JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P. SAINT-GUILHEM

Nouvelle détermination synthétique du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 356-365.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__356_0>

NOUVELLE DÉTERMINATION SYNTHÉTIQUE

DU MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

PAR M. P. SAINT-GUILHEM,
Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Définitions.

1. Fixons le sens de quelques termes dont nous ferons usage et sur le choix desquels les savants ne sont pas tous d'accord.

Lorsqu'un point matériel soumis à des forces et à des liaisons quelconques est en mouvement, il peut toujours être considéré comme libre et soumis à une force unique appelée la *force totale*. La résultante des forces qui sollicitent le point matériel, indépendamment des liaisons, se nomme la force *motrice*.

Si l'on décompose la force totale en deux, l'une suivant la tangente à la trajectoire, l'autre suivant la normale, la première est la force *tangentielle*, la seconde la force *infléchissante* ou *centripète*.

On appelle *quantité de mouvement* d'un point matériel une force fictive appliquée à ce point suivant la direction de la vitesse et qui a pour mesure le produit de la masse du point matériel par sa vitesse.

Si, après avoir élevé par le centre des moments une perpendiculaire au plan du moment d'une force dans un sens déterminé, on prend sur cette perpendiculaire, à partir du centre des moments, une longueur égale à la valeur numérique du moment de la force, on aura, en grandeur et en direction, *l'axe du moment de la force*.

Nous supposerons toujours que la direction de la perpendiculaire est telle qu'un spectateur, qui aurait les pieds sur le plan du moment et le dos appuyé contre la perpendiculaire, verrait la force que l'on considère dirigée de sa droite à sa gauche.

L'axe du moment d'une droite sera l'axe du moment de la force représentée par cette droite.

Trois axes ox, oy, oz seront trois *axes tournants* lorsqu'ils seront tels qu'un spectateur qui aurait les pieds au point o et le dos appuyé successivement contre chacun des axes ox, oy, oz verrait successivement l'axe oy à la droite de l'axe oz, celui-ci à la droite de l'axe ox, et ce dernier à la droite de l'axe oy.

Cela posé, soient :

o	le point fixe autour duquel on suppose qu'un corps solide donné est assujetti à tourner;
ox, oy, oz	trois axes rectangulaires tournants fixes dans le corps;
x, y, z	les trois coordonnées, par rapport à ces axes, d'un point m du corps, dont la masse est m;
u, v, w	les vitesses, au bout du temps t, du même point suivant les mêmes axes;
ox_1, oy_1, oz_1	trois axes rectangulaires tournants fixes dans l'espace;
x_1, y_1, z_1	les coordonnées du point m, au bout du temps t, par rapport à ces axes;
u_1, v_1, w_1	les vitesses du même point suivant les mêmes axes;
Ω	l'axe du moment de la vitesse, au bout du temps t, d'un point du corps situé à l'unité de distance du point fixe et de l'axe instantané;
p, q, r	les projections de la droite Ω sur les axes ox, oy, oz;
G	l'axe du moment résultant des quantités de mouvement des divers points du corps;
L, M, N	les projections de la droite G sur les axes ox, oy, oz;
L_1, M_1, N_1	les projections de la droite G sur les axes ox_1, oy_1, oz_1;
F	l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.

A l'aide de ces conventions, nous établirons sans difficulté les principes suivants.

I.

2. *L'axe du moment résultant* [*] *des forces totales coïncide, à*

---

[*] M. Poinsot dirait : *l'axe du couple résultant;* M. Poisson, *l'axe du moment principal;* M. Cauchy, *le moment linéaire résultant.*

chaque instant, en grandeur et en direction avec la vitesse absolue de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

En effet, on a

$$\frac{dx_1}{dt} = u_1, \quad \frac{dy_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = w_1.$$

On a d'ailleurs, par une formule connue de statique [*],

$$L_1 = \Sigma m (y_1 w_1 - z_1 v_1),$$

Σ indiquant une sommation étendue à tous les points du corps.

On déduit de là

$$(1) \qquad \frac{dL_1}{dt} = \Sigma m \left(y_1 \frac{dw_1}{dt} - z_1 \frac{dv_1}{dt} \right).$$

On trouverait pour $\frac{dM_1}{dt}$, $\frac{dN_1}{dt}$ deux formules analogues.

Or L_1, M_1, N_1 étant les coordonnées de l'extrémité de la droite G, $\frac{dL_1}{dt}$, $\frac{dM_1}{dt}$, $\frac{dN_1}{dt}$ sont les vitesses de l'extrémité de cette droite parallèles aux axes ox_1, oy_1, oz_1.

D'un autre côté, les valeurs de ces mêmes quantités sont, en vertu de la formule (1), les projections de l'axe du moment résultant des forces totales sur les mêmes axes coordonnés. Donc, etc.

II.

L'axe du moment résultant des forces infléchissantes coïncide, à chaque instant, en grandeur et en direction avec la vitesse du point du corps situé à l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.

En effet, soient :

φ et γ la force infléchissante et la quantité de mouvement du point m, au bout du temps t;

f et g les axes des moments de ces forces;

F et G les axes des moments résultants des forces φ et des forces γ, c'est-à-dire des forces infléchissantes et des quantités de mouvement;

ρ_0, ρ les distances du point m au point fixe et à l'axe instantané;

h_0 la projection de ρ_0 sur l'axe instantané.

[*] *Voir* le tome XVI de ce Journal, page 351.

On aura les relations suivantes :

$$\varphi = m\Omega^2\rho, \quad \gamma = m\Omega\rho, \quad f = m\Omega^2\rho \,.\, h_0, \quad g = m\Omega\rho \,.\, \rho_0.$$

On déduit de là

$$f = g \cdot \frac{h_0}{\rho_0}\,\Omega.$$

Si l'on appelle g' la projection de l'axe g sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané, on aura

$$g' = g \cdot \frac{h_0}{\rho_0},$$

et, par suite,

$$f = g' \,.\, \Omega;$$

donc la force f est proportionnelle à g'. Il y a plus : si l'on fait coïncider l'axe oz avec la droite Ω, et qu'on prenne l'axe des x de manière que le point m soit dans l'angle zox ou $z'ox$, oz' étant le prolongement de oz, on voit sans peine que l'axe f coïncide avec la direction négative ou positive de l'axe des y, suivant que le point m est dans l'angle zox ou dans l'angle $z'ox$; que la projection de l'axe g sur le plan des xy coïncide dans les mêmes hypothèses avec la direction négative ou positive de l'axe des x; donc, si l'on fait tourner l'axe f autour du point fixe d'un quart de révolution dans le plan des xy, en sens contraire de la rotation du corps, il coïncidera en direction avec g'; ainsi tous les axes f sont proportionnels aux droites g' et sont en avant de celles-ci de 90 degrés sur le plan des xy; donc l'axe du moment résultant des forces infléchissantes se trouve lui-même sur le plan des xy en avant de la projection de la droite G d'un angle de 90 degrés, et l'on a la relation

$$F = G'\Omega,$$

G' étant la projection de la droite G sur le plan des xy.

De là on conclut, G' mesurant la distance de l'extrémité de la droite G à l'axe instantané, que F est égal et parallèle à la vitesse de l'extrémité de la droite G, ce point étant considéré comme un point du corps. C. Q. F. D.

III.

L'axe du moment résultant des forces tangentielles est, à chaque instant, représenté en grandeur et en direction par la vitesse de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement dans l'intérieur du corps.

En effet, d'une part, la vitesse absolue de l'extrémité de la droite G est la résultante de la vitesse de ce point considéré comme appartenant au corps et de la vitesse de ce point dans l'intérieur du corps; d'autre part, l'axe du moment résultant des forces totales est la résultante de l'axe du moment résultant des forces infléchissantes et de l'axe du moment résultant des forces tangentielles: donc, en vertu des deux principes précédents, l'axe du moment résultant des forces tangentielles est représenté en grandeur et en direction, etc.

Traduction en nombres des principes II *et* III.

5. Les principes II et III se traduisent en nombres à l'aide des formules auxquelles donnent lieu les trois problèmes suivants :

I. *Déterminer l'axe du moment résultant des quantités de mouvement.*

Appliquons au point m une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la droite Ω; l'axe du moment de cette droite sera visiblement égal et parallèle à la vitesse du point m; or les projections de la droite Ω' sur les axes ox, oy, oz étant $-p$, $-q$, $-r$, l'axe du moment de la droite Ω' aura pour projections sur les mêmes axes les quantités $qz - ry$, $rx - pz$, $py - qx$; par conséquent, l'axe du moment de la quantité de mouvement du point m aura lui-même pour projections sur les mêmes axes,

$$m[(py - qx)y - (rx - pz)z],$$
$$m[(qz - ry)z - (py - qx)x],$$
$$m[(rx - pz)x - (qz - ry)y];$$

par suite, si nous posons, comme à l'ordinaire,

$$\Sigma m(y^2 + z^2) = \mathrm{A}, \quad \Sigma m(z^2 + x^2) = \mathrm{B}, \quad \Sigma m(x^2 + y^2) = \mathrm{C},$$
$$\Sigma myz = \mathrm{D}, \quad \Sigma mzx = \mathrm{E}, \quad \Sigma mxy = \mathrm{F},$$

Σ indiquant une sommation relative à tous les points du corps, on aura

$$(2)\quad L = Ap - Fq - Er,\quad M = Bq - Dr - Fp,\quad N = Cr - Ep - Dq.$$

Ce sont les trois projections de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement sur les axes ox, oy, oz.

II. *Déterminer l'axe du moment résultant des forces tangentielles.*

Cet axe a évidemment pour projections sur les axes ox, oy, oz les quantités

$$\frac{dL}{dt},\quad \frac{dM}{dt},\quad \frac{dN}{dt},$$

qu'on déduit des formules (2) en les différentiant par rapport à t.

En effet, cet axe coïncide en grandeur et en direction avec la vitesse de l'extrémité de la droite G par rapport aux axes ox, oy, oz; or

$$\frac{dL}{dt},\quad \frac{dM}{dt},\quad \frac{dN}{dt}$$

expriment précisément les projections de cette vitesse sur les mêmes axes, puisque L, M, N sont les coordonnées par rapport aux mêmes axes du point dont il s'agit; donc, etc.

III. *Déterminer l'axe du moment résultant des forces infléchissantes.*

D'après le principe II de l'article **2**, il suffit de trouver la vitesse de l'extrémité de la droite G considérée comme un point du corps; or, si l'on applique au point dont il s'agit une droite Ω' égale, parallèle et contraire à la droite Ω, nous avons déjà vu que l'axe du moment de cette droite sera égal et parallèle à la vitesse de l'extrémité de la droite G, considérée comme un point du corps; mais la droite Ω' a pour projections sur les axes ox, oy, oz les quantités $-p$, $-q$, $-r$; l'extrémité de la droite G a pour coordonnées par rapport aux mêmes axes L, M, N; donc l'axe du moment de la droite Ω' ou du moment résultant des forces infléchissantes a pour projections sur les axes ox, oy, oz les trois quantités $Nq - Mr$, $Lr - Np$, $Mp - Lq$.

Équations du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe.

4. Le principe de d'Alembert appliqué au mouvement dont il s'agit peut se traduire ainsi : L'axe du moment résultant des forces totales coïncide en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces motrices.

D'après ce principe, si nous appelons P, Q, R les projections de l'axe du moment résultant des forces motrices sur les axes ox, oy, oz, on aura immédiatement

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= \frac{dL}{dt} + Nq - Mr,\\ Q &= \frac{dM}{dt} + Lr - Np,\\ R &= \frac{dN}{dt} + Mp - Lq.\end{aligned}\right.$$

Ces équations, jointes aux équations (2), déterminent complétement les vitesses angulaires du corps à une époque quelconque autour des trois axes ox, oy, oz.

Il reste à trouver la position des axes mobiles ox, oy, oz par rapport aux axes fixes ox_1, oy_1, oz_1. A cet effet, remarquons que le corps tournant autour de l'axe instantané avec une vitesse égale à Ω pendant l'instant dt occupe à la fin de cet instant par rapport à l'un quelconque des axes fixes ox_1, oy_1, oz_1 la même position que si le corps était resté fixe et que l'axe considéré eût tourné autour de l'axe instantané avec une vitesse de rotation égale et contraire à celle qu'avait le corps.

Donc, si l'on prend sur l'un des axes ox_1, oy_1, oz_1 un point quelconque m' et qu'on applique à ce point une droite égale et parallèle à la droite Ω, l'axe du moment de cette droite sera égal et parallèle à la vitesse du point m' ; donc, si l'on appelle x', y', z' les coordonnées du point m' par rapport aux axes ox, oy, oz, on aura, en observant que la droite attachée au point m' a pour projections sur les axes ox,

oy, oz les quantités p, q, r,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= ry' - qz',\\ \frac{dy'}{dt} &= pz' - rx',\\ \frac{dz'}{dt} &= qx' - py'. \end{aligned}\right.$$

Au moyen de ces relations, on aura la position de chacun des axes ox_1, oy_1, oz_1 par rapport aux axes ox, oy, oz, et, par conséquent, la position de chacun de ceux-ci par rapport aux trois axes fixes dans l'espace.

Les équations (4), jointes aux équations (2) et (3), résolvent complétement le problème dont il s'agit; les équations (4) ne sont pas celles qu'on donne ordinairement, mais elles peuvent très-bien les remplacer. Nous avons d'ailleurs donné dans le tome Ier de ce Journal, page 315, une démonstration sans calcul des formules usitées.

La démonstration des équations d'Euler que nous avions donnée dans notre *Nouvelle étude sur la théorie des forces,* insérée au tome XVI de ce Journal, présentait quelque obscurité : complétée maintenant par les développements qui précèdent, nous pensons qu'elle ne laisse plus rien à désirer.

En cherchant la solution qui fait l'objet de ce Mémoire, nous avons trouvé une démonstration analytique des formules (3) qui nous paraît remarquable par sa grande simplicité. Nous allons l'indiquer.

Solution analytique.

Soient a, b, c les cosinus des angles que l'axe ox_1 fait avec les axes ox, oy, oz.

L, M, N étant les coordonnées de l'extrémité de l'axe G par rapport aux axes ox, oy, oz; L_1, M_1, N_1 étant les coordonnées du même point par rapport aux axes ox_1 oy_1 oz_1, on aura, comme on sait,

$$L_1 = aL + bM + cN.$$

Différentiant cette équation par rapport à t, il vient

$$\frac{dL_1}{dt} = a\frac{dL}{dt} + b\frac{dM}{dt} + c\frac{dN}{dt}$$
$$+ L\frac{da}{dt} + M\frac{db}{dt} + N\frac{dc}{dt};$$

les valeurs de

$$\frac{da}{dt},\quad \frac{db}{dt},\quad \frac{dc}{dt}$$

sont évidemment données par les équations (4) qu'on trouve directement, en faisant dans celles-ci

$$x' = a,\quad y' = b,\quad z' = c;$$

d'où il résulte que si l'on fait coïncider l'axe ox_1 avec l'axe ox, on aura

$$a = 1,\quad b = 0,\quad c = 0,$$
$$\frac{da}{dt} = 0,\quad \frac{db}{dt} = -r,\quad \frac{dc}{dt} = q;$$

donc, dans cette hypothèse,

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{dL}{dt} + Nq - Mr.$$

Or, si l'on forme la valeur de L_1, et qu'on la différentie par rapport à t, on verra, comme à l'art. **2**, que $\frac{dL_1}{dt}$ n'est autre chose que la projection de l'axe du moment résultant des forces totales sur l'axe ox_1 et par conséquent, dans l'hypothèse actuelle, sur l'axe ox; donc, en désignant par P cette projection, on aura

$$P = \frac{dL}{dt} + Nq - Mr.$$

On trouverait de même les deux autres.

Post-Scriptum. La solution synthétique qui fait l'objet du Mémoire précédent, peut être notablement simplifiée en observant que l'introduction des forces tangentielles et infléchissantes n'est pas nécessaire pour obtenir les équations d'Euler ; il suffit, en effet, pour parvenir à ces équations, d'exprimer, d'après le principe de d'Alembert, que l'axe du moment résultant des forces motrices coïncide en grandeur et en direction avec l'axe du moment résultant des forces totales, et, pour cela, de remarquer, 1° que l'axe du moment résultant des forces totales est représenté en grandeur et en direction par la vitesse absolue de l'extrémité de l'axe du moment résultant des quantités de mouvement ; 2° que cette vitesse est la résultante de la vitesse du même point dans l'intérieur du corps et de la vitesse de ce point considéré comme un point du corps. Nous avons montré, dans notre Mémoire, comment on peut obtenir directement ces trois vitesses ; donc on peut obtenir directement et d'une manière très-simple les équations dont il s'agit.