, dont M. Woepcke a trouvé une traduction arabe, fait mention de recherches arithmétiques d'un plus haut intérêt, car elles traitent de la théorie des quantités irrationnelles et sont une extension des propositions d'Euclide.

Cette traduction a été faite vers la fin du xe siècle (l'an 358 de l'hégire), par Aboû Othmân le Damascène. La copie qui existe dans le Ms. n° 952. 2. *Supplément arabe* de la Bibliothèque impériale, est de la main d'un géomètre arabe renommé, Ahmed ben Mohammed ben Aldjalîl Alsidjzî, dont M. Woepcke a mis au jour un opuscule sur la trisection de l'angle, à la suite du texte et de la traduction qu'il a publiés de l'*Algèbre* d'Omar Alkhayyâmî, qui traite de la résolution des équations cubiques par les constructions géométriques [*].

Cette circonstance, que la copie de l'ouvrage découvert par M. Woepcke a été faite par un géomètre en renom, est propre à accroître la curiosité qui s'attache naturellement à ce fragment émané d'un auteur grec.

Il était important de connaître le nom et l'époque de cet auteur. Le nom est indiqué dans le Ms., mais incomplétement et peu sûre-

[*] L'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, publiée, traduite et accompagnée d'extraits de manuscrits inédits*, par F. Woepcke, docteur agrégé à l'Université de Bonn, membre de la Société asiatique de Paris. *Paris*, 1851; grand in-8°.

ment, à raison du mode de transcription arabe; toutefois, M. Woepcke pense qu'il faut lire, très-probablement, *Valens*.

C'est par le rapprochement et la comparaison de divers textes, extraits d'autres Mss. arabes, et de plusieurs passages de la biographie des auteurs arabes, rapportés par Casiri dans sa *Bibliothèque de l'Escurial*, qu'il est induit à adopter ce nom. Quant à l'époque où aurait vécu ce géomètre, les documents historiques consultés à diverses sources n'ont fourni à M. Woepcke aucune donnée qui pût lui permettre de la fixer, et il se borne à émettre la conjecture que cet auteur peut être l'astrologue Vettius Valens, qui vivait au temps de Constantin, et auquel Fabricius a consacré une Notice assez étendue dans sa *Bibliothèque grecque*.

Le Xe livre des Éléments d'Euclide est celui qui, dans tous les temps, a présenté le plus de difficultés; tellement qu'au moyen âge et à la renaissance, il était regardé comme la croix des mathématiciens [*]. Chez les Modernes, il a cessé de faire partie des Éléments de géométrie, parce qu'en effet, d'une part, les nombreuses propositions d'Euclide sur la commensurabilité et l'incommensurabilité et sur les propriétés des lignes rationnelles et des irrationnelles, ne se rapportent point aux lignes seulement, mais aux grandeurs en général, et à cette partie des mathématiques qu'on appelle la *Théorie des nombres;* et d'une autre part, que les notations algébriques modernes font disparaître les difficultés qui se rencontrent dans les démonstrations géométriques appliquées à ce genre de propositions. On en jugera par l'identité

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a - b,$$

qui, sous cette forme algébrique, est évidente, mais dont la démonstration géométrique demande des développements préliminaires et une attention soutenue qui n'est pas sans difficultés.

---

[*] « La difficulté du Xe livre d'Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire » jusqu'à l'appeler la croix des mathématiciens, matière trop dure à digérer, et en » laquelle n'aperçoivent aucune utilité. » (STEVIN, Ier livre d'Arithmétique; définition XXI.)

On conçoit donc que depuis longtemps, chez les Modernes, on ait pu regarder l'étude de ce X^e livre d'Euclide comme un travail oiseux et pénible, et qu'on s'en soit affranchi. Cependant il est indispensable que nous présentions ici une analyse précise de cet ouvrage, puisqu'il forme la base de toutes les parties de celui dont nous avons à rendre compte. Nous suivrons religieusement les traces de l'auteur, parce que l'enchaînement et l'ordre parfait qu'il a observé dans le développement de ses nombreuses propositions, forme le caractère de sa méthode, dont on perdrait le fil, et qu'on ne connaîtrait pas, si l'on s'écartait un instant de la voie qu'il a suivie invariablement, et où se décèlent le génie et la pénétration du grand géomètre.

Il nous faut d'abord rappeler quelques définitions propres à ce X^e livre; en premier lieu, celle du mot *irrationnel*, qui a un sens différent de celui que nous lui attribuons maintenant; puis diverses expressions tombées aujourd'hui en désuétude ou même généralement inconnues.

Euclide suppose qu'on a pris une première droite, à laquelle toutes les autres sont comparées par voie de rapport ou de commune mesure; et cette droite est dite *rationnelle.* (Définition cinquième.) Ensuite, il regarde comme *rationnelles* toutes droites *commensurables* à celles-là, soit en *longueur*, soit en *puissance*, c'est-à-dire toutes droites qui ont une commune mesure avec celles-là, ou dont les carrés ont eux-mêmes une commune mesure avec le carré de cette première. (Définition sixième.) Cette définition des lignes *rationnelles* est beaucoup plus étendue que la définition actuelle. Par exemple, la diagonale d'un carré dont le côté est pris pour *rationnelle* est elle-même *rationnelle*, dans le sens d'Euclide, parce que son carré est commensurable avec celui du côté, tandis que dans l'acception moderne cette diagonale est essentiellement *irrationnelle*.

Euclide a eu sans doute quelque raison pour rattacher ainsi, par une acception très-étendue du mot *rationnel*, les deux cas de la *commensurabilité en longueur*, et de la *commensurabilité en puissance*, qui paraissent naturellement si différents, et auxquels, néanmoins, il attribue ainsi le même degré d'importance. Malheureusement, il ne donne, à ce sujet, aucune explication. On ne trouve non plus aucune lumière, sur ce point, dans la partie du commentaire grec analysée par M. Woepcke. Qu'on nous permette ici un rapprochement, quelque étrange et inattendu qu'il puisse paraître, entre une théorie physico-mathématique moderne et cette doctrine d'Euclide. M. Lamé, dans ses leçons sur l'élasticité à la Faculté des Sciences [*], a eu à considérer avec le même degré d'importance, dans le classement des phénomènes vibratoires d'une membrane rectangulaire, les deux cas de la *commensurabilité* et de l'*incommensurabilité en puissance* des deux côtés de la membrane. Or on sait que la théorie des tons musicaux était fort cultivée dans l'école de Pythagore, comme au temps d'Archytas et d'Euclide, et qu'elle se rattachait intimement à l'*arithmétique spéculative*, science distincte de l'arithmétique pratique, et qui formait la *théorie des nombres* de l'époque. Paraîtrait-il hors de toute probabilité qu'Euclide eût puisé dans des considérations tenant à cette théorie musicale tout arithmétique, soit la cause de l'égale importance qu'il donne aux deux cas de la *commensurabilité en longueur* et de la *commensurabilité en puissance*, soit celle, directement, de sa définition étendue de la *rationalité*.

Mais revenons à notre sujet, aux définitions d'Euclide.

Euclide appelle *irrationnelle* toute ligne *incommensurable en puissance* à la ligne prise pour terme de comparaison, c'est-à-dire toute ligne dont le carré n'a pas de commune mesure avec le carré de celle-ci (définition 7).

Parmi les *irrationnelles*, il en distingue une formée par voie de proportion, à laquelle il donne le nom de *médiale;* c'est une ligne dont le carré est égal au rectangle de deux lignes rationnelles *commensurables en puissance seulement* (proposition 22). L'expression de cette ligne est de la forme $x = \sqrt{a}\sqrt[4]{b}$, puisqu'on aura $x^2 = a.\sqrt{b}$; a et $\sqrt{b}$ représentant deux lignes commensurables en puissance seulement.

Euclide applique aux surfaces ces mêmes définitions. Il appelle *rationnel* le carré de la ligne prise pour terme de comparaison (définition 8), *surfaces rationnelles* toutes les surfaces *commensurables à ce carré* (définition 9), et *irrationnelles*, toutes les surfaces incommen-

[*] *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides;* Paris, 1852. *Voir* pages 122 et 130.

surables à ce même carré (définition 10). Parmi les surfaces irrationnelles, il en distingue une qu'il appelle *espace médial* : c'est le rectangle construit sur deux lignes *médiales, commensurables en longueur* (proposition 25), lequel a pour expression $a^2 n' \sqrt{n}$ ou simplement $\sqrt{n}$. Car les deux médiales, *commensurables en longueur*, seront $a \sqrt[4]{n}$ et $n' . a \sqrt[4]{n}$; et leur produit $a^2 n' \sqrt{n}$.

Après la *médiale,* Euclide considère les irrationnelles formées de deux lignes, par voie d'addition ou de soustraction, lesquelles sont au nombre de douze, dont six formées par addition et six par soustraction. Ces douze irrationnelles et la médiale sont l'objet du X^e livre des Éléments. L'auteur y donne leur construction et leurs propriétés.

Ce X^e livre contient cent dix-sept propositions, dont trente-six peuvent être regardées comme des préliminaires nécessaires pour entreprendre la théorie des douze irrationnelles par addition et soustraction. Voici le sujet de ces trente-six propositions : Les vingt-deux premières sont relatives à la commensurabilité et à l'incommensurabilité des droites en *longueur*, et des grandeurs en général. Les propositions 23 à 27 se rapportent aux lignes *rationnelles* et aux *médiales;* on y traite de leur commensurabilité en longueur et en puissance. Dans les propositions 28 à 33, on construit deux rationnelles ou deux médiales, *commensurables en puissance seulement*, et dont le rectangle satisfait à quelque condition. Enfin, dans les trois propositions suivantes (34, 35 et 36), on construit deux droites *commensurables en puissance,* dont la *somme des carrés* et le *rectangle* forment des surfaces *rationnelles* ou *médiales* : puis commence, à la proposition 37, la théorie de douze irrationnelles.

Ces irrationnelles sont formées, avons-nous dit, par addition ou soustraction de deux lignes. On conçoit que ces deux lignes ne peuvent être commensurables en longueur, car leur somme ou leur différence donnerait une simple ligne monôme de même nature qu'elles-mêmes. Il faut donc prendre deux lignes *incommensurables en longueur*. Euclide distingue, à l'égard des carrés ou puissances de ces lignes, le cas de *commensurabilité* et celui d'*incommensurabilité*.

Dans le premier cas, il prend deux lignes *rationnelles* ou *médiales*. Ces lignes devant être *commensurables en puissance,* on reconnaît immédiatement qu'elles sont nécessairement toutes deux rationnelles, ou toutes deux médiales, et que leur rectangle est rationnel ou médial.

De là dérivent trois irrationnelles, formées :

La première, de deux lignes rationnelles dont le rectangle est médial;

La deuxième, de deux lignes médiales ayant un rectangle rationnel;

Et la troisième, de deux lignes médiales ayant un rectangle médial.

Dans le deuxième cas, celui où les deux lignes sont *incommensurables en puissance*, Euclide ne leur assigne point, comme dans le cas de la commensurabilité, une qualité déterminée et restreinte, comme d'être nécessairement *rationnelles* ou *médiales ;* il a recours à d'autres conditions, lesquelles concernent le rectangle des deux lignes et la somme de leurs carrés; il demande que chacune de ces surfaces soit *rationnelle* ou *médiale*.

Ces conditions donnent lieu aux trois combinaisons :

1°. Somme rationnelle et rectangle médial;

2°. Somme médiale et rectangle rationnel;

3°. Somme médiale et rectangle médial.

Les couples de lignes déterminées dans ces trois systèmes forment trois nouvelles irrationnelles.

On voit, d'après ces considérations, que les six irrationnelles, soit par addition, soit par soustraction, sont rangées en deux groupes qui ont un caractère différent.

Les trois premières sont formées de deux lignes *rationnelles* ou *médiales, commensurables en puissance ;* et il n'y a point d'autre condition pour les déterminer : les trois autres sont formées de deux lignes *incommensurables en puissance*, et elles sont déterminées par deux conditions concernant la somme de leurs carrés et leur rectangle.

Euclide construit les six lignes par addition, et démontre leur irrationalité dans six propositions (37-42); puis il démontre dans les six propositions suivantes (43-48) que chacune de ces lignes ne peut être divisée qu'en un seul point, de manière que les deux parties soient deux lignes satisfaisant aux conditions de construction de l'irrationnelle; fort belle proposition pour l'époque, puisqu'elle répond, à l'égard, par exemple, de la première des six irrationnelles, à cette propriété des quantités radicales, savoir, que l'on ne peut avoir $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{a'} + \sqrt{b'}$.

Parlons ici de la terminologie adoptée par Euclide.

En général, quand une ligne est formée par l'addition de deux lignes *rationnelles, commensurables en puissance seulement*, Euclide appelle celles-ci *noms*, et la ligne égale à leur somme, *ligne de deux noms*. Des traducteurs ont dit simplement *ligne binôme* ou *binomiale :* et telle paraît être l'origine, chez les Modernes, de l'expression *binôme*.

La première des six irrationnelles par addition est donc appelée *ligne de deux noms*. Les deux autres irrationnelles du premier groupe sont dites *première de deux médiales* et *seconde de deux médiales*. Les trois du second groupe s'appellent la *majeure; celle qui peut une rationnelle et une médiale*, et *celle qui peut deux médiales*. Nous parlerons plus loin des six irrationnelles par soustraction.

Les *lignes de deux noms* jouent un rôle principal dans cette théorie, et Euclide en distingue six espèces.

Ces lignes étant formées par addition de deux lignes rationnelles, telles que n et $\sqrt{n}$, il semblerait, au premier abord, qu'il ne dût y avoir que deux lignes rationnelles de ce genre, l'une de la forme $n + \sqrt{n}$, et l'autre $\sqrt{n} + \sqrt{n'}$. Cependant Euclide en distingue six espèces différentes, qu'il appelle *première ligne de deux noms, deuxième ligne de deux noms*, etc.

La distinction de ces six irrationnelles de deux noms dérive de la considération suivante. Si l'on forme le rapport de la racine carrée de la différence des carrés des deux termes du binôme irrationnel, au plus grand des deux, ce rapport est nécessairement de la forme n ou $\sqrt{n}$; et ce sont ces deux cas qu'Euclide considère. Ainsi, soient A et B les deux termes ou *noms* d'une *ligne de deux noms*, le rapport dont il s'agit sera $\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}$, en supposant $A > B$, et ce rapport sera de la forme n ou $\sqrt{n}$. Or A devant toujours être plus grand que B, et ces deux lignes étant elles-mêmes de la forme n ou $\sqrt{n}$, on voit que le binôme $A + B$ aura, dans chacun des deux cas relatifs au rapport en question, les trois formes suivantes :

$$a+\sqrt{b},\quad \sqrt{a}+b,\quad \sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

De là dérivent les six espèces de *lignes de deux noms*.

Après avoir fait cette distinction dans six définitions, Euclide construit les six lignes de deux noms (propositions 49-54) et démontre une propriété importante des six irrationnelles formant les deux groupes définis ci-dessus, savoir, que « la moyenne proportionnelle entre une » ligne rationnelle et une droite de deux noms est une des six irrationnelles (propositions 55-60); » et réciproquement, que « chacune des » six irrationnelles est toujours la moyenne proportionnelle entre une » rationnelle et une ligne de deux noms (propositions 61-66); » en d'autres termes, et en nous rapprochant du style moderne, chacune des six irrationnelles est la racine carrée d'un binôme dont chacun des deux termes est une surface *rationnelle* ou *médiale*, c'est-à-dire de la forme n ou $\sqrt{n}$.

Cette belle propriété jette un grand jour sur toute la théorie des irrationnelles du X^e livre d'Euclide; car cette théorie se trouve renfermée dans l'expression de la racine carrée du binôme $A+B$ que voici :

$$\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B^2}}{2}}=\sqrt{A+B}.$$

Les deux termes du premier membre sont les deux lignes dont la somme forme une irrationnelle; et les six irrationnelles distinguées par Euclide répondent aux six cas que présente le rapport $\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{A}$, selon qu'il est de la forme n ou $\sqrt{n}$, comme nous l'avons dit.

Euclide démontre qu'une droite commensurable en longueur avec une des six irrationnelles est elle-même une irrationnelle de même espèce (propositions 67-71). Puis, que la racine carrée du binôme $A+B$ dans lequel A et B sont deux surfaces, *l'une rationnelle et l'autre médiale*, ou *toutes deux médiales*, est une des six lignes irrationnelles (propositions 72-73). En analyse, cette proposition ne diffère pas de celles qui expriment que la moyenne proportionnelle entre une rationnelle et une ligne de deux noms est une des six irrationnelles (propositions 55-60); mais en géométrie, et dans l'état de séparation absolue où se trouvaient ces deux branches des mathématiques, Euclide devait ainsi marcher pas à pas, sans s'écarter de la rigueur qui fait le caractère de la science grecque; et l'on reconnaît qu'il n'y a rien d'inutile dans les trente-sept propositions (37-73) qu'il a consacrées à la construction et à la démonstration des propriétés de ses six irrationnelles par addition.

Il suit la même marche et démontre les mêmes propriétés pour les six irrationnelles par soustraction (propositions 74-111).

Celles-ci se rangent en deux groupes, comme les premières. Les trois irrationnelles du premier groupe sont formées de deux rationnelles ou de deux médiales, *commensurables en puissance seulement;* et les trois du second groupe, de deux lignes *incommensurables en puissance,* déterminées par deux conditions, savoir : que *la somme de leurs carrés* et *leur rectangle* soient deux surfaces *rationnelles* ou *médiales*.

La première irrationnelle du premier groupe, formée de deux rationnelles *commensurables en puissance seulement,* qui correspond à la *ligne de deux noms* dans les irrationnelles par addition, s'appelle *apotome* ou *résidu*. Euclide distingue six *apotomes*, qu'il dénomme *premier, deuxième*, etc., par les mêmes considérations qui l'ont conduit à distinguer six *lignes de deux noms*.

Les six irrationnelles par soustraction sont, en employant ici le style moderne, les racines carrées des six apotomes (propositions 98-103).

Euclide complète cette théorie en démontrant qu'un apotome n'est pas une ligne de deux noms (proposition 112). Et de là il conclut que ses douze irrationnelles binômes, avec la médiale, forment treize lignes d'espèces différentes. Puis, on trouve trois propositions (propositions 113-115), que nous exprimons par l'identité

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(a-b).$$

Dans une autre, Euclide montre qu'il existe des irrationnelles d'un ordre supérieur à la médiale, en nombre infini; ce sont les irrationnelles telles que $\sqrt[p]{a}$ (proposition 116).

Enfin, la cent dix-septième proposition, la dernière du livre, a pour objet de démontrer que la diagonale du carré est incommensurable en longueur avec le côté.

Passons au commentaire de l'auteur grec.

Commentaire de Valens.

M. Woepcke a réparti dans deux sections distinctes l'analyse de ce commentaire, retrouvé, comme nous l'avons dit, dans une traduction arabe. Dans l'une de ces sections, qui forme les §§ 10, 11, 12 et 13 de son Mémoire et qui fait suite immédiatement à une analyse sommaire du X^e livre d'Euclide, il a réuni tous les passages relatifs à la généralisation des propositions de ce X^e livre, attribuée à Apollonius par l'auteur grec; et, dans l'autre, formée des §§ 19 et 20 qui terminent son travail, il donne une analyse ou table sommaire des diverses matières contenues dans tout l'ouvrage grec.

Nous parlerons tout de suite ici de cette dernière partie qui fait connaître en peu de mots la nature et en quelque sorte la physionomie de l'ouvrage, et nous consacrerons les dernières pages de notre Rapport à l'exposé de cette généralisation des propositions d'Euclide, qui a fait le sujet des recherches d'Apollonius, et qui est l'objet principal du travail étendu de M. Woepcke.

L'ouvrage de Valens est en deux livres.

On trouve dans le premier une esquisse historique des développements successifs de la théorie des quantités irrationnelles chez les Grecs depuis Pythagore. L'auteur se livre ensuite à des considérations métaphysiques sur les quantités *continue* et *discontinue*, sur la *commensurabilité* et l'*incommensurabilité*, sur les quantités *rationnelles* et *irrationnelles*. Il parle des travaux de Thétète sur la théorie des irrationnelles, antérieurs à ceux d'Euclide; discute plusieurs passages de Platon relatifs à cette théorie, et compare les idées de ce philosophe aux principes d'Euclide.

Le second livre est plus mathématique et forme un commentaire du X^e livre d'Euclide. Mais M. Woepcke, craignant de donner trop d'extension à son Mémoire, a dû restreindre cette partie de son travail à l'indication succincte des propositions ajoutées à la théorie d'Euclide et des divers sujets sur lesquels l'auteur a disserté.

Plusieurs passages de cette analyse peuvent faire espérer que l'historien trouverait dans l'ouvrage même quelques détails intéressants sur l'état des mathématiques grecques, dont la connaissance nous laisse tant à désirer. De pareils textes anciens sont toujours précieux, d'autant plus qu'ils deviennent chaque jour plus rares; il est donc à désirer que les savants les recueillent avec soin et les mettent, par la voie de l'impression, à l'abri des chances de destruction, qui est leur sort inévitable dans un laps de temps plus ou moins long. Nous exprimerions de vifs regrets que M. Woepcke, dont le zèle et le talent comme orientaliste et mathématicien sont parfaitement à la hauteur d'une tâche difficile et laborieuse, ne nous eût pas fait connaître intégralement cet ouvrage grec, resté jusqu'ici ignoré dans un texte arabe, si nous ne concevions naturellement que la crainte des difficultés que pourrait rencontrer l'impression d'un tel ouvrage a dû le retenir dans ses propres désirs de compléter son travail, quelque attrait que lui offrît ce fragment de l'antiquité grecque.

Passages du commentaire grec, relatifs aux travaux d'Apollonius sur la théorie des quantités irrationnelles.

Le commentateur Valens, après avoir dit que cette théorie prit naissance dans l'école de Pythagore, qu'elle dut des accroissements à Thétète l'Athénien dont Platon donne le nom à l'un de ses livres, ajoute que « le grand Apollonius, dont le génie atteignit au plus haut degré » de supériorité dans les mathématiques, enrichit cette matière d'ad- » mirables théories, après bien des efforts et des travaux. »

« Euclide, continue le commentateur, établit des règles relativement » à la commensurabilité et à l'incommensurabilité, en général; pré- » cisa les définitions et les distinctions des quantités rationnelles et » irrationnelles; exposa un grand nombre d'ordres des quantités irra- » tionnelles, et démontra clairement toute leur étendue.

» Apollonius distingua les espèces des *irrationnelles ordonnées*, et » découvrit la science des quantités appelées *irrationnelles inordon-* » *nées*, dont il produisit un grand nombre par des méthodes exactes. »

Que faut-il entendre ici par ces expressions, *irrationnelles ordonnées* et *irrationnelles inordonnées?* L'auteur grec n'en donne aucune définition; seulement, plus loin, il entre dans une courte explication, assez obscure, dont nous reparlerons après avoir fait connaître ce qui se rapporte à ces irrationnelles et comment on les forme.

On peut concevoir plusieurs manières de généraliser la théorie d'Euclide : soit en formant les irrationnelles, de plusieurs lignes, au lieu de deux; soit en changeant la nature ou la forme des deux lignes composantes, en prenant, par exemple $\sqrt{a}+\sqrt[3]{b}$, au lieu de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

C'est le premier mode de généralisation qu'Apollonius s'est proposé; et ce n'est que par voie d'*addition* qu'il a formé ses irrationnelles polynômes, composées de trois lignes, ou plus en nombre indéfini. Ce que l'auteur grec dit des irrationnelles par *soustraction* est fort restreint, et l'on n'y voit toujours que des irrationnelles binômes. Parlons d'abord des irrationnelles par addition.

L'auteur dit que trois lignes *rationnelles, commensurables en puissance seulement,* forment une *irrationnelle* qu'on appelle la *ligne de trois noms,* et que la démonstration de l'irrationalité est exactement la même que pour le cas de deux lignes.

Toutefois, M. Woepcke remarque que le raisonnement sur lequel repose cette démonstration n'est pas absolument rigoureux.

L'auteur ajoute : « On peut de même construire la *première* et la
» *seconde de trois médiales.* Puis la *majeure,* composée de trois lignes
» *incommensurables en puissance,* telles que l'une d'elles donne avec
» chacune des deux autres une *somme de carrés rationnelle,* tandis
» que le *rectangle* de celles-ci est *médial.* D'une manière analogue, on
» obtient la droite *qui peut une rationnelle et une médiale*; et de même
» celle *qui peut deux médiales.* »

On trouve dans cette énumération des six irrationnelles trinômes, les conditions de construction de la première, appelée la *ligne de trois noms,* et des trois dernières; et il n'est rien dit encore de la construction des deux autres irrationnelles, qui sont la *première* et la *seconde de trois médiales.* Mais plus loin, après avoir reproduit le mode de construction de la ligne de trois noms, formée de trois rationnelles commensurables en puissance seulement, l'auteur ajoute : « Qu'on ait
» trois lignes *médiales, commensurables en puissance* et *dont l'une*

» *comprenne avec chacune des deux autres un rectangle rationnel;* » le carré de la somme de ces trois lignes est irrationnel. » Puis, après un court raisonnement, en forme de démonstration de cette proposition, il dit : « Le reste des autres lignes se trouve dans les mêmes cir» constances. »

Voilà les seuls passages du commentaire grec sur les irrationnelles formées par l'addition de trois lignes. On y voit que ces irrationnelles sont rangées en deux groupes, à l'instar des irrationnelles binômes d'Euclide. Les trois premières sont formées de trois lignes *commensurables en puissance;* et les trois autres, de trois lignes *incommensurables en puissance.*

Cependant il se présente une difficulté, au sujet des deux irrationnelles du premier groupe formées de *trois médiales.* On conçoit bien, par analogie avec les irrationnelles d'Euclide, que le texte, énonçant la condition du *rectangle rationnel*, s'applique à la *première de trois médiales,* et que pour la *seconde de trois médiales* le rectangle devra être *médial.* Alors, il s'agira de *trouver trois lignes médiales, commensurables en puissance, dont l'une comprenne avec chacune des deux autres un rectangle médial;* la somme des trois lignes formera la *seconde de trois médiales.*

Pour ce cas, il n'y a lieu à aucune incertitude, et l'on satisfait aux conditions de la question en prenant pour les trois médiales, comme le fait M. Woepcke, les expressions suivantes :

$$x = \sqrt[4]{ac}, \quad y = \sqrt[4]{\frac{c}{a}}, \quad z = \sqrt[4]{\frac{c}{ab^2}}.$$

Mais pour le cas du *rectangle rationnel,* qui répond à la *première de trois médiales*, les conditions indiquées sont incompatibles, du moins en suivant le sens naturel que l'habile traducteur a donné au texte arabe. Car si l'une des trois médiales x forme avec chacune des deux autres, y et z, un rectangle rationnel, de sorte qu'on ait $xy = m$ et $xz = n$, il s'ensuit que le rapport de celles-ci, $\frac{y}{z}$, s'exprime par un nombre $\frac{m}{n}$, et qu'ainsi ces deux lignes sont commensurables en longueur, quand elles devraient ne l'être qu'en puissance. M. Woepcke conclut de là que le texte peut avoir été altéré, et propose de le rectifier en disant : qu'on ait *trois lignes médiales, dont l'une soit commensurable en puissance avec chacune des deux autres, et comprenne avec chacune de celles-ci un rectangle rationnel.* On satisfait à la question en prenant pour les trois médiales,

$$x = \sqrt{b\sqrt{a}}, \quad y = \sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}, \quad z = p\cdot\sqrt{\frac{b}{\sqrt{a}}}.$$

Il faudrait donc deux règles différentes pour la construction des deux lignes formées de trois médiales, tandis que l'auteur n'en donne qu'une pour les deux cas.

On est induit naturellement à rechercher s'il n'est pas possible de donner au texte un autre sens qui permette de conserver un seul énoncé. Or il semble que cela soit facile, car il suffit d'entendre que l'auteur, en demandant trois *médiales, commensurables en puissance,* n'a pas voulu dire *en puissance seulement.* Alors, on résout la question par les expressions mêmes qui satisfont à l'énoncé modifié par M. Woepcke.

Le texte relatif aux irrationnelles du deuxième groupe, formées chacune de trois lignes *incommensurables en puissance,* paraît suffisamment clair : l'auteur demande pour la première des trois irrationnelles, appelée la *majeure,* que l'une des trois lignes forme avec chacune des deux autres une *somme de carrés rationnelle,* et que le *rectangle* des deux lignes (c'est-à-dire de celles-ci) soit *médial.* Il ajoute que, d'une manière analogue, on obtient la droite *qui peut une rationnelle et une médiale ;* et de même celle *qui peut deux médiales.* On conçoit, par analogie avec les irrationnelles du deuxième groupe d'Euclide, que cela signifie que, pour la droite *qui peut une rationnelle et une médiale,* les *sommes de carrés* seront *médiales,* et le *rectangle rationnel ;* et que, pour la droite *qui peut deux médiales,* les *sommes de carrés* seront *médiales* et le *rectangle* aussi *médial.*

Pour la *majeure,* les trois lignes composantes x, y, z satisfont aux conditions exprimées par les équations

$$x^2 + y^2 = a, \quad x^2 + z^2 = b, \quad yz = \sqrt{c}.$$

M. Woepcke, en posant ces formules, donne les expressions des trois lignes.

On reconnaît aisément qu'on pourrait construire les deux autres irrationnelles avec ces mêmes formules; qu'il suffit d'y remplacer a et b par $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, en conservant $\sqrt{c}$ pour la ligne *qui peut deux médiales*, et en changeant $\sqrt{c}$ en c pour celle *qui peut une rationnelle et une médiale*.

Cependant, pour ces deux lignes, M. Woepcke s'écarte de l'interprétation naturelle du texte. Il remplace le rectangle yz par xy; et il obtient des expressions différentes des trois lignes x, y, z.

On forme toujours ainsi des irrationnelles à trois termes; mais cette manière, dont l'application aux irrationnelles d'un plus grand nombre de termes, peut offrir quelques facilités, a-t-elle bien été dans l'intention de l'auteur grec; devons-nous croire qu'il ait poussé ses recherches au delà des irrationnelles trinômes, et éprouvé le besoin de formules plus susceptibles de généralisation, que celles qui semblent répondre au sens naturel du texte arabe?

Nous n'avons parlé jusqu'ici que des irrationnelles par addition. Ce que l'auteur dit des irrationnelles par soustraction se réduit à très-peu de chose, et il ne considère que des irrationnelles binômes. « Quand on a formé l'*apotome*, dit-il, qui est la différence de deux » droites rationnelles commensurables en puissance seulement, si de » la droite retranchée, appelée par Euclide la *congruente*, on re- » tranche une rationnelle commensurable en puissance seulement » avec elle, on obtient encore un apotome; et de même, si de la » ligne retranchée dans cet apotome, on retranche une rationnelle » commensurable en puissance seulement avec elle, le reste est en- » core un apotome. Il en est de même pour la soustraction des autres » lignes. »

Ainsi l'auteur ne forme pas d'irrationnelles polynômes où entre le signe *moins*. On peut penser que cette question avait offert des difficultés qui auront arrêté Apollonius et les autres géomètres après lui.

Nous avons dit que les irrationnelles considérées par Euclide s'appelaient *irrationnelles ordonnées*, et celles d'Apollonius *irrationnelles inordonnées*.

On lit dans le commentaire grec, que « les *irrationnelles ordonnées*, » lesquelles forment le sujet limité d'une science et se réduisent aux » treize d'Euclide, sont aux *inordonnées*, comme les *rationnelles* sont » aux *irrationnelles ordonnées*. Que les *inordonnées* sont formées des » *ordonnées* au moyen de la proportion, de l'addition et de la sous- » traction. »

Ce peu de mots ne peut donner une idée de ce qu'il faut entendre par *irrationnelles inordonnées*. Mais on trouve dans une préface ou introduction aux *Données* d'Euclide, par Marinus, le disciple et le successeur de Proclus dans l'école platonicienne d'Athènes, au v^e siècle, une explication de ces mots *ordonné* et *inordonné*. On y lit :

Ordonné, ce qui est complétement déterminé et ne peut se faire de diverses façons, comme une droite menée par deux points. *Inordonné*, ce qui n'est pas déterminé complétement et peut se faire de diverses façons, comme un angle passant par deux points.

Comment faut-il appliquer ces définitions précises aux irrationnelles binòmes d'Euclide et aux irrationnelles trinômes d'Apollonius?

On voit bien que la première, celle de l'*ordonné*, convient aux irrationnelles binômes, en ce qu'elle peut s'appliquer à cette belle proposition d'Euclide, savoir qu'une irrationnelle donnée ne peut être divisée qu'en un seul point de manière que ses deux segments forment deux lignes satisfaisant aux conditions de construction de l'irrationnelle; ce qui répond, comme nous l'avons dit, à l'égard, par exemple, de la *ligne de deux noms*, à cette proposition arithmétique, que l'on ne peut avoir $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a'}+\sqrt{b'}$.

On peut donc dire, conformément à la définition de Marinus, que les irrationnelles d'Euclide sont *ordonnées*. Les Anciens auraient-ils pensé que les irrationnelles polynômes n'offraient pas le même caractère, et, par exemple, qu'une ligne de trois noms $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, pût être composée de trois autres rationnelles différentes, et être égale à $\sqrt{a'}+\sqrt{b'}+\sqrt{c'}$? Ce qui ne serait pas exact.

Le chapitre dans lequel M. Woepcke a émis ses vues, au sujet de la divination des propositions sur les irrationnelles polynòmes qui ont pu faire partie de l'ouvrage d'Apollonius, contient six propositions générales correspondantes aux six irrationnelles d'Euclide par addition, lesquelles expriment qu'une somme de lignes, déterminées d'après certaines conditions, forme une ligne *irrationnelle*. Ces propositions sont la généralisation de celles qui, dans le commentaire grec, sont relatives aux irrationnelles trinômes comme nous l'avons vu. M. Woepcke, en énonçant ces propositions générales, ne veut pas dire qu'elles aient été formulées par Apollonius, dans cet état de généralité qui rentre dans l'esprit de l'analyse moderne, mais seulement qu'elles forment une généralisation des irrationnelles trinômes décrites dans le texte arabe, et qu'elles complètent cette théorie.

Nous avons essayé, dans ce Rapport auquel la nature du sujet, devenu si étranger à nos théories mathématiques actuelles, a donné une étendue inaccoutumée, de faire connaître les parties principales de l'ouvrage de M. Woepcke. Nous pensons que cet ouvrage offrira de l'intérêt aux érudits qui cherchent et aiment à retrouver des traces de la culture des sciences dans l'antiquité et l'esprit des méthodes qui, sous des formes parfois très-différentes, ont été la préparation et l'origine de nos méthodes modernes. On saura d'autant plus de gré à M. Woepcke d'avoir mis ses connaissances dans la littérature arabe au service des sciences mathématiques, pour tirer de l'oubli ce fragment de l'école grecque, qu'il lui a fallu beaucoup de zèle et de persévérance pour accomplir ce travail ardu, sur des matières qui ne sont plus cultivées et qui présentaient plusieurs sortes de difficultés. Aussi ce travail nous paraît mériter les encouragements de l'Académie, et nous pensons qu'il y a lieu de le mettre au jour. Nous avons l'honneur de proposer, en conséquence, à l'Académie, d'en voter l'impression dans le *Recueil des Savants étrangers*.

(Les conclusions de ce Rapport ont été adoptées.)

FIN DU DIX-NEUVIÈME VOLUME.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.