JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

FRANÇOIS BRIOSCHI

Note sur un théorème relatif aux déterminants gauches

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 253-256.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__253_0>

NOTE

SUR

UN THÉORÈME RELATIF AUX DÉTERMINANTS GAUCHES;

PAR M. FRANÇOIS BRIOSCHI,
Professeur à l'Université de Pavie.

En indiquant par $c_{r,s}$ les coefficients d'une substitution linéaire orthogonale, on a, comme on sait, entre ces coefficients, $\frac{n(n+1)}{2}$ équations de la forme

$$c_{1,r}c_{1,s} + c_{2,r}c_{2,s} + \ldots + c_{n,r}c_{n,s} = 0,$$
$$c_{1,r}^2 + c_{2,r}^2 + \ldots + c_{n,r}^2 = 1;$$

et M. Cayley a démontré qu'en nommant Δ le déterminant

$$\sum (\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}),$$

dont les éléments sont assujettis aux conditions

$$a_{r,r} = 1, \quad a_{r,s} + a_{s,r} = 0,$$

et en posant

$$\alpha_{r,s} = \frac{d\Delta}{da_{r,s}},$$

ces équations sont vérifiées par les valeurs suivantes :

$$\Delta c_{r,1} = 2\alpha_{1,r}, \qquad \Delta c_{r,2} = 2\alpha_{2,r}, \ldots,$$
$$\Delta c_{r,r} = 2\alpha_{r,r} - \Delta, \ldots, \quad \Delta c_{r,n} = 2\alpha_{n,r}.$$

Cela posé, voici le théorème en question :

L'équation

$$(\text{A}) \qquad \begin{vmatrix} c_{1,1} - \lambda, & c_{1,2}, \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2} - \lambda, \ldots, & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & c_{n,n} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

a, lorsque n est impair, une racine égale à l'unité et les n — 1 autres imaginaires et deux à deux réciproques; lorsque n est pair les racines sont toutes imaginaires et deux à deux réciproques.

En effet, en substituant dans le premier membre de cette équation les valeurs ci-dessus de $c_{r,1}$, $c_{r,2}$,..., on a

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}-\mu, & \alpha_{2,1}, \ldots, & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2}, & \alpha_{2,2}-\mu, \ldots, & \alpha_{n,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1,n}, & \alpha_{2,n}, \ldots, & \alpha_{n,n}-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

où $\mu = \Delta \frac{1+\lambda}{2}$; et, en multipliant cette dernière par Δ, on a

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} z, & a_{1,2}, \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & z, \ldots, & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, \ldots, & z \end{vmatrix} = 0,$$

en posant $z = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1+z}{1-z}$.

J'observe qu'en supposant n impair le premier membre de cette équation est un déterminant gauche d'ordre impair, qui se réduira à zéro pour $z=0$; ainsi $\lambda = 1$ sera une racine de l'équation (A). Mais en développant l'équation (1), on a, pour n impair, comme on le sait déjà par des théorèmes dus à M. Cayley [*],

$$z^n + z^{n-2}\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 + z^{n-4}\sum_r (\Delta_{r,n-4})_0 + \ldots$$
$$+ z^3\sum_r (\Delta_{r,3})_0 + z\sum_r (\Delta_{r,1})_0 = 0,$$

$(\Delta_{r,s})_0$ représentant un déterminant mineur principal de l'ordre $s^{ième}$ dans lequel on a posé les éléments principaux égaux à zéro. Par conséquent une des racines de l'équation (1) sera zéro, comme on l'a déjà observé : les autres racines seront deux à deux égales et de signe contraire, et leurs carrés seront donnés par l'équation

$$(2) \quad y^m + y^{m-1}\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 + \ldots + y\sum_r (\Delta_{r,3})_0 + \sum_r (\Delta_{r,1})_0 = 0,$$

[*] Crelle, *Journal für die Mathematik*, band 38.

qu'on obtient en faisant $y = z^2$ et $m = \frac{n-1}{2}$. Les $(n-1)$ racines de l'équation (A), qui restaient à trouver après la racine $\lambda = 1$, seront donc réciproques, comme on voulait le démontrer. J'observe, enfin, que tous les termes du premier membre de l'équation (2) sont essentiellement positifs, parce que chacun des déterminants gauches symétriques d'ordre pair $(\Delta_{r,s})$ est un carré; par conséquent, l'équation (2) n'a aucune racine positive; les valeurs correspondantes de z, et, par suite, de λ, sont donc imaginaires.

En nommant $-y_1$ une quelconque des racines de l'équation (2), on a

$$z = \pm i y_1, \quad i = \sqrt{-1},$$

et les racines réciproques correspondantes de l'équation (A) sont

$$\lambda_1 = \frac{1+iy}{1-iy_1}, \; \lambda' = \frac{1-iy_1}{1+iy_1},$$

ou

$$\lambda_1 = a + ib, \quad \lambda' = a - ib,$$

en faisant

$$a = \frac{1-y_1}{1+y_1}, \quad b = \frac{2\sqrt{y_1}}{1+y_1}.$$

Je suppose

$$a \pm ib = r_1 (\cos\theta_1 \pm i \sin\theta_1),$$

on a

$$r_1^2 = a^2 + b^2 = 1, \quad \operatorname{tang}\theta_1 = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{y_1}}{1-y_1}:$$

par conséquent,

$$\sqrt{y_1} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\theta_1,$$

et

$$\sum_r (\Delta_{r,1})_0 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 \,.\, \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 \ldots \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_m,$$

$$\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_1 + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_2 + \ldots + \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta_m.$$

Pour $n = 3$, l'équation (2) nous donne

$$y + a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 = 0,$$

et l'on aura

$$a^2{}_{,2} + a_{1,3}^2 + a_{2,3}^2 = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\theta,$$

ou

$$a_{1,2} = \cos\alpha \,.\, \tang\frac{1}{2}\theta, \quad a_{1,3} = \cos\beta \,.\, \tang\frac{1}{2}\theta, \quad a_{2,3} = \cos\gamma \,.\, \tang\frac{1}{2}\theta,$$

en supposant

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Pour $n = 5$, on aura

$$a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{1,4}^2 + a_{1,5}^2 + a_{2,3}^2 + a_{2,4}^2 + a_{2,5}^2 + a_{3,4}^2 + a_{3,5}^2 + a_{4,5}^2$$
$$= \tang^2\frac{1}{2}\theta_1 + \tang^2\frac{1}{2}\theta_2,$$

et, en général,

$$\sum_r \sum a_{r,s}^2 = \tang^2\frac{1}{2}\theta_1 + \tang^2\frac{1}{2}\theta_2 + \ldots + \tang^2\frac{1}{2}\theta_m.$$

On déduit de ce théorème une propriété énoncée par Euler comme ayant lieu dans le mouvement d'un corps, propriété qui a été le point de départ pour la recherche des formules très-connues qu'on doit à Euler, Lexell, Rodrigues [*], pour la transformation des coordonnées. On peut en déduire aussi un théorème énoncé récemment par M. Hermite [**].

Maintenant supposons n pair; on a alors, en développant l'équation (1),

$$z^n + z^{n-2}\sum_r (\Delta_{r,n-2})_0 + \ldots + z^2 \sum_r (\Delta_{r,2})_0 + \Delta_0 = 0:$$

les coefficients de tous les termes étant positifs, les valeurs de z^2 que cette équation fournit ne sont jamais positives; z est donc essentiellement imaginaire, et il en est de même des racines de l'équation (A), lesquelles sont d'ailleurs évidemment deux à deux réciproques puisque les valeurs de z sont deux à deux égales et de signe contraire. Notre théorème est donc démontré dans ce second cas comme dans le premier.

---

[*] *Novi Commentarii Academiæ Petropolitanæ*, 1775. — LIOUVILLE, *Journal de Mathématiques*, tome V.

[**] *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, n° XXXIV, fév. 1854.