JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C.-W. BORCHARDT

Sur la quadrature définie des surfaces courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 369-394.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__369_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR

LA QUADRATURE DÉFINIE DES SURFACES COURBES;

PAR M. C.-W. BORCHARDT (DE BERLIN).

1. Le Mémoire suivant se rapporte à la quadrature des surfaces courbes. Il traite spécialement des problèmes de ce genre que l'on désigne sous le nom de *quadrature définie*, et où il s'agit d'évaluer des aires entières de surfaces fermées, ou, plus généralement, des aires de certaines portions de surface dont les limites sont intimement liées à la nature même de la surface. Le caractère qui distingue la méthode dont je me servirai consiste en ce qu'elle donne l'aire cherchée sous forme d'une intégrale triple, qui, pour l'évaluation de l'aire entière d'une surface fermée, se rapporte à tous les éléments de volume contenus dans cette surface; tandis que la méthode ordinaire la donne sous forme d'une intégrale double, qui se rapporte à tous les éléments d'une surface plane (projection de la surface courbe sur un plan).

Cette différence de forme permet surtout de conserver dans les problèmes où les trois coordonnées jouent le même rôle, la symétrie des calculs, avantage que n'offre pas la méthode ordinaire, laquelle, au contraire, oblige de donner à deux des trois coordonnées la préférence sur la troisième, ou d'avoir recours à de nouvelles variables dont le choix reste pourtant très-arbitraire dans la classe de problèmes qui m'occupe.

J'exposerai deux routes différentes pour arriver à l'expression de l'aire en intégrale triple. Dans la première, je m'appuie sur une propriété des surfaces parallèles. On sait que le volume compris entre deux surfaces parallèles se réduit au produit de l'aire de l'une des deux surfaces par leur distance, lorsque cette dernière devient infiniment petite. L'inversion de ce résultat montre que l'aire d'une surface peut être considérée comme la limite vers laquelle converge le rapport, dont le numérateur est le volume compris entre la surface et sa parallèle, et le dénominateur la distance des deux surfaces. Le numérateur de ce rapport pouvant être exprimé, comme tous les volumes, sous forme d'une intégrale triple, on est conduit à une expression semblable pour la limite du rapport en question, c'est-à-dire pour l'aire de la surface. Cette première route a plusieurs points de commun avec les belles recherches sur les surfaces parallèles, que M. Steiner a communiquées à l'Académie de Berlin (Voir *Monatsberichte der Berliner Akademie*, année 1840, page 114).

La seconde route repose sur des considérations précisément inverses de celles par lesquelles M. Gauss, dans son célèbre Mémoire : *Theoria attractionis corporum sphæroïdicorum* (Commentat. Gotting. tome II), réduit plusieurs intégrations triples, telles que la détermination du volume d'un corps, à des intégrations doubles qui se rapportent à tous les éléments superficiels de ce corps. Par cette voie, on arrive à une formule très-générale qui embrasse toutes les intégrales doubles prises par rapport aux éléments superficiels d'une surface fermée.

J'applique ensuite les expressions en intégrales triples à l'évaluation de l'aire entière de l'ellipsoïde et à la détermination d'une autre intégrale qui s'étend aussi à toute la surface de l'ellipsoïde, et dans laquelle l'élément superficiel est multiplié par la somme des valeurs réciproques des rayons de courbure principale. De cette application, il résulte que ces deux intégrales dépendent du potentiel de l'ellipsoïde aux demi-axes réciproques par rapport au centre (l'attraction étant supposée proportionnelle à la puissance -2 ou -3 de la distance), et qu'elles se déduisent de ce potentiel par des différentiations partielles prises relativement aux axes.

2. Je commence par rappeler une proposition, qui, dans son énoncé analytique, coïncide avec la formule générale dont on se sert pour la transformation des variables dans les intégrales triples, et qui en diffère seulement par la signification géométrique qu'on lui attribue.

« Soient :

$$X = \varphi_1(x, y, z), \quad Y = \varphi_2(x, y, z), \quad Z = \varphi_3(x, y, z),$$

» trois équations qui font dépendre X, Y, Z de x, y, z. Considérons
» x, y, z et X, Y, Z comme les coordonnées rectangulaires de deux
» points variables p et P, et nommons le point P le correspondant
» de p. Soient dm un élément de volume infiniment petit, et dM l'élé-
» ment de volume correspondant, c'est-à-dire l'élément tel qu'un
» point p trouve son correspondant P dans dM ou ne le trouve pas,
» suivant qu'il fait partie de dm ou qu'il n'en fait pas partie. Cela
» posé, le rapport des deux éléments correspondants de volume dm
» et dM est donné par l'équation

$$\frac{dM}{dm} = \sum\left(\pm\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz}\right),$$

» cette notation désignant le déterminant différentiel de X, Y, Z par
» rapport à x, y, z, c'est-à-dire le déterminant des neuf quantités :

$$\begin{array}{ccc} \frac{dX}{dx}, & \frac{dX}{dy}, & \frac{dX}{dz}, \\ \frac{dY}{dx}, & \frac{dY}{dy}, & \frac{dY}{dz}, \\ \frac{dZ}{dx}, & \frac{dZ}{dy}, & \frac{dZ}{dz}. \end{array} \text{»}$$

A l'aide de cette proposition, il est aisé d'établir une formule dont j'aurai besoin dans la suite, et qui exprime le rapport de l'élément superficiel ds d'une surface donnée et de l'élément superficiel correspondant dS de sa surface parallèle. J'entends ici par *points correspondants* de deux surfaces parallèles, deux points déterminés par l'intersection de ces surfaces avec une quelconque de leurs normales communes. Deux *éléments superficiels* de ces deux surfaces seront donc *correspondants* lorsqu'un point quelconque de l'un des deux éléments trouve son correspondant sur l'autre, et *vice versâ*. Pour le rapport entre deux éléments superficiels dont la correspondance est ainsi définie, on connaît déjà l'expression

$$(a) \qquad ds : dS = \rho\rho' : (\rho + \lambda)(\rho' + \lambda),$$

où λ désigne la distance entre les deux surfaces parallèles, et ρ, ρ' les rayons de courbure principaux en un point de l'élément superficiel ds de l'une des deux surfaces, ces rayons étant pris avec le signe

$-$ ou $+$, suivant qu'ils sont dirigés vers l'élement correspondant $d\mathrm{S}$ de l'autre surface ou dans le sens opposé. Mais il s'agit ici d'une autre formule pour le même rapport.

Soit c un paramètre variable qui peut obtenir toutes les valeurs comprises entre les deux limites infiniment peu différentes c_0 et c_1, c_1 étant supposé $> c_0$; soient (f_0), (f), (f_1) les surfaces déterminées par les équations

$$(f_0) \qquad f(x, y, z) = c_0,$$

$$(f) \qquad f(x, y, z) = c,$$

$$(f_1) \qquad f(x, y, z) = c_1,$$

surfaces dont la seconde, en changeant de forme par la variation de c, reste, en général, comprise entre la première et la troisième; soient (F_0), (F), (F_1) les surfaces respectivement parallèles à (f_0), (f), (f_1) à la distance λ et situées du côté où $f(x, y, z)$ croît.

Soient :

ds_0	un élément superficiel de (f_0);
(ψ)	la surface lieu des normales menées à (f_0) le long du contour de ds_0;
ds, ds_1	les éléments superficiels formés sur (f), (f_1) par l'intersection avec (ψ);
$d\mathrm{S}_0$, $d\mathrm{S}$, $d\mathrm{S}_1$	les éléments superficiels situés sur (F_0), (F), (F_1) et correspondants de ds_0, ds, ds_1;
(Ψ)	la surface lieu du contour de l'élément variable $d\mathrm{S}$;
dm_0, dm_1, dm	les éléments de volume renfermés respectivement entre ds_0, ds, (ψ); ds_1, ds, (ψ); ds_0, ds_1, (ψ);
$d\mathrm{M}_0$, $d\mathrm{M}_1$, $d\mathrm{M}$	les éléments de volumes correspondants de dm_0, dm_1, dm, c'est-à-dire renfermés respectivement entre $d\mathrm{S}_0$, $d\mathrm{S}$, (Ψ); $d\mathrm{S}_1$, $d\mathrm{S}$, (Ψ); $d\mathrm{S}_0$, $d\mathrm{S}_1$, (Ψ);

de sorte que

$$dm_0 + dm_1 = dm, \quad d\mathrm{M}_0 + d\mathrm{M}_1 = d\mathrm{M}.$$

Cela posé, on a, d'une part,

$$(b) \qquad dm : d\mathrm{M} = ds : d\mathrm{S}.$$

En effet, chacun des deux couples d'éléments superficiels ds_0 et dS_0, ds et dS comprend deux éléments parallèles entre eux à la distance λ; donc, en considérant ds, dS comme les bases des éléments de volume dm_0, dM_0, les hauteurs de ces derniers sont égales : d'où il suit que les volumes sont entre eux comme les bases, c'est-à-dire que

$$dm_0 : dM_0 = ds : dS.$$

La même proportion a lieu pour

$$dm_1 : dM_1;$$

donc aussi pour

$$dm_0 + dm_1 : dM_0 + dM_1,$$

ou, ce qui est la même chose, pour

$$dm : dM. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'autre part, à chaque point p faisant partie de l'élément de volume dm et situé sur la surface (f), correspond un point P faisant partie de l'élément de volume dM et situé sur la surface (F).

Soient x, y, z les coordonnées du point p situé sur la surface (f), de sorte que x, y, z satisfont à l'équation

$$f(x, y, z) = c;$$

soit N la normale menée à (f) en p, et dirigée vers la région de l'espace où

$$f(x, y, z) > c;$$

soient, enfin, ξ, η, ζ les angles que N forme avec les côtés positifs des axes des coordonnées, de sorte que

$$\cos\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}, \quad \cos\eta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}, \quad \cos\zeta = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz},$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

et où $\sqrt{R}$ doit être prise avec le signe positif; cela posé, les coordonnées X, Y, Z du point P qui correspond à p se déterminent en fonction de x, y, z à l'aide des conditions que P soit situé sur N et à la distance λ de p, ce qui donne les équations :

$$(1)\quad \begin{cases} X = x + \lambda \cos\xi = x + \dfrac{\lambda}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}, \\ Y = y + \lambda \cos\eta = y + \dfrac{\lambda}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}, \\ Z = z + \lambda \cos\zeta = z + \dfrac{\lambda}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}. \end{cases}$$

Et comme ces formules lient les coordonnées x, y, z d'un point quelconque p de l'élément de volume dm aux coordonnées X, Y, Z d'un point correspondant P de l'élément de volume dM, et *vice versâ,* on aura, d'après la proposition énoncée au commencement de ce numéro et d'après les proportions (a), (b),

$$(2)\qquad \frac{dM}{dm} = \frac{dS}{ds} = \left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho'}\right) = \sum\left(\pm\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz}\right).$$

Ce résultat fournit le lemme suivant :

Lemme. — « L'élément superficiel d'une surface donnée se trouve » à l'élément correspondant de sa surface parallèle, dans le rapport » de 1 : L, L étant défini par l'équation

$$(2\ bis)\quad L = \left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho'}\right) = \sum\left(\pm\frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy}\frac{dZ}{dz}\right) = 1 + G\lambda + H\lambda^2,$$

» où

$$(3)\quad \begin{cases} G = \dfrac{1}{\rho} + \dfrac{1}{\rho'} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right) + \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right) + \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right), \\ H = \dfrac{1}{\rho\rho'} = \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right)\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right) + \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right) \\ \qquad + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right) - \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right)\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right) \\ \qquad - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dz}\right)\dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right) - \dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dx}\right)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R}}\dfrac{df}{dy}\right), \end{cases}$$

$$(4)\qquad R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2.$$

» Dans ces formules,

$$f(x, y, z) = \text{constante}$$

» est l'équation de la surface donnée (f), λ la distance de (f) à sa sur-
» face parallèle; ρ, ρ' sont les rayons de courbure principaux de (f) et
» X, Y, Z sont définis en fonction de x, y, z par les équations (1). »

Dans le développement de L suivant les puissances de λ, le coefficient de λ^3 disparaît d'après un théorème connu, car il est le déterminant différentiel des trois quantités $\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}$, $\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}$, $\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}$, qui, ayant la somme de leurs carrés égale à 1, ne sont pas indépendantes entre elles.

Changeons λ en $-\lambda$, et nommons Λ ce que devient L après ce changement; alors

$$\Lambda = \left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{\rho'}\right)$$

s'évanouit pour $\lambda = \rho$ et $\lambda = \rho'$, d'où l'on tire le corollaire suivant :

Corollaire. — « Soit

$$X' = x - \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx},$$

$$Y' = y - \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy},$$

$$Z' = z - \frac{\lambda}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz},$$

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2 :$$

» regardons λ comme indépendant de x, y, z, et formons le détermi-
» nant différentiel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dX'}{dx}, & \frac{dX'}{dy}, & \frac{dX'}{dz} \\ \frac{dY'}{dx}, & \frac{dY'}{dy}, & \frac{dY'}{dz} \\ \frac{dZ'}{dx}, & \frac{dZ'}{dy}, & \frac{dZ'}{dz} \end{vmatrix} = 1 - G\lambda + H\lambda^2;$$

» alors les deux racines de l'équation

$$\Delta = 1 - G\lambda + H\lambda^2 = 0,$$

» sont les deux rayons de courbure principaux ρ, ρ' de la surface dé-

» terminée par l'équation

$$f(x, y, z) = \text{constante},$$

» de sorte que

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = G, \quad \frac{1}{\rho\rho'} = H,$$

» G et H étant donnés par les équations (3). »

3. Considérons à présent le cas dans lequel l'équation

$$f(x, y, z) = c$$

représente une surface fermée (f) qui sépare un volume fini (μ), dans lequel

$$f(x, y, z) < c,$$

du reste de l'espace infini, dans lequel

$$f(x, y, z) > c.$$

Supposons que la surface (f) soit continue ou composée de parties continues, qu'elle soit de courbure continue (sans arêtes et sans pointes) et que sa surface parallèle (F) soit à une distance λ assez petite pour que (f) et (F) ne se coupent pas, et pour que deux surfaces (F), qui correspondent à deux valeurs infiniment peu différentes de c, ne se coupent pas non plus [*].

En conservant les signes du numéro précédent, soient :

dm l'élément de volume;

V_0 le volume entier compris entre (f_0) et sa parallèle (F_0);

V_1 le volume entier compris entre (f_1) et sa parallèle (F_1);

$m_{0,1}$ le volume entier compris entre (f_0) et (f_1);

$M_{0,1}$ le volume entier compris entre (F_0) et (F_1).

Cela posé, le volume entier compris entre (f_0) et (F_1) aura la double expression

$$V_0 + M_{0,1} = m_{0,1} + V_1,$$

[*] On suppose ici que $f(x, y, z)$ soit une fonction bien définie. Sous cette hypothèse, deux surfaces (f), qui correspondent à des valeurs infiniment peu différentes de c, ne se coupent pas, et la même propriété se maintient dans les surfaces (F), au moins pour les valeurs de λ situées au-dessous d'une certaine limite.

d'où

$$V_1 - V_0 = M_{0,1} - m_{0,1};$$

mais on a

$$m_{0,1} = \iiint\limits_{c_0 < f(x,y,z) < c_1} dm,$$

et, d'après les équations (2) et (2 *bis*),

$$M_{0,1} = \iiint\limits_{c_0 < f(x,y,z) < c_1} L\,dm,$$

où

$$L = 1 + G\lambda + H\lambda^2,$$

G et H étant déterminés par les équations (3). On a donc

$$(5)\qquad V_1 - V_0 = \iiint (L-1)\,dm = \iiint\limits_{c_0 < f(x,y,z) < c_1} (G\lambda + H\lambda^2)\,dm.$$

Il est aisé de s'assurer que cette équation ne cessera pas d'être exacte, lorsque la différence $c_1 - c_0$, au lieu d'être infiniment petite, devient finie. Pour le prouver, on n'a qu'à ajouter un nombre indéfini d'équations semblables, qui se succèdent de manière à ce que, dans chaque équation, la limite inférieure de l'inégalité à laquelle $f(x, y, z)$ doit satisfaire, coïncide avec la limite supérieure de l'équation précédente. L'équation (5) permet donc de réduire la détermination du volume V_1 compris entre la surface (f_1), définie par l'équation

$$f(x, y, z) = c_1,$$

et sa surface parallèle (F_1), à la solution du même problème pour une autre valeur c_0 de c.

La fonction $f(x; y, z)$ étant $< c_1$ pour tous les points du volume renfermé dans la surface (f_1), elle y aura une valeur minimum (si nous excluons le cas dans lequel $f(x, y, z)$ peut être discontinue ou infinie pour des valeurs finies de x, y, z), et, ce minimum n'ayant lieu que pour des valeurs de x, y, z qui satisfont aux trois équations

$$\frac{df}{dx} = 0,\quad \frac{df}{dy} = 0,\quad \frac{df}{dz} = 0,$$

il n'y aura, en général, que des points isolés pour lesquels

$$f(x, y, z) = \text{minimum}.$$

Soient c_0 la valeur minimum de $f(x, y, z)$, et n le nombre des points isolés pour lesquels

$$f(x, y, z) = c_0\,;$$

alors la condition

$$c_0 < f(x, y, z) < c_1$$

se réduit simplement à

$$f(x, y, z) < c_1\,;$$

de plus, le volume V_0 se réduit au volume de n sphères au rayon λ, c'est-à-dire à $\frac{4}{3}n\pi\lambda^3$. Par conséquent, la formule (5) (en y omettant les indices de c_1 et de V_1) devient

$$V = \iiint_{f(x,y,z)<c} (G\lambda + H\lambda^2)\,dm + \frac{3}{4}n\pi\lambda^3.$$

Divisant par λ et faisant décroître cette quantité jusqu'à zéro, la limite vers laquelle converge le rapport $\frac{V}{\lambda}$ est l'aire entière s de la surface fermée (f), d'où

$$s = \iiint_{f(x,y,z)<c} G\,dm.$$

On a donc les deux théorèmes :

Théorème I. — *Soit f une fonction de x, y, z telle, que l'équation $f = c$ représente une surface fermée (f) qui sépare un volume fini (μ), dans lequel $f < c$, du reste de l'espace infini dans lequel $f > c$; cela posé, l'aire entière s de la surface fermée (f) est*

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} s &= \iiint G\,dm \\ &= \iiint\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

où les intégrales triples s'étendent à tous les éléments de volume dm

qui font partie du volume (μ), *ou, ce qui est la même chose, à toutes les valeurs de* x, y, z *propres à vérifier l'inégalité* $f < c$.

Théorème II. — *En maintenant les hypothèses du théorème précédent, soit* n *le nombre des points isolés pour lesquels la fonction* f *a sa valeur minimum, soit* (F) *la surface parallèle à* (f) *à la distance* λ *et du côté où* $f > c$; *cela posé, le volume entier* V *compris entre* (f) *et* (F) *est*

$$(7)\qquad \mathrm{V} = s\lambda + s_1\lambda^2 + \frac{3}{4}n\pi\lambda^3,$$

s_1 *étant donné par l'équation*

$$(7\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} s_1 &= \int\!\!\int\!\!\int \mathrm{H}\, dm \\ &= \int\!\!\int\!\!\int \left\{\begin{aligned} &\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dy}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dz}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dz}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dx}\right) \\ &+ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dx}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dy}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dy}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dz}\right) \\ &- \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dz}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dx}\right) - \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dx}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{R}}}\frac{df}{dy}\right) \end{aligned}\right\} dm, \end{aligned}\right.$$

où les variables x, y, z *doivent prendre toutes les valeurs propres à vérifier l'inégalité* $f < c$.

4. Je passe maintenant à la seconde manière d'établir les résultats obtenus ci-dessus. Au lieu de se borner à ces résultats spéciaux, on arrive, par les considérations suivantes, avec la même facilité, à une formule plus générale, qui transforme toute intégrale double

$$\int\!\!\int \varphi(x, y, z)\, ds,$$

étendue aux éléments superficiels ds d'une surface fermée, en une intégrale triple.

Conservons les signes des numéros précédents.

Soient (f) la surface fermée définie par l'équation

$$f(x, y, z) = c;$$

(μ) le volume renfermé dans (f) et pour tous les points duquel on a

$$f(x, y, z) < c:$$

ds un élément superficiel de (f); p un point faisant partie de ds et ayant les coordonnées x, y, z; N la normale de (f) en p dirigée vers la région extérieure au volume (μ); ξ, η, ζ les angles formés par la normale N et les côtés positifs des axes des x, y, z.

Concevons, avec M. Gauss, une droite g parallèle à l'axe des x, qui perce le plan des y, z dans le point dont les coordonnées sont y, z.

Dans ce plan, soit

$$d\omega = dydz$$

le rectangle élémentaire dont les quatre angles sont les points correspondants aux coordonnées y, z; $y + dy$, z; y, $z + dz$; $y + dy$, $z + dz$; et soit (C) le prisme infiniment mince dont $d\omega$ est la base et g l'une des arêtes. En parcourant la droite g depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$, on trouve un nombre pair de points p', p'', p''', etc., correspondants aux valeurs x', x'', x''', etc., de x, dans lesquels cette droite rencontre la surface (f) : savoir, elle entre dans le volume (μ) en p', elle en sort en p'', elle y rentre entre en p''', etc. Soient ds', ds'', ds''', etc., les éléments superficiels de (f), desquels les points p', p'', p''', etc., font partie, et que le prisme (C) détermine sur la surface (f) en la coupant. Soient N′, N″, N‴, etc., les normales de (f) en p', p'', p''', etc., et soient ξ', η', ζ', ξ'', η'', ζ'', ξ''', η''', ζ''', etc., ce que deviennent les angles ξ, η, ζ pour les normales N′, N″, N‴, etc. Cela posé, on a les équations

$$\begin{aligned}
\cos\xi' \,.\, ds' &= -\,d\omega,\\
\cos\xi'' \,.\, ds'' &= +\,d\omega,\\
\cos\xi''' \,.\, ds''' &= -\,d\omega,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Soit $\varphi(x, y, z)$ une fonction quelconque de x, y, z; multiplions ces équations respectivement par

$$\begin{aligned}
&\varphi(x', y, z) \,.\, \cos\xi',\\
&\varphi(x'', y, z) \,.\, \cos\xi'',\\
&\varphi(x''', y, z) \,.\, \cos\xi''',\\
&\ldots,
\end{aligned}$$

et faisons la somme des produits; alors il vient

$$\varphi(x', y, z).\cos\xi'^2 ds' + \varphi(x'', y, z).\cos\xi''^2 ds'' + \varphi(x''', y, z).\cos\xi'''^2 ds''' + \ldots$$
$$= d\omega[-\varphi(x', y, z).\cos\xi' + \varphi(x'', y, z).\cos\xi'' - \varphi(x''', y, z).\cos\xi''' + \ldots].$$

La série qui, dans le second membre de cette équation, se trouve multipliée par $d\omega$, peut être convertie en une intégrale. En effet, on a

$$\cos\xi = \frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx},$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

la racine de R devant être prise avec le signe positif. La différence

$$\varphi(x'', y, z).\cos\xi'' - \varphi(x', y, z).\cos\xi'$$

est donc égale à l'intégrale

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx,$$

et de même la série

$$-\varphi(x', y, z).\cos\xi' + \varphi(x'', y, z).\cos\xi'' - \varphi(x''', y, z).\cos\xi''' + \ldots$$

est égale à

$$\int_{x'}^{x''} \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx + \int_{x'''}^{x^{\text{IV}}} \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx + \ldots,$$

c'est-à-dire égale à l'intégrale

$$\int \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx,$$

étendue à tous les éléments linéaires dx de la droite g, faisant partie du volume (μ). Cette intégrale, multipliée par $d\omega = dy\,dz$, c'est-à-dire par la base du prisme infiniment mince (C), est donc égale à l'intégrale triple

$$\iiint \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right] dx\,dy\,dz,$$

étendue à tous les éléments de volume $dx\,dy\,dz$ du prisme (C), faisant partie du volume (μ).

En variant le prisme (C), de sorte qu'il reste toujours parallèle à l'axe des x, et en sommant tous les résultats partiels, on arrive à ce résultat final, que l'intégrale double

$$\iint \varphi(x, y, z) \cos \xi^2 \, ds,$$

étendue à tous les éléments superficiels ds de la surface (f), est égale à l'intégrale triple

$$\iiint \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}} \frac{df}{dx}\right] dx\,dy\,dz,$$

étendue à tous les éléments de volume $dx\,dy\,dz$ qui font partie du volume (μ).

Il y a deux égalités semblables qui se rapportent d'une manière analogue à l'axe des y et à l'axe des z. En désignant, comme dans les numéros précédents, par dm l'élément de volume $dx\,dy\,dz$, on a donc les trois équations :

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \iint \varphi(x, y, z) \cos \xi^2 \, ds &= \iiint \frac{d}{dx}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}} \frac{df}{dx}\right] dm, \\ \iint \varphi(x, y, z) \cos \eta^2 \, ds &= \iiint \frac{d}{dy}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}} \frac{df}{dy}\right] dm, \\ \iint \varphi(x, y, z) \cos \zeta^2 \, ds &= \iiint \frac{d}{dz}\left[\frac{\varphi(x, y, z)}{\sqrt{R}} \frac{df}{dz}\right] dm, \end{aligned}\right.$$

les intégrales doubles s'étendant à tous les éléments superficiels ds de la surface (f), et les intégrales triples à tous les éléments de volume dm qui font partie du volume (μ), c'est-à-dire à toutes les valeurs de x, y, z propres à vérifier l'inégalité

$$f(x, y, z) < c.$$

En faisant la somme des équations (8) et en remarquant que

$$\cos \xi^2 + \cos \eta^2 + \cos \zeta^2 = 1,$$

on arrive au théorème général suivant.

Théorème III. — *Soit φ une fonction quelconque de x, y, z et f une* *fonction des mêmes variables, telle que $f = c$ représente une surface fermée (f) qui sépare un volume fini (μ), dans lequel $f > c$, du reste de l'espace infini dans lequel $f > c$; cela posé, l'intégrale double*

$$\iint \varphi\, ds,$$

étendue à tous les éléments superficiels de la surface (f), est transformée en une intégrale triple par la formule

$$(9)\quad \iint \varphi\, ds = \iiint \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{\varphi}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

et où l'intégrale triple s'étend à tous les éléments de volume dm qui font partie du volume (μ), c'est-à-dire à toutes les valeurs de x, y, z propres à vérifier l'inégalité $f < c$.

Si dans ce théorème on pose

$$\varphi = 1,$$

on retrouve l'expression (6) pour l'aire s de la surface (f).

Si l'on pose

$$\varphi = L = \left(1 + \frac{\lambda}{\rho}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{\rho'}\right) = 1 + G\lambda + H\lambda^2,$$

L, G, H étant définis par les équations (2 *bis*), (3); alors (d'après le lemme du n° **2**) la seconde partie de l'équation (9) donne pour l'aire complète S de la surface (F) parallèle à (f) à la distance λ, une expression en intégrales triples, analogue à celle que l'équation (7) a fournie pour le volume V compris entre (f) et (F), tandis que ces mêmes quantités S et V ont été exprimées par M. Steiner en intégrales doubles.

Chacune des deux parties de l'équation (9) prend, par la substitution de L au lieu de φ, la forme

$$s + t\lambda + u\lambda^2,$$

on a donc

$$S = s + t\lambda + u\lambda^2,$$

$$s = \int\int ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

$$t = \int\int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

$$u = \int\int \frac{1}{\rho\rho'} ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm.$$

De l'aire complète S de la surface (F) on passe au volume V par la formule suivante qu'il est aisé de démontrer,

$$V = \int_0^\lambda S\,d\lambda,$$

d'où

$$V = s\lambda + \frac{1}{2}t\lambda^2 + \frac{1}{3}u\lambda^3.$$

En comparant ce résultat avec l'équation (7), on trouve

$$t = 2s_1 = \int\int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds = 2\int\int\int H\,dm$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

$$u = 4n\pi = \int\int \frac{1}{\rho\rho'} ds$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{H}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm.$$

En y joignant l'équation (6), c'est-à-dire l'équation

$$s = \int\int ds = \int\int\int G\,dm$$

$$= \int\int\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

et en se rappelant que

$$G = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}, \quad H = \frac{1}{\rho\rho'},$$

on arrive aux égalités suivantes :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\iint ds = \iiint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) dm, \\ &\frac{1}{2}\iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds = \iiint \frac{1}{\rho\rho'}\, dm, \\ &\iint \frac{1}{\rho\rho'}\, ds = 4n\pi, \end{aligned} \right.$$

qui méritent d'être signalées, et que l'on peut regarder comme se rapportant à un système de surfaces de niveau. Dans les premiers membres de ces équations les rayons de courbure ρ, ρ' sont relatifs à une surface de niveau déterminée; dans les seconds membres, ils sont relatifs à tout le système, de sorte que, dans cette dernière acception, il existe, pour chaque point de l'espace, deux rayons de courbure principaux. Les intégrations doivent être étendues, comme dans ce qui précède, à tous les éléments superficiels ds de la surface (f) et à tous les éléments de volume dm renfermés dans la même surface.

L'équation

$$\iint \frac{1}{\rho\rho'}\, ds = 4n\pi$$

est l'expression analytique du théorème connu, que la courbure entière (*curvatura integra*) d'une surface fermée complète est égale à un nombre entier n de surfaces sphériques au rayon 1. Ce nombre n est donc égal au nombre de points isolés auxquels se réduit la surface fermée déterminée par l'équation

$$f = c$$

pour la valeur minimum de c.

Dans l'article cité plus haut M. Steiner a donné aux deux intégrales

$$\iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds \quad \text{et} \quad \iint \frac{1}{\rho\rho'}\, ds,$$

étendues à une portion quelconque de surface, des noms que je traduis un peu librement par ceux de *courbure cylindrique* et de *cour-*

bure sphérique, de sorte que notre courbure sphérique est identique à la courbure entière (*curvatura integra*) de M. Gauss [*]. Les intégrales $t = 2s_1$ et $u = 4n\pi$ sont donc les courbures cylindrique et sphérique complètes d'une surface fermée.

En substituant dans l'expression obtenue de S la valeur de u, on arrive au théorème suivant :

Théorème IV. — *En admettant les hypothèses des théorèmes* I, II, *l'aire complète* S *de la surface* (F), *parallèle à* (f) *à la distance* λ, *est*

$$S = s + t\lambda + 4n\pi\lambda^2,$$

s désignant l'aire complète de (f), *n le nombre des points isolés pour lesquels* $f(x, y, z)$ *a sa valeur minimum, et t la courbure cylindrique complète de* (f), *c'est-à-dire l'expression*

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} t &= \iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds \\ &= \iiint \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm, \end{aligned} \right.$$

où les intégrations se rapportent à tous les éléments superficiels ds de la surface (f) *et à tous les éléments de volume dm renfermés dans la même surface* (f).

En terminant ce numéro, j'observerai que les résultats précédents concernant tous des intégrations étendues à des surfaces fermées complètes, peuvent, avec de légères modifications et les conditions convenables, être appliqués à des intégrations étendues à certaines portions de surfaces non fermées. Pour en donner un exemple, j'énoncerai le théorème suivant :

Théorème V. — *Soit* (E) *la portion positive de l'espace, c'est-à-dire la portion de l'espace qui correspond à des valeurs positives des cour-*

[*] Les dénominations imaginées par M. Steiner sont textuellement *Summe der Kantenkruemmung* et *Summe der Eckenkruemmung*. Regardez une surface comme un polyèdre, suivant l'esprit du calcul infinitésimal, et vous comprendrez comment l'illustre géomètre a pu être naturellement conduit à cette façon de parler.

données; soit (f) *la surface représentée par l'équation*

$$f = c;$$

et soit f *une fonction de* x, y, z, *telle que la portion positive* s *de la surface* (f), *c'est-à-dire la portion de* f *qui se trouve dans* (E), *sépare un volume fini* (μ), *dans lequel* $f < c$, *du reste de* (E), *dans lequel* $f > c$; *soit enfin*

$$\frac{df}{dx} = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ quels que soient } y \text{ et } z;$$

$$\frac{df}{dy} = 0 \text{ pour } y = 0 \text{ quels que soient } z \text{ et } x;$$

$$\frac{df}{dz} = 0 \text{ pour } z = 0 \text{ quels que soient } x \text{ et } y.$$

Cela posé, la portion positive s *de la surface* (f) *est*

$$s = \int\!\!\int\!\!\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{df}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

où les variables doivent prendre toutes les valeurs positives propres à vérifier l'inégalité $f < c$.

5. Je ferai maintenant l'application des théorèmes I et IV à l'évaluation de l'aire entière s de l'ellipsoïde et de sa courbure cylindrique complète

$$t = \int\!\!\int \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds.$$

Les équations (6) et (11) donnent, pour ces deux intégrales, les expressions suivantes en intégrales triples :

$$s = \int\!\!\int\!\!\int G\, dm$$

$$= \int\!\!\int\!\!\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{df}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

$$t = \int\!\!\int\!\!\int \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dy}\right) + \frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{df}{dz}\right)\right] dm,$$

où

$$R = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

les intégrales étant prises pour toutes les valeurs de x, y, z propres à vérifier l'inégalité $f > c$.

Dans le cas d'un ellipsoïde aux demi-axes α, β, γ, il faut faire

$$f = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1\right), \quad c = 0.$$

Alors, en posant

$$x = \alpha x', \quad y = \beta y', \quad z = \gamma z',$$

de sorte que

$$dm = dx\,dy\,dz = \alpha\beta\gamma\,dx'dy'dz',$$

on trouve

$$s = \alpha\beta\gamma \iiint_{x'^2+y'^2+z'^2<1} G\,dx'dy'dz',$$

$$t = \alpha\beta\gamma \iiint_{x'^2+y'^2+z'^2<1} G'\,dx'dy'dz',$$

$$G = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx'}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{x'}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}\frac{d}{dy'}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{y'}{\beta}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\frac{z'}{\gamma}\right),$$

$$G' = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx'}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{x'}{\alpha}\right) + \frac{1}{\beta}\frac{d}{dy'}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{y'}{\beta}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dz}\left(\frac{G}{\sqrt{R}}\frac{z'}{\gamma}\right),$$

$$R = \frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} + \frac{z'^2}{\gamma^2}.$$

Une fonction ψ homogène de l'ordre zéro de x' et de α, c'est-à-dire qui ne dépend que du quotient $\frac{x'}{\alpha}$, satisfait à l'équation

$$x'\frac{d\psi}{dx'} + \alpha\frac{d\psi}{d\alpha} = 0.$$

Cette remarque permet de convertir les différentiations relatives à x', y', z', qui se trouvent dans G et dans G', en différentiations relatives à α, β, γ. On obtient ainsi :

$$G = -\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha\sqrt{R}}\right) - \frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta\sqrt{R}}\right) - \frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma\sqrt{R}}\right),$$

$$\frac{G}{\sqrt{R}} = -\frac{1}{2}\alpha\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2 R}\right) - \frac{1}{2}\beta\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta^2 R}\right) - \frac{1}{2}\gamma\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma^2 R}\right).$$

L'expression de G substituée dans l'intégrale s donne :

$$s = -\alpha\beta\gamma \iiint \left(\beta\gamma\frac{dv}{d\alpha} + \gamma\alpha\frac{dv}{d\beta} + \alpha\beta\frac{dv}{d\gamma}\right) dx'dy'dz'$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 < 1,$$

où

$$v = \frac{1}{\alpha\beta\gamma\sqrt{R}}.$$

Les limites de l'intégration par rapport à x', y', z' étant données par une inégalité qui ne contient pas les quantités α, β, γ, on peut intervertir l'ordre de ces intégrations et des différentiations par rapport à α, β, γ. Donc, en posant

$$P = \iiint \frac{dx'dy'dz'}{\alpha\beta\gamma\sqrt{R}},$$
$$x'^2y'^2z'^2 < 1$$

expression qui, en faisant

$$x' = \alpha x'', \quad y' = \beta y'', \quad z' = \gamma z'',$$

se transforme en

$$P = \iiint \frac{dx''dy''dz''}{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2}},$$
$$\alpha^2 x''^2 + \beta^2 y''^2 + \gamma^2 z''^2 < 1$$

on trouve

$$(12) \qquad s = -\alpha^2\beta^2\gamma^2\left(\frac{1}{\alpha}\frac{dP}{d\alpha} + \frac{1}{\beta}\frac{dP}{d\beta} + \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{d\gamma}\right).$$

En substituant la valeur de $\frac{G}{\sqrt{R}}$ dans G', on obtient neuf termes : trois de la forme

$$-\frac{1}{2\alpha}\frac{d}{dx'}\left[x'\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha^2 R}\right)\right] = -\frac{1}{2\alpha}\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx'}\left(\frac{x}{\alpha R}\right)\right] = \frac{1}{2\alpha}\frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{1}{\alpha R}\right),$$

et six autres de la forme

$$-\frac{1}{2\beta}\frac{d}{dy'}\left[\frac{y'}{\beta}\,\gamma\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma^2 R}\right)\right] = \frac{1}{2}\frac{d}{d\beta}\left[\frac{\gamma}{\beta}\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{\gamma^2 R}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\beta\, d\gamma}\left(\frac{1}{\beta\gamma R}\right) - \frac{1}{2\gamma}\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta\gamma R}\right).$$

Donc, en posant

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma R} = w,$$

on a

$$G' = \frac{\beta\gamma}{2\alpha}\frac{d^2 w}{d\alpha^2} + \frac{\gamma\alpha}{2\beta}\frac{d^2 w}{d\beta^2} + \frac{\alpha\beta}{2\gamma}\frac{d^2 w}{d\gamma^2}$$
$$+ \alpha\frac{d^2 w}{d\beta\, d\gamma} + \beta\frac{d^2 w}{d\gamma\, d\alpha} + \gamma\frac{d^2 w}{d\alpha\, d\beta}$$
$$- \frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma}\frac{dw}{d\alpha} - \frac{\gamma^2+\alpha^2}{2\gamma\alpha}\frac{dw}{d\beta} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\frac{dw}{d\gamma}.$$

En substituant cette valeur de G' dans l'intégrale t, puis en intervertissant encore des intégrations et des différentiations, on obtient :

$$(13)\quad t = \alpha^2\beta^2\gamma^2\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2\alpha^2}\dfrac{d^2 Q}{d\alpha^2} + \dfrac{1}{2\beta^2}\dfrac{d^2 Q}{d\beta^2} + \dfrac{1}{2\gamma^2}\dfrac{d^2 Q}{d\gamma^2} \\ + \dfrac{1}{\beta\gamma}\dfrac{d^2 Q}{d\beta\, d\gamma} + \dfrac{1}{\gamma\alpha}\dfrac{\delta^2 Q}{d\gamma\, d\alpha} + \dfrac{1}{\alpha\beta}\dfrac{d^2 Q}{d\alpha\, d\beta} \\ - \dfrac{1}{2\alpha}\left(\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}\right)\dfrac{dQ}{d\alpha} - \dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{1}{\gamma^2}+\dfrac{1}{\alpha^2}\right)\dfrac{dQ}{d\beta} - \dfrac{1}{2\gamma}\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)\dfrac{dQ}{d\gamma} \end{array}\right\},$$

où

$$Q = \underset{x'^2 y'^2 z'^2 < 1,}{\iiint} \frac{dx'\,dy'\,dz'}{\alpha\beta\gamma R},$$

expression qui, en posant

$$x' = \alpha x'', \quad y' = \beta y'', \quad z' = \gamma z'',$$

se transforme en

$$Q = \underset{\alpha^2 x''^2 + \beta^2 y''^2 + \gamma^2 z''^2 < 1}{\iiint} \frac{dx''\,dy''\,dz''}{x''^2 + y''^2 + z''^2}.$$

On a donc le résultat suivant :

« Désignons par P, Q le potentiel de l'ellipsoïde aux demi-axes
» $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ relatif au centre et pour des attractions respectivement pro-
» portionnelles aux puissances -2, -3 de la distance, de sorte
» qu'en désignant par dm l'élément de volume, on ait

$$P = \iiint \frac{dm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad Q = \iiint \frac{dm}{x^2+y^2+z^2},$$

» où les variables prennent toutes les valeurs propres à vérifier l'iné-
» galité

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 < 1.$$

» Soient ds la surface complète de l'ellipsoïde aux demi-axes α, β, γ;
» ρ, ρ' ses rayons de courbure principaux; t l'intégrale

$$\iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds,$$

» rapportée à tous les éléments ds de la surface s. Cela posé, les inté-
» grales s, t dépendent de P, Q, au moyen des équations

$$(12) \qquad s = -\alpha^2\beta^2\gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha}\frac{dP}{d\alpha} + \frac{1}{\beta}\frac{dP}{d\beta} + \frac{1}{\gamma}\frac{dP}{d\gamma}\right),$$

$$(12) \qquad t = \alpha^2\beta^2\gamma^2 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{2\alpha^2}\dfrac{d^2Q}{d\alpha^2} + \dfrac{1}{2\beta^2}\dfrac{d^2Q}{d\beta^2} + \dfrac{1}{2\gamma^2}\dfrac{d^2Q}{d\gamma^2} \\ + \dfrac{1}{\beta\gamma}\dfrac{d^2Q}{d\beta\, d\gamma} + \dfrac{1}{\gamma\alpha}\dfrac{d^2Q}{d\gamma\, d\alpha} + \dfrac{1}{\alpha\beta}\dfrac{d^2Q}{d\alpha\, d\beta} \\ - \dfrac{1}{2\alpha}\left(\dfrac{1}{\beta^2} + \dfrac{1}{\gamma^2}\right)\dfrac{dQ}{d\alpha} - \dfrac{1}{2\beta}\left(\dfrac{1}{\gamma^2} + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)\dfrac{dQ}{d\beta} \\ - \dfrac{1}{2\gamma}\left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}\right)\dfrac{dQ}{d\gamma} \end{array} \right\}. \text{ »}$$

Cette liaison entre différentes intégrales multiples ne me semble pas indigne de l'attention des géomètres, d'autant plus qu'on y est parvenu sans avoir eu besoin d'évaluer auparavant ces intégrales. Entre les expressions finales en intégrales simples, pour l'aire de l'ellipsoïde et pour les attractions de l'ellipsoïde à axes réciproques sur un point intérieur, M. Jellett a remarqué une liaison analogue à celle qui existe entre P et s, mais qui pourtant en est différente (*voir* le t. XII de ce Journal, p. 92, année 1847).

Les équations (12), (13) conduisent aux expressions finales de s et t par la substitution des valeurs de P et Q en intégrales simples. On a généralement

$$\iiint_{\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2<1} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{p-1}{2}}}$$

$$= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p-1}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{p}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{u^{\frac{p-3}{2}}\,du}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}$$

(*voir* le Mémoire de M. Dirichlet, *Académie de Berlin*, année 1839, page 77); de là, pour $p = 2$ et $p = 3$,

$$\mathrm{P} = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}},$$
$$\mathrm{Q} = \iiint \frac{dx\,dy\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} = 2\pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}.$$

(Ces valeurs de P, Q peuvent également être prises dans le Mémoire de Jacobi : *De transformatione et determinatione integralium duplicium*, Journal de M. Crelle, tome X, page 101.)

Faisons

$$\alpha^2 = \alpha', \quad \beta^2 = \beta', \quad \gamma^2 = \gamma',$$
$$\varphi(u) = (u + \alpha')(u + \beta')(u + \gamma');$$

de sorte que

$$\mathrm{P} = \pi \int_0 \frac{du}{\sqrt{u\varphi(u)}}, \qquad \mathrm{Q} = 2\pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}};$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha} = 2\alpha \frac{d\mathrm{P}}{d\alpha}, \quad \frac{d^2\mathrm{Q}}{d\alpha^2} = 2\frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha'} + 4\alpha \frac{d^2\mathrm{Q}}{d\alpha'^2}, \quad \frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta\,d\gamma}\, 4\beta\gamma \frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta'\,d\gamma'}, \ldots$$

Ces valeurs, substituées dans les équations (12), (13), donnent

$$\begin{aligned} s &= -2\alpha'\beta'\gamma'\left(\frac{d\mathrm{P}}{d\alpha'} + \frac{d\mathrm{P}}{d\beta'} + \frac{d\mathrm{P}}{d\gamma'}\right) \\ &= -2\pi\alpha'\beta'\gamma' \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \left\{ \frac{d}{d\alpha'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\beta'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\gamma'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right]\right\} \\ &= -2\pi\alpha'\beta'\gamma' \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right]; \end{aligned}$$

et de même,

$$t = \alpha'\beta'\gamma' \left\{ \begin{aligned} & 2\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\alpha'^2} + 2\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta'^2} + 2\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\gamma'^2} \\ & + 4\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\beta'\,d\gamma'} + 4\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\gamma'\,d\alpha'} + 4\frac{d^2\mathrm{Q}}{d\alpha'\,d\beta'} \\ & - \left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right)\left(\frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha'} + \frac{d\mathrm{Q}}{d\beta'} + \frac{d\mathrm{Q}}{d\gamma'}\right) \\ & + \frac{2}{\alpha'}\frac{d\mathrm{Q}}{d\alpha'} + \frac{2}{\beta'}\frac{d\mathrm{Q}}{d\beta'} + \frac{2}{\gamma'}\frac{d\mathrm{Q}}{d\gamma'} \end{aligned} \right\}.$$

Or

$$\frac{dQ}{d\alpha'} + \frac{dQ}{d\beta'} + \frac{dQ}{d\gamma'}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty du \left\{ \frac{1}{d\alpha'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\beta'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] + \frac{d}{d\gamma'}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right]\right\}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty du \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] = \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi(\infty)}} - \frac{2\pi}{\sqrt{\varphi(0)}} = -\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}},$$

$$\frac{d^2Q}{d\alpha'^2} + \frac{d^2Q}{d\beta'^2} + \frac{d^2Q}{d\gamma'^2} + 2\frac{d^2Q}{d\beta'\,d\gamma'} + 2\frac{d^2Q}{d\gamma'\,d\alpha'} + 2\frac{d^2Q}{d\alpha'\,d\beta'}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty du \frac{d^2}{du^2}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}} = -\pi \int_0^\infty du \frac{d}{du}\left\{\frac{\varphi'(u)}{[\varphi(u)]^{\frac{3}{4}}}\right\}\right.$$

$$= -\frac{\pi\varphi'(\infty)}{[\varphi(\infty)]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi\varphi'(0)}{[\varphi(0)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha'}\frac{dQ}{d\alpha'} + \frac{1}{\beta'}\frac{dQ}{d\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\frac{dQ}{d\gamma'}$$

$$= -\pi \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)}}\left(\frac{1}{\alpha'}\cdot\frac{1}{u+\alpha'} + \frac{1}{\beta'}\cdot\frac{1}{u+\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\cdot\frac{1}{u+\gamma'}\right)$$

$$= \pi \int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{\varphi(u)}}\left[\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)} - \frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}\right]$$

$$= -2\pi \int_0^\infty \frac{du}{u}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right] - \pi\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right)\int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{\varphi(u)}};$$

donc on obtient, comme expression finale de t,

$$t = 4\pi\sqrt{\alpha'\beta'\gamma'}\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\gamma'}\right)$$

$$-2\pi\alpha'\beta'\gamma'\left(\frac{1}{\alpha'} + \frac{1}{\beta'} + \frac{1}{\alpha'}\right)\int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{\varphi(u)}} - 4\pi\alpha'\beta'\gamma'\int_0^\infty \frac{du}{u}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}\right].$$

Ces résultats se résument comme il suit :

« Soient ρ, ρ' les rayons de courbure principaux d'un ellipsoïde
» aux demi-axes α, β, γ; soit s l'aire complète de sa surface, et t sa
» courbure cylindrique complète, c'est-à-dire l'intégrale

$$\iint \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'}\right) ds$$

» étendue à tous les éléments ds de sa surface. Cela posé, on a

$$s = -2\pi\alpha^2\beta^2\gamma^2 \int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}\right],$$

$$\begin{aligned} t = {} & 4\pi\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right) \\ & -2\pi(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)\int_0^\infty \frac{du}{u\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}} \\ & -4\pi\alpha^2\beta^2\gamma^2 \int_0^\infty \frac{du}{u}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{\sqrt{(u+\alpha^2)(u+\beta^2)(u+\gamma^2)}}\right]. \text{ »} \end{aligned}$$

L'aire complète s de l'ellipsoïde, évaluée pour la première fois par Legendre, et puis d'une manière bien simple par Jacobi, a déjà été présentée sous la même forme symétrique relativement aux axes par M. Cayley, qui l'a obtenue au moyen de considérations très-différentes (*voir* le tome XIII de ce Journal, page 267).

Les exemples que je viens de donner suffiront pour montrer l'avantage qu'offre la transformation des intégrales rapportées à la surface, en intégrales rapportées au volume.