JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Addition à la discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 301-303.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__301_0>

ADDITION

A LA

DISCUSSION DE DEUX MÉTHODES ARABES

POUR DÉTERMINER UNE VALEUR APPROCHÉE DE sin 1° [*];

PAR M. WOEPCKE.

En exposant le procédé employé par Oloug-Beg, pour former les coefficients de sa série (page 172), j'aurais dû peut-être indiquer aussi de quelle manière Oloug-Beg a pu être conduit à cette méthode. Je m'empresse de suppléer à cette omission, en tâchant de résoudre la question par une conjecture qui, je crois, peut en offrir une explication satisfaisante.

L'équation qu'il s'agit de résoudre est

$$X = \frac{A + X^3}{B},$$

où

$$A = am + a_0 + a_1 \frac{1}{m} + a_2 \frac{1}{m^2} + \ldots,$$
$$B = bm;$$

donc

$$(1) \quad \begin{cases} X = \dfrac{a}{b} + \dfrac{a_0}{b}\dfrac{1}{m} + \dfrac{a_1}{b}\dfrac{1}{m^2} + \dfrac{a_2}{b}\dfrac{1}{m^3} + \ldots \\ \qquad + \dfrac{X^3}{b}\dfrac{1}{m}. \end{cases}$$

On aura, comme une première approximation, en prenant seule-

[*] *Voir* le tome XIX de ce Journal, pages 153 et suivantes.

ment le premier terme de la série (I),

$$X_1 = \frac{a}{b} = a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}.$$

Seconde approximation, allant jusqu'au deuxième terme de la série (I),

$$X_2 = X_1 + \left(\frac{a_0}{b} + \frac{X_1^3}{b}\right)\frac{1}{m},$$

et, en négligeant $\frac{\alpha_0}{b}$ dans X_1^3,

$$= X_1 + \frac{a_0 + (a'_0)^3}{b}\frac{1}{m} = a'_0 + \frac{m\alpha_0 + (a'_0)^3 + a_0}{b}\frac{1}{m}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + \left(\frac{\alpha_1}{b}\right)\frac{1}{m}.$$

Troisième approximation, allant jusqu'au troisième terme de la série (I),

$$X_3 = X_2 + \frac{a_1}{b}\frac{1}{m^2} + \frac{X_2^3 - X_1^3}{b}\cdot\frac{1}{m},$$

et, en négligeant $\left(\frac{\alpha_1}{b}\right)\frac{1}{m}$ dans X_2^3 et $\frac{\alpha_0}{b}$ dans X_1^3,

$$= X_2 + \left\{\frac{a_1}{b} + \frac{m\left[\left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right]}{b}\right\}\frac{1}{m^2}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + \frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + a'_1\frac{1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + a}{b}\frac{1}{m^2}$$

$$= a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2} + \left(\frac{\alpha_2}{b}\right)\frac{1}{m^2}.$$

Quatrième approximation, allant jusqu'au quatrième terme de la série (I),

$$X_4 = X_3 + \frac{a_2}{b}\frac{1}{m^3} + \frac{X_3^3 - X_2^3}{b}\frac{1}{m},$$

et, en négligeant $\left(\frac{\alpha_2}{b}\right)\frac{1}{m^2}$ dans X_3^3 et $\left(\frac{\alpha_1}{b}\right)\frac{1}{m}$ dans X_2^3,

$$= X_3 + \left\{ \frac{a_2}{b} + \frac{m^2 \left[\left(a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} \right)^3 - \left(a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} \right)^3 \right]}{b} \right\} \frac{1}{m^3}$$

$$= a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2}$$

$$+ \frac{m \alpha_2 + m^2 \left[\left(a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} \right)^3 - \left(a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} \right)^3 \right] + a_3}{b} \frac{1}{m^3}$$

$$= a'_0 + a'_1 \frac{1}{m} + a'_2 \frac{1}{m^2} + a'_3 \frac{1}{m^3} + \left(\frac{\alpha_3}{b} \right) \frac{1}{m^3}.$$

On obtient ainsi, comme on voit, la série d'Oloug-Beg. Le point essentiel consiste à remarquer que l'on reprend, dans chaque approximation, le terme $\frac{X^3}{b} \frac{1}{m}$ de la série (I), en en retranchant ce que donnait déjà l'approximation précédente, pour éviter le double emploi.