JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

DUHAMEL

Remarque sur l'emploi des intégrales définies pour exprimer les intégrales des équations aux différentielles partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 337-344.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__337_0>

REMARQUE

Sur l'emploi des intégrales définies pour exprimer les intégrales des équations aux différentielles partielles;

Par M. DUHAMEL.

Dans un grand nombre de questions de physique mathématique, les fonctions cherchées se trouvent exprimées par des intégrales définies, prises par rapport à des variables auxiliaires. Les dérivées de ces fonctions par rapport aux variables dont elles restent dépendantes après ces intégrations, s'obtiennent en différentiant sous le signe $\int$ les intégrales qui les représentent; et cette opération est soumise, comme on le sait, à certaines exceptions auxquelles il est entendu que l'on aura toujours égard.

L'objet de cette Note est de mettre en garde contre une erreur à laquelle il est assez facile d'être entraîné lorsque les fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales définies, sont discontinues.

Pour que notre idée soit plus facile à saisir, nous prendrons une question extrêmement simple, celle de la propagation du mouvement dans un gaz indéfini; et nous supposerons qu'on la déduise des équations ordinaires de l'hydrodynamique, dans le cas de très-petits mouvements.

L'équation aux différentielles partielles sera, comme on le sait,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right), \tag{1}$$

a étant une constante donnée; et φ une fonction dont les dérivées

$\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont à chaque instant les composantes de la vitesse du point dont les coordonnées sont x, y, z; et $-\frac{1}{a^2}\frac{d\varphi}{dt}$, la condensation en ce point.

L'intégrale générale de l'équation (1) est

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \mathbf{S}\, td\omega\psi\,(x + at\cos\alpha,\ y + at\cos\beta,\ z + at\cos\gamma)$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\mathbf{S}\, td\omega \mathrm{F}\,(x + at\cos\alpha,\ y + at\cos\beta,\ z + at\cos\gamma);$$

$d\omega$ désigne un élément quelconque de la sphère décrite avec le rayon 1, du point x, y, z comme centre; $-\frac{1}{a^2}\psi(x, y, z)$ représente la condensation, et $\mathrm{F}(x, y, z)$ la valeur de φ en chaque point du milieu, dans l'état initial; les sommes $\mathbf{S}$ s'étendent à tous les éléments $d\omega$ de la sphère.

Toutefois, comme les fonctions ψ et F seront nulles lorsque $x + at\cos\alpha$, $y + at\cos\beta$, $z + at\cos\gamma$ seront les coordonnées d'un point où la condensation et la vitesse seraient nulles dans l'état initial, ce qui pourra arriver quand l'ébranlement initial sera limité, on voit qu'il suffira pour effectuer ces sommations de considérer les directions des droites menées du point quelconque x, y, z que l'on considérera, aux différents points de la sphère décrite de ce point avec le rayon at, qui se trouveront compris dans l'ébranlement primitif. Les valeurs α, β, γ, qui correspondraient à d'autres directions, donneraient pour l'intégrale des éléments nuls.

Mais pour ne pas compliquer inutilement les calculs, nous supposerons que les fonctions F et ψ ne dépendent que d'une seule coordonnée x, et même que la fonction F soit nulle : ce qui revient à admettre que la vitesse initiale est nulle en chaque point, et que la condensation est la même en tous les points d'un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x.

La valeur de φ se trouvera ainsi réduite à la forme suivante :

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\mathbf{S}\, td\omega\psi\,(x + at\cos\alpha). \tag{2}$$

Dans le cas simple que nous traitons, la valeur de φ pourrait être débarrassée de tout signe d'intégration, et être mise sous la forme

$$(3) \qquad \varphi = \frac{-\psi_1(x-at)+\psi_1(x+at)}{2a},$$

ψ_1 désignant une fonction dont la dérivée est ψ. Mais nous lui conservons la forme (2), parce que nos remarques portent sur l'emploi des intégrales définies; et nous prenons ce cas simple pour les faire saisir plus facilement. La vitesse v en un point et à une époque quelconque est représentée par $\frac{d\varphi}{dx}$. On aura donc, en différentiant sous le signe $\mathbf{S}$ la formule (2),

$$(4) \qquad v = \frac{1}{4\pi}\,\mathbf{S}\, t\,d\omega\,\psi'(x+at\cos\alpha),$$

cette somme s'étendant toujours à tous les éléments $d\omega$ de la sphère déjà désignée.

Nous allons maintenant remplacer $d\omega$ par sa valeur en fonction de α.

En considérant, sur la sphère dont $d\omega$ est l'élément, une zone infiniment petite, comprise entre deux surfaces coniques ayant même centre que la sphère, l'axe des x pour axe commun, et dont les génératrices forment, respectivement avec la direction des x positifs, les angles α et $\alpha+d\alpha$, les éléments $d\omega$ de cette zone se rapporteront à une même valeur de $\psi\,(x+at\cos\alpha)$, et leur somme sera égale à $2\pi\sin\alpha d\alpha$. D'où il suit que les formules (2) et (4) peuvent être remplacées par les suivantes :

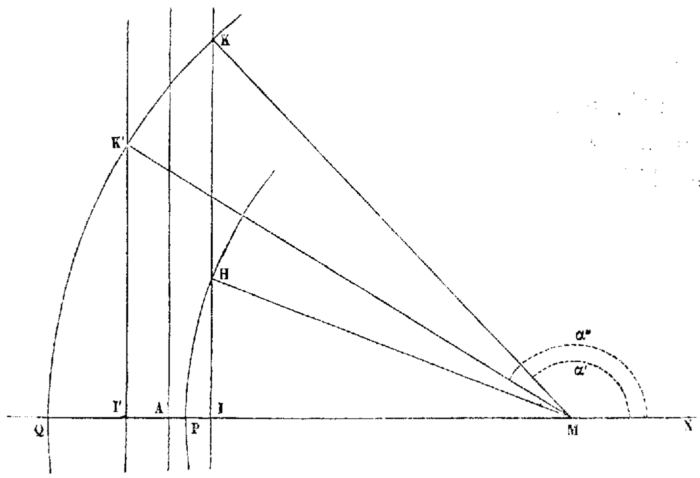
$$(5) \qquad \varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin\alpha\psi\,(x+at\cos\alpha)\,d\alpha,$$

$$(6) \qquad v = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}\int_0^\pi t\sin\alpha\psi'\,(x+at\cos\alpha)\,d\alpha.$$

Supposons maintenant que l'ébranlement initial soit compris entre deux plans perpendiculaires à l'axe des x situés de part et d'autre de l'origine, à une distance ε : la fonction ψ, ainsi que ses dérivées, seront

43..

égales à zéro quand la variable à laquelle elles s'appliqueront ne sera pas comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$.



Considérons un point M situé en dehors de l'ébranlement primitif II', et calculons sa vitesse pour une valeur quelconque de t. Tant que l'on aura $at < \mathrm{MI}$, ou $x - \varepsilon$, la sphère décrite du centre M avec le rayon at ne pénétrera pas dans l'ébranlement initial; la fonction ψ' sera donc nulle dans toute l'étendue de l'intégrale, et la vitesse sera nulle. Lorsque at sera compris entre MI et MI' et par exemple égal à MP, la sphère de rayon at aura une zone à une seule base, comprise dans l'ébranlement initial, et les valeurs de α devront être considérées seulement entre les limites HMX et π. Or

$$\int t \sin\alpha\, d\alpha \psi'(x + at\cos\alpha) = -\frac{\psi(x + at\cos\alpha)}{a};$$

à la limite HMX, $x + at\cos\alpha$ devient $x - \mathrm{MI}$ ou ε; à la limite π, $x + at\cos\alpha$ devient $x - at$: on aurait donc

$$(7) \qquad v = -\frac{1}{2a}\psi(x - at) + \frac{1}{2a}\psi(\varepsilon).$$

Enfin, quand on aura $at > \mathrm{MI}'$, égal par exemple à MQ, la sphère décrite du centre M avec ce rayon aura une zone à deux bases comprises dans l'ébranlement primitif; les valeurs de α qui ne donneront pas des éléments nuls pour l'intégrale seront comprises entre KMX et K'MX : pour ces limites, les valeurs de $x + at\cos\alpha$ seront respectivement ε et $-\varepsilon$, et l'on aurait pour valeur la vitesse

$$v = \frac{1}{2a}[-\psi(-\varepsilon) + \psi(\varepsilon)], \tag{8}$$

ce qui annoncerait que le point M ne retomberait pas au repos, mais finirait par acquérir cette vitesse constante; d'où il résulterait que le fluide indéfini acquerrait une vitesse finie constante, par suite d'un ébranlement initial limité, ce qui est impossible.

Ces résultats ne sont pas d'accord avec ceux que fournit l'intégrale sous forme finie, représentée par la formule (3), qui donne

$$v = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{-\psi(x-at) + \psi(x+at)}{2a};$$

d'où résulte, dans le cas de $at = \text{MP}$,

$$v = \frac{-\psi(x-at)}{2a}, \tag{9}$$

expression différente de (7), et, dans le cas de $at = \text{MQ}_1$,

$$v = 0, \tag{10}$$

ce qui annonce que le point M retombe pour toujours au repos, après un temps égal à $\frac{x+\varepsilon}{a}$.

Il s'agit maintenant de reconnaître comment s'est introduite l'erreur qui affecte les résultats (7) et (8).

Considérons, en premier lieu, le cas de $at = \text{MQ}$, et soient

$$\text{KMX} = \alpha', \quad \text{K'MX} = \alpha'';$$

l'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha'}^{\alpha''} t \sin\alpha\psi(x + at\cos\alpha)\,d\alpha;$$

mais alors les limites de l'intégrale ne sont pas indépendantes de x; et pour avoir $\frac{d\varphi}{dx}$ il ne suffit pas d'intégrer entre α' et α'' la quantité sous le signe $\int$, différentiée par rapport à x; il faut encore y joindre deux termes provenant du changement des limites.

Ces deux termes, qui ont été omis dans le calcul précédent, sont

$$\frac{1}{2}\frac{d\alpha''}{dx}\cdot t \sin\alpha'' \psi(x + at\cos\alpha'')$$

et

$$-\frac{1}{2}\frac{d\alpha'}{dx}\cdot t \sin\alpha' \psi(x + at\cos\alpha').$$

Or on a

$$-\cos\alpha'' = \frac{x+\varepsilon}{at}, \quad -\cos\alpha' = \frac{x-\varepsilon}{at},$$

d'où

$$\sin\alpha''\frac{d\alpha''}{dx} = \frac{1}{at}, \quad \sin\alpha'\frac{d\alpha'}{dx} = \frac{1}{at},$$

ce qui donne pour la somme des deux termes omis

$$\frac{1}{2a}\psi(-\varepsilon) - \frac{1}{2a}\psi(\varepsilon).$$

C'est cela qu'il faut ajouter à l'expression (8), relative au cas de $at = \mathrm{MQ}$ pour avoir un résultat exact, et l'on trouve alors

$$v = 0,$$

ce qui s'accorde avec l'équation (10) qui résultait de l'intégrale sous forme finie.

Soit maintenant le cas de $at = \mathrm{MP}$; on a alors, en faisant $\mathrm{HMX} = \alpha_1$,

$$\varphi = \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\pi} t \sin\alpha\psi(x + at\cos\alpha)\,d\alpha$$

et

$$-\cos\alpha_1 = \frac{x-\varepsilon}{at}, \quad \sin\alpha_1\frac{d\alpha_1}{dx} = \frac{1}{at}.$$

Pour avoir la valeur exacte de $\frac{d\varphi}{dx}$, il faut d'abord différentier par rapport à x sous le signe $\int$, puis intégrer entre les limites α_1 et π, et ensuite ajouter

$$-\frac{1}{2}\frac{d\alpha_1}{dx}\cdot t\sin\alpha_1\psi(x + at\cos\alpha_1),$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{2a}\psi(\varepsilon):$$

c'est donc ce dernier terme qu'on avait omis, en formant l'expression (7); en l'y ajoutant, elle devient

$$v = -\frac{1}{2a}\psi(x - at)$$

et coïncide avec la formule (9) à laquelle conduit l'intégrale sous forme finie.

On voit par là qu'il ne suffit pas de différentier sous le signe $\int$, et d'intégrer entre les valeurs des angles qui correspondent aux limites de la partie de sphère comprise dans l'ébranlement primitif. Il faut s'assurer si ces valeurs changent avec la variable par rapport à laquelle on différentie, et, dans ce cas, ajouter les termes indiqués par la théorie ordinaire.

Remarque. Dans le cas de discontinuité que nous venons d'examiner, on aurait pu, au lieu des limites α', α'', considérer les limites extrêmes o et π de l'angle α. Il n'y aurait pas eu alors de difficultés relatives à la variation des limites; mais on se trouverait dans le cas d'exception où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie. En effet, on peut regarder la fonction $\psi(u)$ comme passant de o à $\psi(\varepsilon)$ dans un intervalle infiniment petit δ, lorsque l'on fait décroître u depuis l'infini positif. La dérivée $\psi'(u)$ est donc nulle jusqu'à $u=\varepsilon$; puis elle varie très-rapidement dans l'intervalle δ, puisque sa valeur moyenne est égale à l'accroissement de la fonction $\psi(u)$ divisée par δ, ou $\frac{\psi(\varepsilon)}{\delta}$. En faisant tendre δ vers zéro, il est clair que $\psi'(u)$ doit être regardé comme infini pour $u=\varepsilon$; et $\int\psi'(u)\,du$ comme égal à $\psi(\varepsilon)$ dans l'intervalle δ.

Ainsi, dans l'intégration de l'expression (6), il faudra, lorsque α sera arrivé de o à α', considérer $\psi'(x + at\cos\alpha)$, qui a été nul jusque là, comme étant infini; et l'intégrale $-\int at\sin\alpha\,d\alpha\,\psi'(x + at\cos\alpha)$

qui remplace $\int \psi'(u)\,du$, comme acquérant brusquement une valeur égale à $\psi(\varepsilon)$. On devra ensuite intégrer de α' à α'', comme on l'a fait pour obtenir la formule (8). Enfin, lorsque α sera devenu égal à α'', il se présentera les mêmes observations à faire que pour $\alpha = \alpha'$, et l'on devra ajouter le terme $-\psi(-\varepsilon)$; de sorte que l'intégrale (6) qui doit donner la valeur de v, se composera de l'expression (8) à laquelle on ajoutera

$$-\frac{1}{2a}\left[\psi(\varepsilon) - \psi(-\varepsilon)\right],$$

ce qui donnera zéro, comme cela devait être.