JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Note sur une propriété d'un système de quatre coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 345-355.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__345_0>

NOTE

SUR

UNE PROPRIÉTÉ D'UN SYSTÈME DE QUATRE CONIQUES;

PAR M. WOEPCKE.

Dans un remarquable Mémoire sur les propriétés des courbes du quatrième ordre, inséré dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, séance du 16 août 1853, M. Chasles énonce le théorème suivant :

Étant pris sur une conique S *deux systèmes de quatre points* a, b, c, d et a', b', c', d', *et étant menées par les quatre premiers points deux coniques quelconques* A, A', *et par les quatre autres deux coniques quelconques* B, B'; *les quatre points d'intersection des deux coniques* A, B, *et ceux des deux coniques* A', B' *sont huit points situés sur une même conique* Σ.

Ce théorème et son corrélatif ont fait partie du Cours de Géométrie supérieure professé à la Sorbonne, dans lequel cette propriété de trois coniques (S, A, A') donne lieu à des conséquences nombreuses qui sont l'expression d'importantes propriétés des courbes du second degré.

C'est en prenant pour point de départ ce même théorème, et en mettant en présence, dans un même plan, quatre coniques quelconques au lieu de trois, que je suis parvenu à quelques développements qui forment le sujet de la présente Note.

THÉORÈME.

Si l'on a trois coniques quelconques C_1, C_2, C_3, *lesquelles sont rencontrées par une quatrième conique quelconque* U *en trois systèmes de* *quatre points, et si l'on fait passer par ces trois systèmes de quatre points trois coniques* A_1, A_2, A_3 *respectivement; les huit points d'intersection de* C_1 *avec* C_2 *et de* A_1 *avec* A_2 *sont* (en vertu du théorème ci-dessus) *sur une conique* Σ_3, *les huit points d'intersection de* C_1 *avec* C_3 *et de* A_1 *avec* A_3 *sur une conique* Σ_2, *et les huit points d'intersection de* C_2 *avec* C_3 *et de* A_2 *avec* A_3 *sur une conique* Σ_1. *Je dis que les trois coniques* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *passent par quatre mêmes points* (*et conséquemment sont rencontrées par une transversale quelconque en six points en involution*).

En effet, les équations des quatre coniques proposées étant

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad U = 0,$$

les équations des coniques A seront respectivement

$$\begin{aligned} A_1 &= U + \lambda_1 C_1 = 0, \\ A_2 &= U + \lambda_2 C_2 = 0, \\ A_3 &= U + \lambda_3 C_3 = 0. \end{aligned}$$

Il est évident alors que les coniques

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 = 0, \\ \Sigma_2 &= \lambda_1 C_1 - \lambda_3 C_3 = 0, \\ \Sigma_1 &= \lambda_2 C_2 - \lambda_3 C_3 = 0, \end{aligned}$$

passent respectivement par les intersections de C_1, C_2 et A_1, A_2, de C_1, C_3 et A_1, A_3, de C_2, C_3 et A_2, A_3. Mais il est également évident que chacune des trois coniques Σ passe par les points d'intersection des deux autres. Donc.... C. Q. F. D.

AUTRE ÉNONCÉ.

Si l'on a trois coniques quelconques C_1, C_2, C_3 *qui sont rencontrées par une quatrième conique quelconque en trois systèmes de quatre points, et si l'on fait passer par ces trois systèmes de quatre points trois coniques* A_1, A_2, A_3 *respectivement; les huit points d'intersection de* C_1 *avec* C_2 *et de* A_1 *avec* A_2 *sont sur une conique* Σ_3, *les huit points d'intersection de* C_2 *avec* C_3 *et de* A_2 *avec* A_3 *sur une conique* Σ_1, *et les* *douze points d'intersection de* C_1 *avec* C_3, *de* A_1 *avec* A_3 *et de* Σ_1 *avec* Σ_3 *sur une conique* Σ_2.

Si l'on se donne un point p par lequel doivent passer les trois coniques A, les trois coniques Σ passent par ce même point. Dès qu'on se donne ce point, les trois coniques Σ sont déterminées, et les trois coniques A ont deux à deux trois intersections, outre p, sur une conique Σ respectivement.

COROLLAIRES.

1. Si deux des coniques C, soient C_1 et C_2, sont des cercles, la conique Σ_3 est également un cercle; donc les dix points d'intersection de C_1 avec C_2, de A_1 avec A_2 et de Σ_1 avec Σ_2 sont situés sur un cercle.

Si les trois coniques C sont des cercles, les coniques Σ sont également trois cercles qui passent par deux mêmes points.

2. En prenant pour U et pour les trois coniques A des systèmes de deux droites, on obtient ceci :

Si l'on coupe trois coniques C_1, C_2, C_3 par deux transversales, on aura sur C_1 quatre points d'intersection que l'on pourra joindre deux à deux par deux droites l_1, l'_1, de même sur C_2 quatre points d'intersection qui donnent lieu à deux droites l_2, l'_2, et sur C_3 quatre points d'intersection qui donnent lieu à deux droites l_3, l'_3; les points d'intersection de l_1, l'_1 avec l_2, l'_2 et de C_1 avec C_2 sont sur une conique Σ_3, les points d'intersection de l_1, l'_1 avec l_3, l'_3 et de C_1 avec C_3 sur une conique Σ_2, les points d'intersection de l_2, l'_2 avec l_3, l'_3 et de C_2 avec C_3 sur une conique Σ_1, et les trois coniques Σ passent par quatre mêmes points.

3. En prenant pour U deux droites coïncidentes, on obtient :

Si l'on a trois coniques C_1, C_2, C_3 ayant avec trois autres coniques A_1, A_2, A_3 respectivement un double contact sur une même droite; les points d'intersection de C_1 avec C_2 et de A_1 avec A_2 sont sur une conique Σ_3, les points d'intersection de C_1 avec C_3 et de A_1 avec A_3 sur une conique Σ_2, et les points d'intersection de C_2 avec C_3, de A_2 avec A_3 et de Σ_2 avec Σ_3 sur une conique Σ_1.

Si l'on coupe trois coniques quelconques par une transversale, et si l'on mène les tangentes aux points de contact; les trois angles circonscrits déterminent deux à deux trois quadrilatères tels, que par les sommets de chaque quadrilatère et les quatre points d'intersection des deux coniques tangentes à ses côtés opposés on peut mener une conique Σ, et que ces trois coniques Σ passent par quatre mêmes points.

4. Si l'on a trois cercles quelconques et une conique U, et si par le point de concours des trois axes radicaux des trois cercles on mène trois coniques passant respectivement par les points d'intersection de U avec chacun des trois cercles, ces trois coniques sont homothétiques.

Et si l'on fait passer par le point de concours des trois axes radicaux de trois cercles trois coniques ayant avec les trois cercles respectivement un double contact sur une même droite, ces trois coniques sont homothétiques.

5. Étant donnée une conique U, si par un point quelconque p on mène trois couples de droites, et si l'on fait passer trois coniques A_1, A_2, A_3 par les intersections de U avec les trois couples de droites respectivement; les trois coniques A ont, deux à deux, un couple de cordes communes (réelles ou imaginaires) passant par le point p, et ces trois couples forment un faisceau de six droites en involution

Et si l'on a trois coniques A, ayant chacune, avec une quatrième conique U, un double contact, de telle sorte que les trois cordes de contact concourent en un même point; les trois coniques A auront, deux à deux, un couple de cordes communes concourant en ce même point, et ces trois couples de cordes communes formeront un faisceau en involution.

THÉORÈME CORRÉLATIF.

Étant données quatre coniques U, C_1, C_2, C_3, *si dans les trois quadrilatères circonscrits à* U *et* C_1, *à* U *et* C_2, *à* U *et* C_3, *on inscrit trois coniques* A_1, A_2, A_3 *respectivement; les huit tangentes communes à* C_1 *et* C_2, *et à* A_1 *et* A_2, *les huit tangentes communes à* C_2 *et* C_3, *et à* A_2 *et* A_3, *enfin les huit tangentes communes à* C_1 *et* C_3, *et à* A_1 *et* A_3 *sont respectivement tangentes à trois coniques* Σ_3, Σ_1, Σ_2 *qui sont inscrites dans un même quadrilatère (et conséquemment six tangentes menées* *d'un point quelconque aux trois coniques Σ forment un faisceau en involution*).

Si l'on se donne une droite L que doivent toucher les trois coniques A, les trois coniques Σ sont également tangentes à cette droite. Dès qu'on se donne cette droite, les trois coniques Σ sont déterminées, et les trois coniques A ont, deux à deux, trois tangentes communes, outre L, qui sont tangentes en même temps à une conique Σ respectivement.

COROLLAIRES.

1. Faisant passer la droite L à l'infini, on obtient que :

Si, dans les trois quadrilatères circonscrits à une conique U et à trois coniques C_1, C_2, C_3 respectivement, on inscrit trois paraboles A_1, A_2, A_3; les trois systèmes de sept tangentes communes à deux coniques C et aux deux paraboles correspondantes enveloppent respectivement trois paraboles Σ, qui sont inscrites dans un même triangle.

2. Prenant pour les trois coniques C trois droites limitées, et pour les coniques A des diagonales des quadrilatères formés par les tangentes menées à U des extrémités de chacune des trois droites C respectivement, on obtient que :

Si trois quadrilatères quelconques sont circonscrits à une même conique U, en joignant dans ces quadrilatères, pris deux à deux, les sommets opposés de l'un à ceux de l'autre, on obtient trois systèmes de huit droites, tangentes respectivement à trois coniques Σ, qui sont inscrites dans un même quadrilatère.

3. Prenant pour U une droite limitée, ou un système de deux points u et u', on obtient :

Si, de deux points quelconques, on mène trois systèmes de quatre tangentes à trois coniques C_1, C_2, C_3 respectivement, et si l'on inscrit dans les trois quadrilatères ainsi formés trois coniques A_1, A_2, A_3 ; les huit tangentes communes à C_1 et C_2 et à A_1 et A_2, les huit tangentes communes à C_2 et C_3 et à A_2 et A_3, et les huit tangentes communes à C_1 et C_3 et à A_1 et A_3 enveloppent respectivement trois coniques Σ_3, Σ_1, Σ_2 inscrites dans un même quadrilatère.

Si l'on fait coïncider les deux points u, u' en un seul U, les coniques A ont un double contact avec les coniques C aux points de contact des tangentes menées à ces dernières du point U, et en prenant en particulier, pour les coniques A, les cordes de contact, on obtient que :

Si, d'un point U, on mène à trois coniques C_1, C_2, C_3 les six tangentes dont les six points de contact soient a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, a'_3; les quatre tangentes communes à C_1 et C_2, et les quatre côtés du quadrilatère $a_1 a_2 a'_1 a'_2$, puis les quatre tangentes communes à C_2 et C_3, et les quatre côtés du quadrilatère $a_2 a_3 a'_2 a'_3$, enfin les quatre tangentes communes de C_1 et C_3, et les quatre côtés du quadrilatère $a_1 a_3 a'_1 a'_3$ forment trois systèmes de huit droites, enveloppant respectivement trois coniques Σ, qui sont inscrites dans un même quadrilatère.

4. Si C_1, C_2, C_3 sont trois coniques homofocales, tandis que U est une conique quelconque, ou subit une des modifications particulières considérées dans le corollaire précédent, les trois quadrilatères circonscrits aux coniques A, prises deux à deux, ou déterminés par les extrémités des cordes de contact $a_1 a'_1$, $a_2 a'_2$, $a_3 a'_3$, prises deux à deux, sont circonscrits respectivement à trois coniques Σ, qui sont homofocales entre elles, et homofocales aussi aux coniques C.

De même, en considérant deux coniques homofocales C_1, C_2, et prenant pour C_3 leur excentricité commune, les trois coniques Σ sont homofocales entre elles et aux deux coniques proposées C_1, C_2. En ce cas, si l'on prend pour U un point et pour les coniques A les cordes de contact, une des coniques A et deux des coniques Σ se réduisent à l'excentricité commune de C_1 et C_2.

5. En prenant pour C_1, C_2, C_3 trois coniques ayant un double contact avec U, et pour les coniques A les trois pôles de contact, on obtient que :

Si trois coniques C_1, C_2, C_3 ont chacune un double contact avec une quatrième conique U, les pôles de contact étant A_1, A_2, A_3 respectivement, et si l'on construit une conique Σ_3 tangente aux quatre tangentes communes de C_1 et C_2 et à la droite $A_1 A_2$, une conique Σ_2 tangente aux quatre tangentes communes de C_1 et C_3 et à la droite $A_1 A_3$, et une conique Σ_1 tangente aux quatre tangentes communes de C_2 et C_3 et à la droite $A_2 A_3$, les trois coniques Σ sont inscrites dans un même quadrilatère.

6. Étant données deux coniques homofocales C_1, C_2 et deux coniques quelconques U, C_3, si l'on inscrit dans les trois quadrilatères circonscrits à U et C_1, à U et C_2, et à U et C_3, respectivement, trois coniques A_1, A_2, A_3; les huit tangentes communes à C_1 et C_3, et à A_1 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_2, les huit tangentes communes à C_2 et C_3, et à A_2 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_1, et *les huit tangentes communes à* A_1*et* A_2, *et à* Σ_1 *et* Σ_2 *seront tangentes à une conique homofocale à* C_1 *et* C_2.

Et, étant données deux coniques homofocales C_1, C_2 et une conique quelconque C_3, si l'on prend sur cette dernière deux points quelconques u, u', le pôle de la droite uu', par rapport à C_3, étant A_3, et si l'on inscrit, dans les deux quadrilatères qu'on obtient en menant de u et u', les tangentes à C_1 et C_2, deux coniques A_1 et A_2; on pourra inscrire, dans le quadrilatère circonscrit à C_1 et C_3, une conique Σ_2 ayant un double contact avec A_1, les tangentes aux points de contact concourant au point A_3; de même, dans le quadrilatère circonscrit à C_2 et C_3, une conique Σ_1 ayant un double contact avec A_2, les tangentes aux points de contact concourant également au point A_3, et, en outre, les huit tangentes communes à A_1 et A_2, et à Σ_1 et Σ_2 seront tangentes à une conique homofocale à C_1 et C_2.

On voit en même temps que deux sommets opposés, soient a_1, a'_1, du quadrilatère formé par les tangentes menées de u, u' à C_1, et deux sommets opposés, soient a_2, a'_2, du quadrilatère formé par les tangentes menées de u, u' à C_2 sont situés respectivement sur deux coniques Σ_1, Σ_2, inscrites dans les quadrilatères circonscrits à C_2, C_3, et à C_1, C_3, que les tangentes menées par les sommets a aux coniques Σ_1, Σ_2 concourent au point A_3, et que les quatre tangentes communes à Σ_1 et Σ_2, conjointement avec les quatre côtés du quadrilatère $a_1 a_2 a'_1 a'_2$, sont huit tangentes d'une même conique homofocale à C_1 et C_2.

7. Étant données deux coniques homofocales C_1, C_2, une conique quelconque C_3, et une conique U ayant un double contact avec C_1, si l'on inscrit dans les deux quadrilatères circonscrits à U et C_2, et à U et C_3, respectivement, deux coniques A_2, A_3; les huit tangentes communes à C_2 et C_3 et à A_2 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_1, les quatre tangentes communes à C_1 et C_3 seront tangentes à une conique Σ_2 ayant un double contact avec A_3, et dont les tangentes aux points de contact concourent au pôle de contact A_1 de U et C_1, et *les quatre tangentes communes de Σ_1 et Σ_2 seront tangentes à une conique homofocale à C_1 et C_2, ayant un double contact avec A_2, et dont les tangentes aux points de contact concourent au point A_1* [*].

Et, étant données deux coniques homofocales C_1, C_2 et une conique quelconque C_3, si l'on prend sur l'une des deux coniques homofocales, soit C_1, deux points quelconques u_1, u'_1, et si l'on prend, dans les deux quadrilatères déterminés par les tangentes menées de u_1 et u'_1 à C_2 et C_3, deux couples de sommets opposés, soient a_2, a'_2 et a_3, a'_3; les quatre tangentes communes à C_2 et C_3, et les quatre côtés du quadrilatère $a_2 a_3 a'_2 a'_3$, seront tangentes à une conique Σ_1, les quatre tangentes communes à C_1 et C_3 seront tangentes à une conique Σ_2 passant par a_3, a'_3, et dont les tangentes en ces deux points concourent au pôle A_1 de la droite $u_1 u'_1$ par rapport à C_1; enfin, les quatre tangentes communes à Σ_1 et Σ_2 seront tangentes à une conique Σ_3 homofocale à C_1 et C_2, passant par les deux sommets a_2, a'_2, et dont les tangentes en ces deux points concourent au point A_1.

Et, étant données deux coniques quelconques C_2, C_3 et une conique U passant par les foyers f, f' de C_2, si l'on inscrit, dans les deux quadrilatères circonscrits à U et C_2 et à U et C_3 respectivement, deux coniques A_2 et A_3; les huit tangentes communes à C_2 et C_3, et à A_2 et A_3 seront tangentes à une conique Σ_1, les quatre tangentes, menées de f et f' à C_3, seront tangentes à une conique Σ_2 ayant un double contact avec A_3, et dont les tangentes au point de contact concourent au pôle de contact A_1 de ff' par rapport à U; enfin les quatre tangentes communes à Σ_1 et Σ_2 seront tangentes à une conique homofocale à C_2, ayant un double contact avec A_2, et dont les tangentes aux points de contact concourent également au point A_1.

Observons encore que le théorème qui vient d'être discuté est sa

[*] En vertu d'un des corollaires du théorème ci-dessus cité de M. Chasles relatif à un système de trois coniques, on pourra prendre pour la conique A_2 un cercle ayant son centre au point A_1.

propre réciproque, ou que les coniques qu'on y met en présence peuvent changer de rôles. De sorte qu'en se donnant arbitrairement Σ_3, Σ_2, C_1, A_1, et en faisant passer par les points d'intersection de Σ_3 avec Σ_2, avec C_1 et avec A_1, respectivement, trois coniques Σ_1, C_2, A_2; les intersections de Σ_2 avec C_1 et de Σ_1 avec C_2 sont sur une conique C_3, les intersections de Σ_2 avec A_1 et de Σ_1 avec A_2 sur une conique A_3, et les intersections de C_1 avec A_1, de C_2 avec A_2, et de C_3 avec A_3 sur une conique U.

APPLICATIONS AUX CÔNES DU SECOND DEGRÉ ET AUX CONIQUES SPHÉRIQUES.

Prenant un point quelconque s dans l'espace, on peut considérer les coniques qui se présentent dans les théorèmes précédents comme les traces que forment, sur un plan coupant, autant de cônes du second degré, ayant tous pour sommet le point s; à la place des quatre points d'intersection de deux coniques, on aura les quatre arêtes d'intersection de deux cônes, et, à la place du quadrilatère circonscrit à deux coniques, l'angle tétraèdre circonscrit à deux cônes. En coupant tous ces cônes par une sphère décrite du centre s, on voit que *le théorème et le théorème corrélatif énoncés ci-dessus, relativement à quatre coniques quelconques dans le plan, ont lieu également pour un système de quatre coniques sphériques.*

COROLLAIRES.

1. Si l'on a trois couples de coniques sphériques homocycliques A_1 et C_1, A_2 et C_2, A_3 et C_3, les huit points d'intersection de C_1 avec C_2 et de A_1 avec A_2 sont sur une conique sphérique Σ_3, les huit points d'intersection de C_1 avec C_3 et de A_1 avec A_3 sur une conique sphérique Σ_2, et les douze points d'intersection de C_2 avec C_3, de A_2 avec A_3, et de Σ_2 avec Σ_3 sur une conique sphérique Σ_1.

2. Si l'on a deux coniques sphériques homocycliques U et A_1, et deux coniques sphériques quelconques C_2, C_3, et si, par les intersections de U avec C_2 et C_3 respectivement, on fait passer deux coniques sphériques A_2 et A_3, les huit points d'intersection de C_2 avec C_3 et de A_2 avec A_3 seront sur une conique sphérique Σ_1, les quatre points d'intersection de A_1 avec A_2 sur une conique Σ_3 homocyclique à C_2, et

les huit points d'intersection de A_1 avec A_3 et de Σ_1 avec Σ_3 sur une conique Σ_2 homocyclique à C_2.

3. Si l'on a trois couples de coniques sphériques homofocales A_1 et C_1, A_2 et C_2, A_3 et C_3, il existera une conique sphérique Σ_3 inscrite à la fois dans les deux quadrilatères sphériques circonscrits à A_1 et A_2, et à C_1 et C_2 respectivement, une conique sphérique Σ_2 inscrite à la fois dans les deux quadrilatères sphériques circonscrits à A_1 et A_3, et à C_1 et C_3 respectivement, et une conique sphérique Σ_1 inscrite à la fois dans les trois quadrilatères sphériques circonscrits à A_2 et A_3, à C_2 et C_3, et à Σ_2 et Σ_3 respectivement.

4. Si l'on a deux coniques sphériques homofocales U et A_1 et deux coniques sphériques quelconques C_2, C_3, et si, dans les quadrilatères sphériques circonscrits à U et C_2, et à U et C_3 respectivement, on inscrit deux coniques sphériques A_2 et A_3; les deux quadrilatères sphériques circonscrits à C_2 et C_3, et à A_2 et A_3 respectivement seront circonscrits à une même conique Σ_1; le quadrilatère sphérique circonscrit à A_1 et A_2 sera circonscrit à une conique Σ_3 homofocale à C_2, et les deux quadrilatères sphériques circonscrits à A_1 et A_3, et à Σ_1 et Σ_3 seront circonscrits à une même conique Σ_2 homofocale à C_3.

5. Si l'on a sur la sphère un petit cercle quelconque C_1 et deux couples de coniques homofocales A_2 et C_2, et A_3 et C_3, et si l'on mène par le pôle du petit cercle de grands cercles tangents à A_2 et A_3, dont les points de contact soient respectivement a_2, a'_2 et a_3, a'_3; on peut inscrire, dans le quadrilatère sphérique circonscrit à C_1 et C_2, une conique sphérique Σ_3 ayant un double contact avec A_2 aux points a_2 et a'_2; de même, dans le quadrilatère sphérique circonscrit à C_1 et C_3, une conique sphérique Σ_2 ayant un double contact avec A_3 aux points a_3 et a'_3, et, en outre, les trois quadrilatères sphériques circonscrits à C_2 et C_3, A_2 et A_3, et Σ_2 et Σ_3 respectivement sont circonscrits à une même conique Σ_1.

On pourrait déduire encore beaucoup d'autre corollaires, que j'omets, de crainte de donner trop d'étendue à cette Note.

THÉORÈME GÉNÉRAL.

Etant donnée une conique U, *si l'on prend sur* U *n systèmes de quatre points, et si l'on fait passer par chaque système de quatre* *points un couple de coniques* C *et* A; *en prenant deux couples quelconques,* C_α, A_α *et* C_β, A_β, *les huit points d'intersection de* C_α *avec* C_β, *et de* A_α *avec* A_β *seront sur une conique* $\Sigma_{\alpha,\beta}$, *qui passe, en outre, par les points d'intersection de* $n-2$ *couples de coniques* Σ, *savoir, par les points d'intersection de* $\Sigma_{1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{1,\beta}$, *de* $\Sigma_{2,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{2,\beta}, \ldots$, *de* $\Sigma_{\alpha-1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\alpha-1,\beta}$, *de* $\Sigma_{\alpha+1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\alpha+1,\beta}, \ldots$, *de* $\Sigma_{\beta-1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\beta-1,\beta}$, *de* $\Sigma_{\beta+1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{\beta+1,\beta}, \ldots$, *de* $\Sigma_{n-1,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{n-1,\beta}$, *et de* $\Sigma_{n,\alpha}$ *avec* $\Sigma_{n,\beta}$.

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de l'inspection des équations suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
U=0, & C_1 = 0, & C_2 = 0, \ldots, & C_{n-1} = 0, & C_n = 0, \\
 & A_1 = U + \lambda_1 C_1 = 0, & A_2 = U + \lambda_2 C_2 = 0, \ldots, & A_{n-1} = U + \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & A_n = U + \lambda_n C_n = 0, \\
 & \Sigma_{1,2} = \lambda_1 C_1 - \lambda_2 C_2 = 0, & \Sigma_{1,3} = \lambda_1 C_1 - \lambda_3 C_3 = 0, \ldots, & \Sigma_{1,n-1} = \lambda_1 C_1 - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{1,n} = \lambda_1 C_1 - \lambda_n C_n = 0, \\
 & & \Sigma_{2,3} = \lambda_2 C_2 - \lambda_3 C_3 = 0, \ldots, & \Sigma_{2,n-1} = \lambda_2 C_2 - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{2,n} = \lambda_2 C_2 - \lambda_n C_n = 0, \\
 & & & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
 & & & \Sigma_{n-2,n-1} = \lambda_{n-2} C_{n-2} - \lambda_{n-1} C_{n-1} = 0, & \Sigma_{n-2,n} = \lambda_{n-2} C_{n-2} - \lambda_n C_n = 0, \\
 & & & & \Sigma_{n-1,n} = \lambda_{n-1} C_{n-1} - \lambda_n C_n = 0.
\end{array}$$

On voit aisément que les coniques A et C et la conique U jouent elles-mêmes le rôle de coniques Σ, et qu'en somme chacune des coniques mises en présence passe par les points d'intersection de n couples de ces coniques.

Ce théorème donne naturellement lieu à un théorème corrélatif, à des corollaires, à des applications aux coniques sphériques, etc.; mais on comprend facilement que je m'abstienne de les développer ici.