JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

BAZIN

Sur la composition des formes quadratiques à quatre variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 215-252.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__215_0>

SUR

LA COMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES A QUATRE VARIABLES;

PAR M. BAZIN,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Si l'on considère deux formes quadratiques, c'est-à-dire deux fonctions homogènes du second degré à coefficients entiers,

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots + 2dxy + 2exz + \ldots,$$
$$f' = a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + \ldots + 2d'x'y' + 2e'x'z' + \ldots,$$

on peut se proposer de ramener leur produit à la forme

$$F = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + \ldots + 2DXY + 2EXZ + \ldots,$$

A, B, C, etc., étant des nombres entiers, et X, Y, Z, etc., des fonctions linéaires et entières des produits xx', xy', xz',..., yx', yy', yz', etc. M. Gauss, dans ses *Disquisitiones arithmeticæ*, a complétement résolu ce problème pour le cas de deux variables et lui a donné le nom de *composition*. En étendant à quatre variables la définition posée par M. Gauss pour le cas de deux variables, nous dirons qu'une forme quaternaire

$$\begin{aligned} F = AX^2 + BY^2 + CZ^2 + DV^2 + 2EXY + 2FXZ + 2GXV \\ + 2HYZ + 2KYV + 2LZV \end{aligned}$$

est composée de deux autres formes

$$\begin{aligned} f &= ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2 + 2exy + 2fxz + 2gxv \\ &\quad + 2hyz + 2kyv + 2lzv, \\ f' &= a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'v'^2 + 2e'x'y' + 2f'x'z' + 2g'x'v' \\ &\quad + 2h'y'z' + 2k'y'v' + 2l'z'v', \end{aligned}$$

si elle se transforme en leur produit ff' au moyen de la substitution à coefficients entiers,

$$(S)\quad \left\{\begin{aligned} X &= \alpha_1 x'x + \beta_1 x'y + \gamma_1 x'z + \delta_1 x'v + \alpha_2 y'x + \beta_2 y'y \\ &\quad + \gamma_2 y'z + \delta_2 y'v + \alpha_3 z'x + \beta_3 z'y + \gamma_3 z'z + \delta_3 z'v \\ &\quad + \alpha_4 v'x + \beta_4 v'y + \gamma_4 v'z + \delta_4 v'v, \\ Y &= \alpha'_1 x'x + \beta'_1 x'y + \gamma'_1 x'z + \delta'_1 x'v + \alpha'_2 y'x + \ldots, \\ Z &= \alpha''_1 x'x + \beta''_1 x'y + \gamma''_1 x'z + \delta''_1 x'v + \alpha''_2 y'x + \ldots, \\ V &= \alpha'''_1 x'x + \beta'''_1 x'y + \gamma'''_1 x'z + \delta'''_1 x'v + \alpha'''_2 y'x + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et si, de plus, les déterminants des huit systèmes

$$(S_1)\ \left\{\begin{matrix} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1 \\ \alpha'_1, & \beta'_1, & \gamma'_1, & \delta'_1 \\ \alpha''_1, & \beta''_1, & \gamma''_1, & \delta''_1 \\ \alpha'''_1, & \beta'''_1, & \gamma'''_1, & \delta'''_1 \end{matrix}\right\}, \qquad (S_2)\ \left\{\begin{matrix} \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2 \\ \alpha'_2, & \beta'_2, & \gamma'_2, & \delta'_2 \\ \alpha''_2, & \beta''_2, & \gamma''_2, & \delta''_2 \\ \alpha'''_2, & \beta'''_2, & \gamma'''_2, & \delta'''_2 \end{matrix}\right\},$$

$$(S_3)\ \left\{\begin{matrix} \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3 \\ \alpha'_3, & \beta'_3, & \gamma'_3, & \delta'_3 \\ \alpha''_3, & \beta''_3, & \gamma''_3, & \delta''_3 \\ \alpha'''_3, & \beta'''_3, & \gamma'''_3, & \delta'''_3 \end{matrix}\right\}, \qquad (S_4)\ \left\{\begin{matrix} \alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, & \delta_4 \\ \alpha'_4, & \beta'_4, & \gamma'_4, & \delta'_4 \\ \alpha''_4, & \beta''_4, & \gamma''_4, & \delta''_4 \\ \alpha'''_4, & \beta'''_4, & \gamma'''_4, & \delta'''_4 \end{matrix}\right\},$$

$$(S'_1)\ \left\{\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \alpha_4 \\ \alpha'_1, & \alpha'_2, & \alpha'_3, & \alpha'_4 \\ \alpha''_1, & \alpha''_2, & \alpha''_3, & \alpha''_4 \\ \alpha'''_1, & \alpha'''_2, & \alpha'''_3, & \alpha'''_4 \end{matrix}\right\}, \qquad (S'_2)\ \left\{\begin{matrix} \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, & \beta_4 \\ \beta'_1, & \beta'_2, & \beta'_3, & \beta'_4 \\ \beta''_1, & \beta''_2, & \beta''_3, & \beta''_4 \\ \beta'''_1, & \beta'''_2, & \beta'''_3, & \beta'''_4 \end{matrix}\right\},$$

$$(S'_3)\ \left\{\begin{matrix} \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3, & \gamma_4 \\ \gamma'_1, & \gamma'_2, & \gamma'_3, & \gamma'_4 \\ \gamma''_1, & \gamma''_2, & \gamma''_3, & \gamma''_4 \\ \gamma'''_1, & \gamma'''_2, & \gamma'''_3, & \gamma'''_4 \end{matrix}\right\}, \qquad (S'_4)\ \left\{\begin{matrix} \delta_1, & \delta_2, & \delta_3, & \delta_4 \\ \delta'_1, & \delta'_2, & \delta'_3, & \delta'_4 \\ \delta''_1, & \delta''_2, & \delta''_3, & \delta''_4 \\ \delta'''_1, & \delta'''_2, & \delta'''_3, & \delta'''_4 \end{matrix}\right\},$$

n'ont aucun diviseur commun.

Le théorème d'Euler sur la multiplication de deux sommes de quatre carrés est un cas particulier de la question précédente. En effet, ce théorème consiste dans l'identité

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2+z^2+v^2)(x'^2+y'^2+z'^2+v'^2)\\ &=(xx'+yy'+zz'+vv')^2+(yx'-xy'-vz'+zv')^2\\ &+(zx'+vy'-xz'-yv')^2+(vx'-zy'+yz'-xv')^2.\end{aligned}$$

En remplaçant, dans cette identité, y, z, v, y', z', v' par $y\sqrt{a}$, $z\sqrt{b}$, $v\sqrt{ab}$, $y'\sqrt{a}$, $z'\sqrt{b}$, $v'\sqrt{ab}$, on obtient la relation plus générale, due à Lagrange,

$$\begin{aligned}&(x^2+ay^2+bz^2+abv^2)(x'^2+ay'^2+bz'^2+abv'^2)\\ &=(xx'+ayy'+bzz'+abvv')^2+a(yx'-xy'-bvz'+bzv')^2\\ &+b(zx'+avy'-xz'-ayv')^2+ab(vx'-zy'+yz'-xv')^2.\end{aligned}$$

Nous donnerons d'abord la solution algébrique complète du problème de la composition et nous rechercherons ensuite dans quels cas il admet des solutions rationnelles et entières. Ces cas sont assez restreints, comme le démontrent les propositions suivantes, qui se déduisent immédiatement de la solution générale :

1°. Une forme quaternaire n'est composable avec une autre forme quaternaire et même avec une forme quadratique d'un nombre d'indéterminées quelconques que si son déterminant est négatif et, de plus, un carré parfait. Cette condition se vérifie immédiatement sur les formes d'Euler et de Lagrange, dont les déterminants sont -1 et $-a^2b^2$. Dans le cas d'un déterminant positif, les solutions du problème seraient non-seulement irrationnelles, mais imaginaires.

2°. Une forme définie ne peut se composer avec une forme indéfinie.

3°. Il résulte des deux propositions précédentes que deux formes f, f' susceptibles d'être composées peuvent être ramenées par des transformations rationnelles à deux nouvelles formes, telles que

$$\begin{aligned}f_1&=\varphi(x,y,z)+\Delta v^2,\\ f'_1&=\varphi'(x',y',z')+\Delta' v'^2,\end{aligned}$$

$\varphi(x, y, z)$, $\varphi'(x', y', z')$ étant deux formes ternaires toutes deux définies ou toutes deux indéfinies, et Δ, Δ' leurs déterminants. Il faut, de plus, pour que la composition soit possible, qu'il existe une transformation rationnelle entre les formes adjointes $\Phi(x, y, z)$, $\Phi'(x', y', z')$ de $\varphi(x, y, z)$, $\varphi'(x', y', z')$. Toutes les inconnues de la question s'expriment en fonction rationnelle des neuf coefficients de cette transformation. La composition de deux formes quaternaires se ramène ainsi en dernière analyse à la recherche d'une transformation entre deux formes ternaires. Cette relation entre deux théories qui semblent n'avoir aucun point de contact est assez remarquable. On déduit des propositions précédentes que les deux formes f et f' et leur composée F peuvent, au moyen de substitutions rationnelles, être ramenées à trois nouvelles formes f_1, f'_1, F_1 qui ne diffèrent que par un seul coefficient,

$$f_1 = ax^2 + \frac{1}{a}(c\,dy^2 + b\,dz^2 + b\,cv^2),$$

$$f'_1 = a'x'^2 + \frac{1}{a'}(c\,dy'^2 + b\,dz'^2 + b\,cv'^2),$$

$$F_1 = aa'X^2 + \frac{1}{aa'}(c\,dY^2 + bdZ^2 + bcV^2).$$

4°. On voit déjà, d'après les trois conditions précédentes, combien la composition est restreinte dans les formes quaternaires. Ces trois conditions suffisent pour que le problème admette des solutions rationnelles, mais une quatrième est encore nécessaire pour qu'il y ait des solutions entières. Lorsque l'on se borne au cas le plus simple, c'est-à-dire à celui de la composition avec elle-même d'une forme telle que

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2,$$

cette condition peut s'énoncer ainsi : Soient l le plus grand commun diviseur de ab et de cd, l' le plus grand commun diviseur de ac et de bd, l'' le plus grand commun diviseur de ad et de bc, le produit $ll'l''$ doit être égal à $abcd$. La forme composée est, dans ce cas,

$$X^2 + lY^2 + l'Z^2 + l''V^2.$$

Une forme quaternaire n'est donc pas toujours composable avec elle-même. Cette impossibilité établit une différence importante entre les formes binaires et les formes quaternaires et ne permet pas de faire, pour ces dernières, une classification analogue à celle que M. Gauss a faite dans les nos 301-307 des *Disquisitiones arithmeticæ*. M. Gauss, en effet, a établi que les formes binaires d'un même déterminant peuvent être considérées comme résultant de la composition d'un nombre très-limité d'entre elles avec les différentes puissances d'une même forme. Nous appelons ici puissance $n^{ième}$ d'une forme f la forme que l'on obtient en composant f avec elle-même n fois de suite. Pour établir dans les formes quaternaires une théorie semblable, il faudrait admettre des substitutions à coefficients fractionnaires; mais la composition ainsi entendue prend une trop grande extension, et toutes les formes composées que l'on peut obtenir au moyen de deux formes f et f' ne sont plus équivalentes; elles appartiennent à plusieurs classes d'un même genre. On ne peut donc plus considérer la composition des classes; il faudrait se borner à la composition des genres, ce qui n'offre aucun intérêt, la nature du genre composé pouvant se déterminer d'avance d'après les caractères des genres qui le composent. Les beaux théorèmes des nos 301-307 des *Disquisitiones arithmeticæ* n'ont donc pas d'analogues dans la théorie des formes quaternaires.

§ I.

Nous ramènerons la solution du problème général à la recherche des déterminants à seize lettres que l'on peut former en combinant de diverses manières les soixante-quatre coefficients de la substitution (S); nous allons d'abord exposer quelques notations et rappeler quelques propriétés des déterminants dont nous ferons usage.

Nous désignerons par Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 les déterminants des quatre systèmes (S_1), (S_2), (S_3), (S_4) Considérons en particulier l'un d'eux, Δ_1 par exemple, et supposons que l'on substitue aux quatre lettres α_1, α'_1, α''_1, α'''_1 formant la première ligne verticale du système (S_1) les quatre lettres de la première ligne du système (S_2), α_2, α'_2, α''_2, α'''_2;

nous obtenons ainsi un nouveau système,

$$\begin{matrix} \alpha_2, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1, \\ \alpha'_2, & \beta'_1, & \gamma'_1, & \delta'_1, \\ \alpha''_2, & \beta''_1, & \gamma''_1, & \delta''_1, \\ \alpha'''_2, & \beta'''_1, & \gamma'''_1, & \delta'''_1, \end{matrix}$$

dont nous représenterons le déterminant par $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, la lettre du dénominateur dans le symbole $\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ désignant la colonne qui est supprimée dans (S_1), et la lettre du numérateur celle de (S_2) qui lui est substituée; en écrivant successivement les quatre lettres α_2, α'_2, α''_2, α'''_2 à la place des trois autres colonnes de (S_1), on obtient trois nouveaux systèmes dont les déterminants peuvent se représenter par $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)$. Nous donnerons aux déterminants ainsi déduits de Δ_1 le nom de dérivés. Il est clair que chacune des douze colonnes composant les trois systèmes (S_2), (S_3), (S_4) peut être écrite à la place de chacune des quatre colonnes de (S_1); nous aurons donc quarante-huit dérivés de (S_1), et par la même raison quarante-huit dérivés pour chacun des trois déterminants Δ_2, Δ_3, Δ_4. Le nombre des dérivés est ainsi de 48×4 ou 192. Ces cent quatre-vingt-douze quantités peuvent se partager en trois catégories distinctes : 1° les quarante-huit dérivés de Δ_1; 2° quarante-huit dérivés de Δ_2, Δ_3, Δ_4 qui s'obtiennent en substituant une colonne de (S_1) à une des colonnes de (S_2), (S_3), (S_4); 3° quatre-vingt-seize déterminants où ne figurent pas les lettres du système (S_1) et qui s'obtiennent en remplaçant dans l'un des trois systèmes (S_2), (S_3), (S_4) une colonne verticale par une colonne de l'un des deux autres. Les déterminants des deux dernières séries sont liés à ceux de la première par des équations de condition fort simples. Ces relations se déduisent toutes des identités connues :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_1\alpha_2 &= \alpha_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)+\beta_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)+\gamma_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)+\delta_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1\beta_2 &= \alpha_1\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)+\beta_1\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)+\gamma_1\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)+\delta_1\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1\gamma_2 &= \alpha_1\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)+\beta_1\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)+\gamma_1\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)+\delta_1\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1\delta_2 &= \alpha_1\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)+\beta_1\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)+\gamma_1\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)+\delta_1\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right),\\
\Delta_1\alpha'_2 &= \alpha'_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)+\beta'_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)+\gamma'_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)+\delta'_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_1\alpha''_2 &= \alpha''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)+\beta''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)+\gamma''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)+\delta''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\Delta_1\alpha'''_2 &= \alpha'''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)+\beta'''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)+\gamma'''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)+\delta'''_1\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

(Ces identités se vérifient facilement en remarquant que l'on a, d'après la définition que nous avons donnée des déterminants dérivés,

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \alpha_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}+\alpha'_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}+\alpha''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1}+\alpha'''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1},$$
$$\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) = \beta_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}+\beta'_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}+\beta''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1}+\beta'''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1},$$

$\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}$, $\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}$, etc., étant les dérivées de Δ_1 prises par rapport aux différentes lettres qui le composent.)

On a de même :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_2\alpha_1 &= \alpha_2\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)+\beta_2\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)+\gamma_2\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right)+\delta_2\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right),\\
\Delta_2\beta_1 &= \alpha_2\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)+\beta_2\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)+\gamma_2\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma_2}\right)+\delta_2\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Éliminant les seize lettres α_1, β_1, γ_1, δ_1, α'_1, β'_1, etc., entre ces deux systèmes et exprimant que les équations qui résultent de l'élimination ne sont que de simples identités, on obtient les seize relations suivantes entre les dérivés de Δ_1 et ceux des dérivés de Δ_2 qui font partie de la deuxième série,

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
\Delta_1\Delta_2 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right), \\
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right), \\
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta^2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right), \\
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right), \\
0 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right), \\
\Delta_1\Delta_2 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta_1\Delta_2 &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\gamma_2}\right) \\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

En changeant l'indice 2 en 3 ou 4, on poserait deux séries de relations analogues pour les dérivés de Δ_3 et Δ_4.

On obtient de la même manière des relations entre les déterminants de la troisième série et ceux des deux premières; reprenons les équations (1); en changeant l'indice 2 en 3, on a un système analogue.

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_1 \alpha_3 &= \alpha_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right) \\ &\qquad + \delta_1 \Delta_1 \left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right), \\ \Delta_1 \beta_3 &= \alpha_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right) + \beta_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right) + \gamma_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_1}\right) \\ &\qquad + \delta_1 \Delta_1 \left(\frac{\beta_3}{\delta_1}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En changeant, dans les équations (4), l'indice 1 en 2, on obtient de même,

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta_2 \alpha_3 &= \alpha_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) + \beta_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\beta_2}\right) + \gamma_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\gamma_2}\right) \\ &\qquad + \gamma_2 \Delta_2 \left(\frac{\alpha_3}{\delta_2}\right), \\ \Delta_2 \beta_3 &= \alpha_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\alpha_2}\right) + \beta_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\beta_2}\right) + \gamma_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\gamma_2}\right) \\ &\qquad + \delta_2 \Delta_2 \left(\frac{\beta_3}{\delta_2}\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Remplaçons maintenant dans les équations (4), α, β, γ, δ, etc., par leurs valeurs tirées des équations (2), et identifions les expressions ainsi obtenues pour α_3, β_3, etc., avec les expressions (5); nous avons les seize équations de condition :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\alpha_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\beta_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\beta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\beta_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\gamma_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\gamma_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\gamma_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\alpha_3}{\delta_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right),\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\beta_3}{\alpha_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\alpha_2}\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta_1\Delta_2\left(\frac{\delta_3}{\delta_2}\right) &= \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\delta_2}\right)\\
&\quad + \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\gamma_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\gamma_1}{\delta_2}\right) + \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right).
\end{aligned}\right.$$

Il résulte de ce qui précède que tous les déterminants dérivés peuvent s'exprimer en fonction de Δ_1, et de ses quarante-huit dérivés; les trois déterminants Δ_2, Δ_3, Δ_4 peuvent eux-mêmes s'exprimer ainsi; car, si l'on se reporte aux valeurs de α_2, β_2, etc., données par les équations (1), on a, en formant leur déterminant,

$$(7)\quad \Delta_2 = \Delta_1 \times \text{dét. du syst.} \left|\begin{matrix} \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right) \\ \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right), & \frac{1}{\Delta_1}\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right) \end{matrix}\right|.$$

Supposons maintenant que l'on donne numériquement Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 et leurs dérivés, et proposons-nous d'en déduire les soixante-quatre coefficients (S): il est clair qu'il suffit de considérer Δ_1 et ses quarante-huit dérivés, pourvu que les équations de condition précédentes soient satisfaites, autrement le problème serait impossible. Nous n'avons donc que quarante-neuf équations qui s'obtiendront en égalant aux valeurs numériques données Δ_1 et ses dérivés. Ces équations peuvent être remplacées par d'autres plus simples. Désignons par $[\Delta_1]$, $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]$, $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right]$, etc., les valeurs numériques de Δ_1, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)$, etc.; il est clair que l'on a, d'après les équations (1), quarante-huit relations de la forme suivante:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &[\Delta_1]\,\alpha_2 = \alpha_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] + \beta_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right] + \gamma_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right] + \delta_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right],\\ &[\Delta_1]\,\beta_2 = \alpha_1\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right] + \beta_1\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\beta_1}\right] + \gamma_1\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right] + \delta_1\Delta_1\left[\frac{\beta_2}{\delta_1}\right],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Si l'on choisit les seize coefficients α_1, β_1, γ_1, δ_1, α'_1, etc., de manière que leur déterminant soit égal à $[\Delta_1]$, les équations (8) donneront les valeurs des quarante-huit autres coefficients α_2, β_2, etc. En effet, on a

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \alpha_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \alpha'_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \alpha''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \alpha'''_2\frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}.$$

Remplaçant α_2, α'_2, α''_2, α'''_2 par les expressions (8), il vient

$$\begin{aligned}[\Delta_1]\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = &\left\{\alpha_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] + \beta_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right] + \gamma_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right] + \delta_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right]\right\}\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}\\ &+\left\{\alpha'_1\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right] + \ldots\ldots\ldots\ldots\right\}\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned}[\Delta_1]\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = &\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]\left\{\alpha_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \alpha'_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \ldots\right\}\\ &+\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right]\left\{\beta_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \beta'_1\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \ldots\right\}\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

le coefficient de $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]$ est égal à $[\Delta_1]$, ceux de $\Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right]$, etc., sont évidemment nuls. On a donc bien

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = \Delta_1\left[\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right].$$

Les équations (8) fournissent ainsi la solution complète de la question.

§ II.

Revenons maintenant au problème qui fait l'objet de ce Mémoire.

Supposons les deux formes f, f' données, et proposons-nous d'en déduire la forme composée F. Les inconnues sont au nombre de soixante-quatorze, savoir, les dix coefficients de F et les soixante-quatre coefficients de la substitution (S). Les équations qui doivent déterminer toutes ces quantités s'obtiendront en effectuant dans F la substitution (S) et identifiant le résultat avec le produit ff'. Nous avons ainsi cent équations se rapportant à trois types différents. Afin de les écrire sous une forme plus simple, nous désignerons par $\frac{dF}{d\alpha_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'_1}$, $\frac{dF}{d\alpha''_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'''_1}$ les dérivées par rapport à α_1, α'_1, α''_1, α'''_1 de l'expression

$$A\alpha_1^2 + B\alpha_1'^2 + C\alpha_1''^2 + D\alpha_1'''^2 + 2E\alpha_1\alpha'_1 + \ldots,$$

que l'on obtient en faisant, dans F,

$$X = \alpha_1, \quad Y = \alpha'_1, \quad Z = \alpha''_1, \quad V = \alpha'''_1;$$

nous représenterons par $\sum \alpha_1 \frac{dF}{d\alpha_1}$, $\sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1}$, etc., les expressions

$$\alpha_1 \frac{dF}{d\alpha_1} + \alpha'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1} + \alpha''_1 \frac{dF}{d\alpha''_1} + \alpha'''_1 \frac{dF}{d\alpha'''_1},$$

$$\beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} + \beta'_1 \frac{dF}{d\alpha'_1} + \beta''_1 \frac{dF}{d\alpha''_1} + \beta'''_1 \frac{dF}{d\alpha'''_1},$$

et par $\sum \beta_1 \frac{dF}{d\beta_1}, \ldots, \sum \gamma_1 \frac{dF}{d\gamma_1}$, etc., des expressions analogues α_1, β_1, γ_1, etc. Nous supposerons, en outre, que f et f' ne contiennent que les carrés des variables, c'est-à-dire que les douze coefficients e, f, g, h, k, l, e', f', g', h', k', l' sont nuls, le cas général pouvant se déduire facilement de ce cas particulier.

A cause de la symétrie des lettres, nous n'écrirons que les seize équations où figure le coefficient α_1, les autres s'en déduisant par de simples permutations de lettres. Ceci posé, ces équations, en se servant de la notation exposée plus haut, s'écriront de la manière suivante :

Premier type.

$$\sum \alpha_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 2aa'. \tag{9}$$

Ce type comprend seize équations qui se déduiraient de la précédente en remplaçant α_1 par β_1, γ_1, etc., et aa' par ab', ac', etc.

Deuxième type.

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \gamma_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \delta_1 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0; \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum \alpha_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \alpha_3 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \\ &\sum \alpha_4 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0 \end{aligned} \right.$$

Les équations (10) ne contiennent que des lettres de même indice. Pour chacun des quatre indices 1, 2, 3, 4 on aura six équations que l'on formera en combinant deux à deux les quatre lettres α, β, γ, δ. Il y a donc vingt-quatre équations de la forme (10). Les équations (11), au contraire, s'obtiennent en combinant des lettres semblables, mais d'indices différents; elles sont également au nombre de vingt-quatre.

Troisième type.

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum\beta_2\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_2\frac{dF}{d\beta_1}=0,\qquad \sum\beta_3\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_3\frac{dF}{d\beta_1}=0,\\
&\qquad\qquad\sum\beta_4\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_4\frac{dF}{d\beta_1}=0,\\
&\sum\gamma_2\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_2\frac{dF}{d\gamma_1}=0,\qquad \sum\gamma_3\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_3\frac{dF}{d\gamma_1}=0,\\
&\qquad\qquad\sum\gamma_4\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_4\frac{dF}{d\gamma_1}=0,\\
&\sum\delta_2\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_2\frac{dF}{d\delta_1}=0,\qquad \sum\delta_3\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_3\frac{dF}{d\delta_1}=0,\\
&\qquad\qquad\sum\delta_4\frac{dF}{d\alpha_1}+\sum\alpha_4\frac{dF}{d\delta_1}=0.
\end{aligned}\right.$$

La première équation de chacun de ces trois groupes s'obtient en combinant l'une des quatre lettres α_1, β_1, γ_1, δ_1 avec l'une des quatre lettres α_2, β_2, γ_2, δ_2; il y aura donc six équations appartenant à ce type dans lesquelles les indices seront 1 et 2. La même opération peut être répétée pour chacune des six combinaisons des indices 1, 2, 3, 4. Nous aurons donc en tout trente-six équations de la forme (12).

Nous allons commencer par éliminer les dix coefficients de F. Si nous considérons les équations (9) et (10) comme un système d'équations du premier degré dont les inconnues seraient $\frac{dF}{d\alpha_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'_1}$, $\frac{dF}{d\alpha''_1}$, $\frac{dF}{d\alpha'''_1}$, nous avons, en résolvant par rapport à ces quantités:

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{dF}{d\alpha_1}=\frac{2aa'}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1},\qquad \frac{dF}{d\alpha'_1}=\frac{2aa'}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1},\\
&\frac{dF}{d\alpha''_1}=\frac{2aa'}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1},\qquad \frac{dF}{d\alpha'''_1}=\frac{2aa'}{\Delta_1}\frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}.
\end{aligned}\right.$$

Il est clair que ces quatre équations peuvent remplacer les équations (9) et (10). Si l'on substitue les valeurs précédentes de $\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha_1}$, etc., dans les équations (11), elles deviennent :

$$\alpha_2 \frac{d\Delta}{d\alpha_1} + \alpha'_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \alpha''_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \alpha'''_2 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1} = 0,$$

$$\alpha_3 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \alpha'_3 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \alpha''_3 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \alpha'''_3 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1} = 0,$$

$$\alpha_4 \frac{d\Delta_1}{d\alpha_1} + \alpha'_4 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'_1} + \alpha''_4 \frac{d\Delta_1}{d\alpha''_1} + \alpha'''_4 \frac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1} = 0.$$

Les premiers membres représentent les trois déterminants que l'on obtient en remplaçant dans Δ_1 les quatre lettres α_1, α'_1, α''_1, α'''_1 par α_2, α'_2, α''_2, α'''_2; α_3, α'_3, α''_3, α'''_3; α_4, α'_4, α''_4, α'''_4, on a donc, d'après la notation convenue

$$(14) \qquad \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) = 0, \quad \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) = 0, \quad \Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right) = 0.$$

En faisant la même substitution dans les équations (12), elles deviennent :

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned}
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) + b\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right) + b\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_4}{\alpha_1}\right) + b\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\beta_1}\right) = 0,\\[1ex]
&a\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right) + c\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\gamma_3}{\alpha_1}\right) + c\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\gamma_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\gamma_4}{\alpha_1}\right) + c\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\gamma_1}\right) = 0,\\[1ex]
&a\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right) + d\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\alpha_1}\right) + d\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\delta_1}\right) = 0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\delta_4}{\alpha_1}\right) + d\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\delta_1}\right) = 0.
\end{aligned}\right.$$

Nous avons déduit les équations (13) et (15) des équations primitives du problème. Il est facile de voir que ces dernières peuvent également se déduire des équations (13) et (15) qui peuvent, par conséquent, les remplacer. Il ne nous reste plus, pour achever l'élimination des coefficients de F, qu'à éliminer ces inconnues entre les équations de la forme (13), qui sont au nombre de soixante-quatre. En effet, en écrivant de nouveau les quatre équations (13) et leur adjoignant douze autres qui s'en déduisent par de simples permutations de lettres, nous avons :

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{dF}{d\alpha_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha_1}, & \dfrac{dF}{d\beta_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma_1}, & \dfrac{dF}{d\delta_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta_1}, \\
\dfrac{dF}{d\alpha'_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}, & \dfrac{dF}{d\beta'_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta'_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma'_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma'_1}, & \dfrac{dF}{d\delta'_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta'_1}, \\
\dfrac{dF}{d\alpha''_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha''_1}, & \dfrac{dF}{d\beta''_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta''_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma''_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma''_1}, & \dfrac{dF}{d\delta''_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta''_1}, \\
\dfrac{dF}{d\alpha'''_1} = \dfrac{2aa'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}, & \dfrac{dF}{d\beta'''_1} = \dfrac{2ba'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\beta'''_1}, \\
\dfrac{dF}{d\gamma'''_1} = \dfrac{2ca'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma'''_1}, & \dfrac{dF}{d\delta'''_1} = \dfrac{2da'}{\Delta_1}\dfrac{d\Delta_1}{d\delta'''_1}.
\end{array}\right.$$

En changeant successivement l'indice 1 en 2, 3, 4, nous aurons trois systèmes de seize équations semblables au précédent; c'est entre ces trois derniers systèmes et le système (16) qu'il faut éliminer les coefficients inconnus de la forme composée F. Si l'on examine les équations (16), ou plutôt les équations (9) et (10) dont elles ont été déduites, on voit qu'elles expriment simplement que la substitution

$$(S_1)\quad \left\{\begin{array}{l}
X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 v, \\
Y = \alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z + \delta'_1 v, \\
Z = \alpha''_1 x + \beta''_1 y + \gamma''_1 z + \delta''_1 v, \\
V = \alpha'''_1 x + \beta'''_1 y + \gamma'''_1 z + \delta'''_1 v,
\end{array}\right.$$

transforme F en $a'f$; donc, si l'on désigne par $\left(\frac{1}{\sqrt{a'}}S_1\right)$ la substitution que l'on déduit de (S_1) en divisant par $\sqrt{a'}$ les coefficients α_1, β_1, etc., cette nouvelle substitution doit transformer F en f. De même, la substitution

$$(S_2)\qquad \left\{\begin{aligned} X &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 v,\\ Y &= \alpha'_2 x + \beta'_2 y + \gamma'_2 z + \delta'_2 v,\\ Z &= \alpha''_2 x + \beta''_2 y + \gamma''_2 z + \delta''_2 v,\\ V &= \alpha'''_2 x + \beta'''_2 y + \gamma'''_2 z + \delta'''_2 v, \end{aligned}\right.$$

transforme F en $b'f$; et, en employant la même notation, on voit que la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{b'}}S_2\right)$ transforme F en f. Mais il résulte des équations (1) que l'on a

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{\sqrt{b'}} = {} & \frac{\alpha_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}}\\ & + \frac{\gamma_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\delta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}},\\ \frac{\beta_2}{\sqrt{b'}} = {} & \frac{\alpha_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}}\\ & + \frac{\gamma_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}} + \frac{\delta_1}{\sqrt{a'}}\,\frac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\frac{a'}{b'}},\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{b'}}S_2\right)$ équivaut donc aux deux substitutions successives :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a'}}\mathrm{S}_1\right)\quad\begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{\alpha_1}{\sqrt{a'}}x'' + \dfrac{\beta_1}{\sqrt{a'}}y'' + \dfrac{\gamma_1}{\sqrt{a'}}z'' + \dfrac{\delta_1}{\sqrt{a'}}v'', \\ \mathrm{Y} = \dfrac{\alpha'_1}{\sqrt{a'}}x'' + \dfrac{\beta'_1}{\sqrt{a'}}y'' + \dfrac{\gamma'_1}{\sqrt{a'}}z'' + \dfrac{\delta'_1}{\sqrt{a'}}v'', \\ \mathrm{Z} = \dfrac{\alpha''_1}{\sqrt{a'}}x'' + \dfrac{\beta''_1}{\sqrt{a'}}y'' + \dfrac{\gamma''_1}{\sqrt{a'}}z'' + \dfrac{\delta''_1}{\sqrt{a'}}v'', \\ \mathrm{V} = \dfrac{\alpha'''_1}{\sqrt{a'}}x'' + \dfrac{\beta'''_1}{\sqrt{a'}}y'' + \dfrac{\gamma'''_1}{\sqrt{a'}}z'' + \dfrac{\delta'''_1}{\sqrt{a'}}v'', \end{cases}$$

$$(17)\quad\begin{cases} x'' = x\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + y\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + z\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + v\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}}, \\ y'' = x\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + y\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + z\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + v\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}}, \\ z'' = x\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + y\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + z\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + v\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}}, \\ v'' = x\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + y\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + z\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} + v\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}\sqrt{\dfrac{a'}{b'}} \end{cases}$$

[car en substituant les valeurs de x'', y'', z'', v'' en fonction de x, y, etc., dans les expressions de X, Y, etc., on retrouve la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{b'}}\mathrm{S}_2\right)$]. Mais la substitution $\left(\frac{1}{\sqrt{a'}}\mathrm{S}_1\right)$ transforme F en f; la substitution (17) est donc une simple transformation de f en elle-même. Réciproquement, si cette condition est satisfaite, il est facile de voir que la substitution (S_2) transformera F en $b'f$. Effectuant dans f la substitution (17), et identifiant le résultat avec f elle-même, nous obtenons dix équations qui remplaceront celles des équations (16) où figurent les coefficients de (S_2); ces équations sont, en remarquant que les quatre déterminants $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)$ sont nuls,

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}
&b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)^2+c\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2+d\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)^2=\frac{b'}{a'}a\Delta_1^2,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)^2+c\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)^2+d\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)^2=\frac{b'}{a'}b\Delta_1^2,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)^2+b\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)^2+d\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)^2=\frac{b'}{a'}c\Delta_1^2,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)^2+b\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)^2+c\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)^2=\frac{b'}{a'}d\Delta_1^2;\\
&c\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)+d\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)=0,\\
&b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)+d\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)=0,\\
&b\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)+c\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)=0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)+d\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)=0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)+c\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)=0,\\
&a\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)+b\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)=0.
\end{aligned}\right.$$

En considérant les substitutions (S_3) et (S_4), nous aurions deux systèmes analogues qui pourraient remplacer celles des équations (13) où figurent les lettres de ces deux substitutions.

L'élimination des coefficients de F se trouve ainsi complète, et nous avons, pour déterminer les inconnues de la question :

1°. Les seize équations (16) où entrent les lettres de (S_1); ces seize équations se réduisent à dix équations distinctes et serviront à déterminer les dix coefficients de F lorsque ceux de la substitution (S) seront connus;

2°. Trois systèmes de dix équations analogues au système (18), vingt-quatre équations de la forme (14) et trente-six autres de la forme (15). Toutes ces équations ne contiennent que les déterminants dérivés de Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4.

La question se trouve ainsi ramenée à la recherche de ces déterminants.

§ III.

D'après ce que nous avons vu précédemment, il suffit de trouver les quarante-huit déterminants dérivés de Δ_1. Douze d'entre eux sont déjà connus par les équations (14), ce sont les déterminants :

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{lll} \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\alpha_4}{\alpha_1}\right), \\ \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\beta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\beta_4}{\beta_1}\right), \\ \Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\gamma_3}{\gamma_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\gamma_4}{\gamma_1}\right), \\ \Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\delta_1}\right), & \Delta_1\left(\frac{\delta_4}{\delta_1}\right), \end{array}\right.$$

qui sont tous égaux à zéro. Nous substituerons aux autres, douze inconnues auxiliaires dont l'introduction simplifiera les calculs. Reprenons l'équation

$$(20)\qquad \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0 :$$

il est facile de voir que l'on a

$$\sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} = \sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_2} \quad \text{et} \quad \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = \sum \alpha_1 \frac{dF}{d\beta_2};$$

d'où résulte que l'équation (20) peut s'écrire à volonté sous l'une des quatre formes :

$$\sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} + \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0, \quad \sum \alpha_1 \frac{dF}{d\beta_2} + \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} = 0,$$
$$\sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_2} + \sum \alpha_2 \frac{dF}{d\beta_1} = 0, \quad \sum \beta_1 \frac{dF}{d\alpha_2} + \sum \beta_2 \frac{dF}{d\alpha_1} = 0.$$

Substituant dans ces relations, à la place de $\frac{dF}{d\alpha_1}, \frac{dF}{d\alpha'_1}, \ldots, \frac{dF}{d\beta_1}, \frac{dF}{d\beta'_1}$, etc., leurs valeurs tirées des équations (16), elles deviennent :

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{ll} b\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) + a\,\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) = 0, & b'\,\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + a'\,\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right) = 0, \\ b\,\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right) + a\,\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) = 0, & b'\,\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right) + a'\,\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right) = 0. \end{array}\right.$$

On déduit de ces équations la relation fort simple

$$(22)\qquad \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)=\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right).$$

Posons

$$(23)\qquad \Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)=\Delta_1\Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2},$$

$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$ désignant une inconnue auxiliaire; nous avons de même,

$$\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)=\Delta_1\Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2}.$$

En résolvant les équations (21) et (23) par rapport aux déterminants dérivés, il vient

$$(24)\qquad \begin{cases}\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)=\Delta_1(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{b'b}{a'a}}, & \Delta_2\left(\frac{\beta_1}{\alpha_2}\right)=-\Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{a'b}{b'a}},\\ \Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)=-\Delta_1(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{b'a}{a'b}}, & \Delta_2\left(\frac{\alpha_1}{\beta_2}\right)=\Delta_2(\alpha\beta)_{1\cdot 2}\sqrt{\frac{a'a}{b'b}},\end{cases}$$

la quantité $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$ pouvant être précédée du signe $+$ ou du signe $-$.

Nous pourrons de même exprimer les autres dérivés de Δ_1, $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)$; $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)$; $\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)$; $\Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\alpha_3}{\beta_1}\right)$, etc., en fonction de nouvelles indéterminées analogues $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\beta)_{1\cdot 3}$, etc. La question se trouve ainsi ramenée à la recherche de ces inconnues auxiliaires qui sont au nombre de dix-huit, savoir :

$$(25)\qquad \begin{cases}(\alpha\beta)_{1\cdot 2}, & (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}, & (\alpha\delta)_{1\cdot 2}, & (\beta\gamma)_{1\cdot 2}, & (\beta\delta)_{1\cdot 2}, & (\gamma\delta)_{1\cdot 2},\\ (\alpha\beta)_{1\cdot 3}, & (\alpha\gamma)_{1\cdot 3}, & (\alpha\delta)_{1\cdot 3}, & (\beta\gamma)_{1\cdot 3}, & (\beta\delta)_{1\cdot 3}, & (\gamma\delta)_{1\cdot 3},\\ (\alpha\beta)_{1\cdot 4}, & (\alpha\gamma)_{1\cdot 4}, & (\alpha\delta)_{1\cdot 4}, & (\beta\gamma)_{1\cdot 4}, & (\beta\delta)_{1\cdot 4}, & (\gamma\delta)_{1\cdot 4}.\end{cases}$$

Ces dix-huit quantités sont liées par un grand nombre d'équations de condition que nous allons énumérer successivement. Nous distinguerons, comme nous l'avons fait plus haut, trois séries de déterminants : 1° les dérivés de Δ_1; 2° les dérivés de Δ_2, Δ_3, Δ_4 qui s'obtiennent en substituant dans l'un des systèmes (S_2), (S_3), (S_4) une colonne de (S_1); 3° les dérivés de Δ_2, Δ_3, Δ_4 qui ne contiennent aucune des lettres de (S_1). Chacune de ces trois séries nous fournira un certain nombre d'équations de condition auxquelles doivent satisfaire les dix-huit inconnues auxiliaires. Considérons d'abord les déterminants dérivés de Δ_1; ces déterminants figurent dans trois systèmes d'équations, qui sont : 1° douze équations de la forme (14) : nous n'avons pas à nous en occuper, puisqu'elles donnent les valeurs des déterminants, tels que $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)$, etc., qui ne s'expriment pas en fonction des inconnues auxiliaires; 2° dix-huit équations de la forme (15) dont il est également inutile de nous occuper, puisque ce sont elles qui nous ont fourni les valeurs des déterminants en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc.; 3° enfin, les équations (18). En substituant dans ces dernières les valeurs des déterminants en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, etc., elles deviennent :

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned}
&(\alpha\beta)^2_{1\cdot 2}+(\alpha\gamma)^2_{1\cdot 2}+(\alpha\delta)^2_{1\cdot 2}=1,\\
&(\alpha\beta)^2_{1\cdot 2}+(\beta\gamma)^2_{1\cdot 2}+(\beta\delta)^2_{1\cdot 2}=1,\\
&(\alpha\gamma)^2_{1\cdot 2}+(\beta\gamma)^2_{1\cdot 2}+(\gamma\delta)^2_{1\cdot 2}=1,\\
&(\alpha\delta)^2_{1\cdot 2}+(\beta\delta)^2_{1\cdot 2}+(\gamma\delta)^2_{1\cdot 2}=1;\\
&(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 2}+(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 2}=0,\\
-&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 2}+(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2}=0,\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 2}+(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2}=0,\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}+(\beta\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2}=0,\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 2}-(\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2}=0,\\
&(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 2}+(\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 2}=0.
\end{aligned}\right.$$

Ces dix équations se réduisent aux quatre suivantes :

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{c}
(\alpha\beta)^2_{1\cdot 2}+(\alpha\gamma)^2_{1\cdot 2}+(\alpha\delta)^2_{1\cdot 2}=1,\\
(\gamma\delta)_{1\cdot 2}=\varepsilon_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 2},\quad (\beta\delta)_{1\cdot 2}=-\varepsilon_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 2},\quad (\beta\gamma)_{1\cdot 2}=\varepsilon_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 2},
\end{array}\right.$$

$\varepsilon_{1\cdot 2}$ désignant la quantité ± 1. De même,

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{c}
(\alpha\beta)^2_{1\cdot 3}+(\alpha\gamma)^2_{1\cdot 3}+(\alpha\delta)^2_{1\cdot 3}=1,\\
(\gamma\delta)_{1\cdot 3}=\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\beta)_{1\cdot 3},\quad (\beta\delta)_{1\cdot 3}=-\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3},\quad (\beta\gamma)_{1\cdot 3}=\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\delta)_{1\cdot 3},\\
(\alpha\beta)^2_{1\cdot 4}+(\alpha\gamma)^2_{1\cdot 4}+(\alpha\delta)^2_{1\cdot 4}=1,\\
(\gamma\delta)_{1\cdot 4}=\varepsilon_{1\cdot 4}(\alpha\beta)_{1\cdot 4},\quad (\beta\delta)_{1\cdot 4}=-\varepsilon_{1\cdot 4}(\alpha\gamma)_{1\cdot 4},\quad (\beta\gamma)_{1\cdot 4}=\varepsilon_{1\cdot 4}(\alpha\delta)_{1\cdot 4}.
\end{array}\right.$$

Considérons maintenant les déterminants de la deuxième série, c'est-à-dire ceux qui s'obtiennent en substituant à une colonne de l'un des trois systèmes (S_2), (S_3), (S_4) une colonne de (S_1). Ils sont liés à ceux de la première série par les équations (3). Si nous remplaçons dans ces équations les déterminants par leurs valeurs en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc., nous retrouvons simplement les équations (26); il n'en résulte donc aucune condition nouvelle.

Il ne nous reste plus à nous occuper que des déterminants de la troisième série; les équations où figurent ces déterminants sont au nombre de trente, savoir, douze équations de la forme (14) et dix-huit équations de la forme (15). Nous avons vu plus haut que ces déterminants s'expriment en fonction de ceux des deux premières séries à l'aide des équations (6); nous avons donc leurs valeurs en fonction de $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc., et nous pouvons, en les substituant dans les équations (14) et (15), obtenir de nouvelles conditions pour les dix-huit inconnues $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, etc. Effectuons d'abord cette substitution dans les équations (14), qui sont :

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{llll} \Delta_2\left(\dfrac{\alpha_3}{\alpha_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\dfrac{\beta_3}{\beta_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\dfrac{\gamma_3}{\gamma_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\dfrac{\delta_3}{\delta_2}\right)=0, \\ \Delta_2\left(\dfrac{\alpha_4}{\alpha_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\dfrac{\beta_4}{\beta_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\dfrac{\gamma_4}{\gamma_2}\right)=0, & \Delta_2\left(\dfrac{\delta_4}{\delta_2}\right)=0, \\ \Delta_3\left(\dfrac{\alpha_4}{\alpha_3}\right)=0, & \Delta_3\left(\dfrac{\beta_4}{\beta_3}\right)=0, & \Delta_3\left(\dfrac{\gamma_4}{\gamma_3}\right)=0, & \Delta_3\left(\dfrac{\delta_4}{\delta_3}\right)=0. \end{array}\right.$$

A cause de la symétrie des lettres, il suffira d'effectuer la substitution dans celles de la première ligne; on obtient de cette manière :

$$\begin{aligned}
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3}+(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3}+(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3}=0,\\
&(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3}+(\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 3}+(\beta\delta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 3}=0,\\
&(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3}+(\beta\gamma)_{1\cdot 2}(\beta\gamma)_{1\cdot 3}+(\gamma\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 3}=0,\\
&(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3}+(\beta\delta)_{1\cdot 2}(\beta\delta)_{1\cdot 3}+(\gamma\delta)_{1\cdot 2}(\gamma\delta)_{1\cdot 3}=0.
\end{aligned}$$

Mais en ayant égard aux équations (27) et (28), ces relations deviennent :

$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,$$
$$\varepsilon_{1\cdot 2}\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,$$
$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + \varepsilon_{1\cdot 2}\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,$$
$$(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + \varepsilon_{1\cdot 2}\varepsilon_{1\cdot 3}(\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0.$$

D'où résulte que

$$\varepsilon_{1\cdot 2} = \varepsilon_{1\cdot 3},$$

et que ces quatre équations se réduisent simplement à la première d'entre elles. En faisant les mêmes transformations sur les autres équations (29), on n'obtiendra donc en tout que trois relations nouvelles entre les inconnues $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, etc.,

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 3} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 3} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 3} = 0,\\ &(\alpha\beta)_{1\cdot 2}(\alpha\beta)_{1\cdot 4} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 2}(\alpha\gamma)_{1\cdot 4} + (\alpha\delta)_{1\cdot 2}(\alpha\delta)_{1\cdot 4} = 0,\\ &(\alpha\beta)_{1\cdot 3}(\alpha\beta)_{1\cdot 4} + (\alpha\gamma)_{1\cdot 3}(\alpha\gamma)_{1\cdot 4} + (\alpha\delta)_{1\cdot 3}(\alpha\delta)_{1\cdot 4} = 0,\end{aligned}\right.$$

auxquelles il faut ajouter la condition

$$\varepsilon_{1\cdot 2} = \varepsilon_{1\cdot 3} = \varepsilon_{1\cdot 4}.$$

Nous désignerons par ε la valeur commune de ces trois quantités.

Si l'on effectue maintenant les mêmes substitutions dans les dix-huit équations de la forme (15), elles se réduisent à de simples identités, en sorte qu'il n'en résulte aucune condition nouvelle.

En résumant tout ce qui précède, on voit que les déterminants dérivés seront tous connus, dès que l'on aura obtenu les neuf quantités $(\alpha\beta)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 2}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 2}$; $(\alpha\beta)_{1\cdot 3}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 3}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 3}$; $(\alpha\beta)_{1\cdot 4}$, $(\alpha\gamma)_{1\cdot 4}$, $(\alpha\delta)_{1\cdot 4}$; désignons-les, pour abréger, par $\lambda, \lambda', \lambda''$; μ, μ', μ''; ν, ν', ν''. Les équations qui les déterminent sont au nombre de six seulement :

$$(31)\quad \left\{\begin{aligned} &\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1,\\ &\mu^2 + \mu'^2 + \mu''^2 = 1,\\ &\nu^2 + \nu'^2 + \nu''^2 = 1;\\ &\lambda\mu + \lambda'\mu' + \lambda''\mu'' = 0,\\ &\lambda\nu + \lambda'\nu' + \lambda''\nu'' = 0,\\ &\mu\nu + \mu'\nu' + \mu''\nu'' = 0.\end{aligned}\right.$$

Il nous reste encore à trouver Δ_1; nous remarquerons que la substitution (S_1) transforme F en $a'f$, et que l'on doit avoir, en désignant par D_1 et D les déterminants de F et de f,

$$Da'^4 = D_1\Delta_1^2;$$

posons

$$\frac{D_1}{D} = n^2,$$

il vient

$$\Delta_1 = \pm na'^2,$$

la quantité n restant d'ailleurs tout à fait indéterminée. De même,

$$\Delta_2 = \pm nb'^2, \quad \Delta_3 = \pm nc'^2 \quad \Delta_4 = \pm nd'^2,$$

les signes supérieurs doivent être pris ensemble ainsi que les signes inférieurs, en vertu des équations (7).

Tous les déterminants sont donc connus; les soixante-quatre coefficients de la substitution (S) s'en déduisent facilement, comme on l'a vu plus haut, et la solution algébrique du problème sera complète dès que l'on aura obtenu les dix coefficients de F. Revenons aux équations (16); elles expriment que la substitution (S_1) transforme F en $a'f$. On obtiendra donc F en faisant dans $a'f$ la substitution inverse :

$$(32)\quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\Delta_1}\left(\dfrac{d\Delta_1}{d\alpha_1}X + \dfrac{d\Delta_1}{d\alpha'_1}Y + \dfrac{d\Delta_1}{d\alpha''_1}Z + \dfrac{d\Delta_1}{d\alpha'''_1}V\right), \\ y = \dfrac{1}{\Delta_1}\left(\dfrac{d\Delta_1}{d\beta_1}X + \dfrac{d\Delta_1}{d\beta'_1}Y + \dfrac{d\Delta_1}{d\beta''_1}Z + \dfrac{d\Delta_1}{d\beta'''_1}V\right), \\ z = \dfrac{1}{\Delta_1}\left(\dfrac{d\Delta_1}{d\gamma_1}X + \dfrac{d\Delta_1}{d\gamma'_1}Y + \dfrac{d\Delta_1}{d\gamma''_1}Z + \dfrac{d\Delta_1}{d\gamma'''_1}V\right), \\ v = \dfrac{1}{\Delta_1}\left(\dfrac{d\Delta_1}{d\delta_1}X + \dfrac{d\Delta_1}{d\delta'_1}Y + \dfrac{d\Delta_1}{d\delta''_1}Z + \dfrac{d\Delta_1}{d\delta'''_1}V\right), \end{cases}$$

que l'on trouve facilement en résolvant par rapport à x, y, z, v les équations

$$(S_1)\quad \begin{cases} X = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 v, \\ Y = \alpha'_1 x + \beta'_1 y + \gamma'_1 z + \delta'_1 v, \\ Z = \alpha''_1 x + \beta''_1 y + \gamma''_1 z + \delta''_1 v, \\ V = \alpha'''_1 x + \beta'''_1 y + \gamma'''_1 z + \delta'''_1 v, \end{cases}$$

α_1, β_1, et, par suite, $\frac{d\Delta_1}{d\alpha_1}$, $\frac{d\Delta_1}{d\beta_1}$, etc., sont connus. On obtient donc immédiatement A, B, C, etc., et la solution algébrique du problème se trouve ainsi complète.

Remarquons, en passant, qu'il existe, entre toutes les formes composées que l'on peut obtenir, des transformations rationnelles; car ces formes se déduisent toutes de $a'f$ par des substitutions rationnelles.

§ IV.

Nous allons rechercher maintenant les conditions qui doivent être remplies pour que les valeurs des inconnues soient rationnelles et entières. Revenons aux dérivés de Δ_1, et considérons spécialement ceux qui s'obtiennent en introduisant dans le système (S_1) une colonne du système (S_2). En ayant égard aux équations (27), les valeurs de ces seize déterminants sont :

$$(33)\quad \left\{\begin{array}{llll}
\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}=0, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}=-\lambda\sqrt{\dfrac{b'a}{a'b}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}=-\lambda'\sqrt{\dfrac{b'a}{a'c}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=-\lambda''\sqrt{\dfrac{b'a}{a'd}}, \\[2ex]
\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}=\lambda\sqrt{\dfrac{b'b}{a'a}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}=0, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}=-\varepsilon\lambda''\sqrt{\dfrac{b'b}{a'c}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=\varepsilon\lambda'\sqrt{\dfrac{b'b}{a'd}}, \\[2ex]
\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}=\lambda'\sqrt{\dfrac{b'c}{a'a}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}=\varepsilon\lambda''\sqrt{\dfrac{b'c}{a'b}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}=0, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=-\varepsilon\lambda\sqrt{\dfrac{b'c}{a'd}}, \\[2ex]
\dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)}{\Delta_1}=\lambda''\sqrt{\dfrac{b'd}{a'a}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1}=-\varepsilon\lambda'\sqrt{\dfrac{b'd}{a'b}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\gamma_1}\right)}{\Delta_1}=\varepsilon\lambda\sqrt{\dfrac{b'd}{a'c}}, & \dfrac{\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)}{\Delta_1}=0.
\end{array}\right.$$

Si l'on prend le rapport des deux déterminants $\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)$ et $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)$, on a

$$\frac{\Delta_1\left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)}{\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\delta_1}\right)}=\varepsilon\sqrt{\frac{ad}{bc}}.$$

Le second membre de cette équation doit être une quantité rationnelle k; on doit donc avoir

$$ad = bck^2,$$

d'où

$$D = -abcd = -b^2c^2k^2.$$

Nous obtenons ainsi une première condition : le déterminant de f doit être négatif, et, de plus, un carré parfait; il est évident qu'il en est de même du déterminant de l'autre forme. Il résulte de cette condition que l'on a

$$a = bcdm^2, \quad a' = b'c'd'm'^2,$$

m et m' étant rationnels, et que, si l'on fait dans f et f'

$$x = mx_1, \quad x' = m'x'_1,$$

elles deviennent

$$bcdx_1^2 + by^2 + cz^2 + dv^2, \quad b'c'd'x_1'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'v'^2.$$

La conclusion précédente est indépendante des signes de a, b, c, d, a', b', c', d'.

Examinons maintenant s'il existe également une condition relative aux signes de ces quantités. Nous distinguerons trois cas :

1°. f et f' sont définies. Dans ce cas, les huit coefficients a, b, c, d, a', b', c', d' sont tous de même signe; les radicaux qui entrent dans les expressions (33) sont tous réels; il en est de même de λ, λ', λ''.

2°. f est définie, f' est indéfinie. Dans cette nouvelle hypothèse, les rapports $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a}{d}$, $\frac{b}{c}$, $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{d}$ sont tous positifs. Mais, parmi les quatre coefficients de f', deux doivent être négatifs; nous pouvons supposer que ces deux coefficients sont b' et c', a' et d' étant, au contraire, positifs : le rapport $\frac{b'}{a'}$ est donc négatif, et, par suite, tous les radicaux (33) deviennent imaginaires. Les déterminants dérivés ne seront réels que si les quantités λ, λ', λ'' sont également imaginaires; mais cette dernière condition ne peut être remplie, puisque

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 = 1.$$

La composition de deux formes de nature différente est donc impossible.

3°. f et f' sont toutes deux indéfinies. En raisonnant comme précédemment sur les expressions (23), on ne découvre dans ce cas aucune raison d'impossibilité. Nous verrons plus loin qu'en effet deux formes indéfinies peuvent être composées.

Désignons par P, P', P'' les trois déterminants $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_1}\right)$, $\Delta_1\left(\frac{\delta_2}{\alpha_1}\right)$, et par M^2 le produit $abcd$; le système des seize déterminants (33) peut s'écrire :

$$(34)\quad \left\{\begin{array}{cccc} 0, & -\frac{a}{b}P, & -\frac{a}{c}P', & -\frac{a}{d}P'', \\ P, & 0, & -\varepsilon\frac{ab}{M}P'', & \varepsilon\frac{ab}{M}P', \\ P', & \varepsilon\frac{ac}{M}P'', & 0, & -\varepsilon\frac{ac}{M}P, \\ P'', & -\varepsilon\frac{ad}{M}P', & \varepsilon\frac{ad}{M}P, & 0. \end{array}\right.$$

Tous les déterminants seront rationnels dès que P, P', P'' le seront. Faisons, de même,

$$\Delta_1\left(\frac{\beta_3}{\alpha_1}\right) = Q,\quad \Delta_1\left(\frac{\gamma_3}{\alpha_1}\right) = Q',\quad \Delta_1\left(\frac{\delta_3}{\alpha_1}\right) = Q'',$$

$$\Delta_1\left(\frac{\beta_4}{\alpha_1}\right) = R,\quad \Delta_1\left(\frac{\gamma_4}{\alpha_1}\right) = R',\quad \Delta_1\left(\frac{\delta_4}{\alpha_1}\right) = R'';$$

il suffira de trouver pour les neuf quantités P, P', P'', Q, Q', Q'', R, R', R'' et pour Δ_1 des valeurs rationnelles. Nous commencerons par Δ_1. Nous avons vu plus haut que l'on a

$$(35)\quad \Delta_1 = \pm na'^2,\quad \Delta_2 = \pm nb'^2,\quad \Delta_3 = \pm nc'^2,\quad \Delta_4 = \pm nd'^2,$$

n représentant le rapport $\sqrt{\frac{D}{D_1}}$; on pourrait poser, de même,

$$(36)\quad \Delta'_1 = \pm n'a^2,\quad \Delta'_2 = \pm n'b^2,\quad \Delta'_3 = \pm n'c^2,\quad \Delta'_4 = \pm n'd^2,$$

Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 étant les déterminants des quatre systèmes (S'_1), (S'_2), (S'_3), (S'_4), et n' le rapport $\sqrt{\frac{D'}{D_1}}$, dans lequel D' représente le déterminant de f'.

Soient m le plus grand commun diviseur de a, b, c, d; m' celui de a', b', c', d'; k celui des huit déterminants Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 : on pourra toujours trouver huit entiers M_1, M_2, M_3, M_4, M'_1, M'_2, M'_3, M'_4, tels que l'on ait

$$\begin{aligned} M_1 a'^4 + M_2 b'^4 + M_3 c'^4 + M_4 d'^4 &= m'^4, \\ M'_1 a^4 + M'_2 b^4 + M'_3 c^4 + M'_4 d^4 &= m^4. \end{aligned}$$

Multipliant la première de ces deux équations par n^2 et la seconde par n'^2, on a

$$\begin{aligned} M_1 \Delta_1^2 + M_2 \Delta_2^2 + M_3 \Delta_3^2 + M_4 \Delta_4^2 &= n^2 m'^4, \\ M'_1 \Delta'^2_1 + M'_2 \Delta'^2_2 + M'_3 \Delta'^2_3 + M'_4 \Delta'^2_4 &= n'^2 m^4, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que $n^2 m'^4$ et $n'^2 m^4$ doivent être entiers et divisibles par k^2; par suite, $D_1 n^2 m'^4$ et $D_1 n'^2 m^4$, c'est-à-dire Dm'^4 et $D'm^4$, seront divisibles par $D_1 k^2$. Réciproquement, il est facile de voir, à l'aide des équations (35) et (36), que tout nombre qui divise $n^2 m'^4$ et $n'^2 m^4$ divise k^2, ou, ce qui revient au même, que tout nombre qui divise $D_1 n^2 m'^4$ et $D_1 n'^2 m^4$, c'est-à-dire Dm'^4 et $D'm^4$, divise $D_1 k^2$. Donc, enfin, $D_1 k^2$ est le plus grand commun diviseur de Dm'^4 et $D'm^4$.

Faisons

$$\frac{D'm^4}{D_1 k^2} = S'^2,\quad \frac{Dm'^4}{D_1 k^2} = S^2,$$

S et S' seront des entiers. Nous aurons

$$mn' = kS',\quad m'n = kS,$$

de sorte qu'en prenant pour $D_1 k^2$ le plus grand commun diviseur de Dm'^4 et de $D'm^4$, $m'n$ et mn', et, par suite, les déterminants Δ_1, Δ_2, etc., seront entiers. On ne peut prendre pour k qu'un nombre de valeurs limité. Chacune de ces valeurs correspondra à une forme transformable en ff' au moyen d'une certaine substitution (S). Pour la forme composée proprement dite, on doit avoir, d'après la définition, $k = 1$; elle est donc, de toutes les formes transformables en ff', celle qui a le plus grand déterminant.

Les déterminants Δ_1, Δ_2, etc., varient proportionnellement à k : il est facile d'en conclure, en se reportant au théorème démontré au commencement de ce Mémoire et aux équations (32), que toutes les formes ransformables en ff' comprennent la forme composée; on en conclut également que toutes les formes répondant à une même valeur de k sont équivalentes.

Revenons maintenant aux inconnues P, P′, P″, etc., en fonction desquelles s'expriment toutes celles de la question. On a vu plus haut que $\Delta_1\left(\frac{\beta_2}{\alpha_1}\right)$ ou P est égal à $\lambda\Delta_1\sqrt{\frac{b'b}{a'a}}$; on a donc

$$\lambda = \frac{P}{\Delta_1}\sqrt{\frac{aa'}{b'b}} = \frac{P}{na'^2}\sqrt{\frac{aa'}{b'b}},$$

λ', λ'', μ, μ', μ'', ν, ν', ν'' s'exprimeraient de la même manière en fonction de P′, P″, Q, Q′, Q″, R, R′, R″. En substituant ces valeurs dans les équations (31), elles deviennent

$$(37)\qquad \left\{\begin{aligned}
&cd\mathrm{P}^2 + bd\mathrm{P}'^2 + bc\,\mathrm{P}''^2 = n^2 a'^3 b'\cdot\frac{bcd}{a},\\
&cd\mathrm{Q}^2 + bd\mathrm{Q}' + bc\,\mathrm{Q}''^2 = n^2 a'^3 c'\cdot\frac{bcd}{a},\\
&cd\mathrm{R}^2 + bd\mathrm{R}'^2 + bc\,\mathrm{R}''^2 = n^2 a'^3 d'\cdot\frac{bcd}{a};\\
&cd\mathrm{PQ} + bd\mathrm{P}'\mathrm{Q}' + bc\,\mathrm{P}''\mathrm{Q}'' = 0,\\
&cd\mathrm{PR} + bd\mathrm{P}'\mathrm{R}' + bc\,\mathrm{P}''\mathrm{R}'' = 0,\\
&cd\mathrm{QR} + bc\mathrm{Q}'\mathrm{R}' + bc\,\mathrm{Q}''\mathrm{R}'' = 0.
\end{aligned}\right.$$

Si l'on considère les seconds membres de ces équations, on peut poser

$$n^2a'^3b'\cdot\frac{bcd}{a} = n^2a'^3b'\frac{\mathrm{M}^2}{a^2} = \frac{n^2a'^2\mathrm{M}'^2\mathrm{M}^2}{a^2c'^2d'^2}\,c'd' = \mathrm{M}_1^2\,c'd',$$

$$n^2a'^3c'\cdot\frac{bcd}{a} = n^2a'^3c'\frac{\mathrm{M}^2}{a^2} = \frac{n^2a'^2\mathrm{M}^2\mathrm{M}'^2}{a^2b'^2d'^2}\,b'd' = \mathrm{M}_2^2\,b'd',$$

$$n^2a'^3d'\cdot\frac{bcd}{a} = n^2a'^3d'\frac{\mathrm{M}^2}{a^2} = \frac{n^2a'^2\mathrm{M}^2\mathrm{M}'^2}{a^2b'^2c'^2}\,b'c' = \mathrm{M}_3^2\,b'c'.$$

Donc, en faisant

$$\begin{array}{lll} P = M_1 P_1, & P' = M_1 P'_1, & P'' = M_1 P''_1, \\ Q = M_2 Q_1, & Q' = M_2 Q'_1, & Q'' = M_2 Q''_1, \\ R = M_3 R_1, & R' = M_3 R'_1, & R'' = M_3 R''_1, \end{array}$$

les équations (37) deviennent

$$(38)\quad \left\{ \begin{array}{l} cdP_1^2 + bdP_1'^2 + bcP_1''^2 = c'd', \\ cdQ_1^2 + bdQ_1'^2 + bcQ_1''^2 = b'd', \\ cdR_1^2 + bdR_1'^2 + bcR_1''^2 = b'c', \\ cdP_1Q_1 + bdP'_1Q'_1 + bcP''_1Q''_1 = 0, \\ cdP_1R_1 + bdP'_1R'_1 + bcP''_1R''_1 = 0, \\ cdQ_1R_1 + bdQ'_1R'_1 + bcQ''_1R''_1 = 0. \end{array} \right.$$

Le problème se trouve ainsi ramené à déterminer ces neuf quantités en nombres rationnels, de manière que la substitution

$$\begin{aligned} x &= P_1 x' + Q_1 y' + R_1 z', \\ y &= P'_1 x' + Q'_1 y' + R'_1 z', \\ z &= P''_1 x' + Q''_1 y' + R''_1 z', \end{aligned}$$

transforme la forme ternaire

$$cdx^2 + bdy^2 + bcz^2$$

en

$$c'd'x'^2 + b'd'y'^2 + b'c'z'^2.$$

Il n'y aura de solutions rationnelles que s'il existe entre ces deux formes une transformation rationnelle; et si cette condition est remplie, on sera certain qu'il existe des solutions de cette espèce.

La composition des formes quaternaires se réduit donc, en dernière analyse, à la recherche d'une transformation entre les deux formes ternaires

$$cdx^2 + bdy^2 + bcz^2$$

et

$$c'd'x'^2 + b'd'y'^2 + b'c'z'^2.$$

Si les conditions auxquelles nous sommes arrivés jusqu'à présent sont remplies, le problème admettra des solutions rationnelles; mais elles ne seront pas toujours entières, et même il n'y aura de solutions entières que dans des cas assez particuliers. Nous allons d'abord constater ce fait important, qui distingue complétement les formes quaternaires des formes binaires, dans la composition d'une forme définie avec elle-même. Dans ce cas, on a

$$n = n' = 1;$$

les deux formes ternaires

$$cdx^2 + bdy^2 + bcz^2, \quad c'd'x'^2 + b'd'y'^2 + b'd'z'^2$$

deviennent identiques, et, comme elles sont définies, il n'existe entre elles d'autre transformation que la suivante,

$$\begin{array}{lll} P_1 = 1, & Q_1 = 0, & R_1 = 0, \\ P'_1 = 0, & Q'_1 = 1, & R'_1 = 0, \\ P''_1 = 0, & Q''_1 = 0, & R''_1 = 1, \end{array}$$

ou, du moins, les autres transformations s'en déduiraient par de simples permutations entre les coefficients. Substituons les valeurs des déterminants qui se déduisent de ces neuf coefficients dans les équations (1), afin d'obtenir les coefficients (S); ces équations deviennent :

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \alpha_2 = -\beta_1, & \alpha_3 = -\gamma_1, & \alpha_4 = -\delta_1, \\ \beta_2 = \frac{b}{a}\alpha_1, & \beta_3 = -\delta_1\sqrt{\frac{bc}{ad}}, & \beta_4 = \gamma_1\sqrt{\frac{bd}{ac}}, \\ \gamma_2 = \delta_1\sqrt{\frac{bc}{ad}}, & \gamma_3 = \frac{c}{a}\alpha_1, & \gamma_4 = \beta_1\sqrt{\frac{cd}{ab}}, \\ \delta_2 = -\gamma_1\sqrt{\frac{bd}{ac}}, & \delta_3 = \beta_1\sqrt{\frac{cd}{ab}}, & \delta_4 = \frac{d}{a}\alpha_1. \end{array} \right.$$

Il est inutile d'écrire les équations semblables qui s'obtiennent en ajoutant un, deux ou trois accents à toutes les lettres. Il faut déterminer les seize coefficients de (S_1), α_1, β_1, etc., de manière que les équations (39) fournissent pour les autres coefficients α_2, β_2, etc., des valeurs entières. Soient l le plus grand commun diviseur de ab et de cd,

l' celui de ac et de bd, l'' celui de ad et de bc. Les quotients $\frac{ab}{l}$, $\frac{cd}{l}$, $\frac{ac}{l'}$, $\frac{bd}{l'}$, $\frac{ad}{l''}$, $\frac{bc}{l''}$ doivent être des carrés, puisque les radicaux des expressions (39) disparaissent. Faisons donc

$$ab = (ab)^2 l, \quad ac = (ac)^2 l', \quad ad = (ad)^2 l'',$$
$$cd = (cd)^2 l, \quad bd = (bd)^2 l', \quad bc = (bc)^2 l'',$$

les équations (39) deviennent

$$(40)\quad \begin{cases} \alpha_2 = -\beta_1, & \alpha_3 = -\gamma_1, & \alpha_4 = -\delta_1, \\ \beta_2 = \frac{b}{a}\alpha_1, & \beta_3 = -\frac{(bc)}{(ad)}\delta_1, & \beta_4 = \frac{(bd)}{(ac)}\gamma_1, \\ \gamma_2 = \frac{(bc)}{(ad)}\delta_1, & \gamma_3 = \frac{c}{a}\alpha_1, & \gamma_4 = -\frac{(cd)}{(ab)}\beta_1, \\ \delta_2 = -\frac{(bd)}{(ac)}\gamma_1, & \delta_3 = \frac{(cd)}{(ab)}\beta_1, & \delta_4 = \frac{d}{a}\alpha_1. \end{cases}$$

Supposons, pour plus de simplicité, que a, b, c, d n'aient pas de diviseur commun. En examinant ces valeurs, on voit facilement que α_1, et, par suite, α'_1, α''_1, α'''_1 doivent être divisibles par a; de même, β_1, β'_1, β''_1, β'''_1 doivent l'être par (ab), γ_1, γ'_1, γ''_1, γ'''_1 par (ac), et δ_1, δ'_1, δ''_1, δ'''_1 par (ad). Le déterminant formé avec ces seize quantités le sera donc par $a(ab)(ac)(ad)$. Mais ce déterminant est égal à a^2; il faut donc que $\frac{a^2}{a(ab)(ac)(ad)}$ ou $\frac{a}{(ab)(ac)(ad)}$ soit un nombre entier. Cette condition peut encore s'énoncer autrement. Élevons l'expression $\frac{a}{(ab)(ac)(ad)}$ au carré, et remplaçons $(ab)^2$, $(ac)^2$, $(ad)^2$ par $\frac{ab}{l}$, $\frac{ac}{l'}$, $\frac{ad}{l''}$: elle devient $\frac{ll'l''}{abcd}$. Le produit $ll'l''$ doit donc être divisible par le déterminant $abcd$. D'un autre côté, il est facile de s'assurer que ce produit ne peut pas être plus grand que $abcd$. En effet, il ne contient pas d'autres facteurs premiers que ceux de $abcd$: soit φ l'un de ces facteurs et désignons par ε, ε', ε'', ε''' les exposants dont il est affecté dans les quatre nombres a, b, c, d; si l'on remarque que, par hypothèse, l'un de ces quatre exposants est nul, il est facile de s'assurer que l'exposant de φ dans $ll'l''$ ne peut être plus grand que la somme

$$\varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'''.$$

Donc $ll'l''$ est au plus égal à $abcd$. Mais il doit être divisible par $abcd$. Donc enfin la condition nécessaire pour que les valeurs des inconnues données par les équations (39) soient entières se réduit à

$$ll'l'' = abcd. \tag{41}$$

Supposons cette condition remplie, la forme composée s'obtiendra immédiatement. Il suffit, en effet, de choisir les seize coefficients du système (S_1), de manière que leur déterminant soit égal à a^2. On peut prendre

$$\begin{array}{llll}
\alpha_1 = a, & \beta_1 = 0, & \gamma_1 = 0, & \delta_1 = 0, \\
\alpha'_1 = 0, & \beta'_1 = (ab), & \gamma'_1 = 0, & \delta'_1 = 0, \\
\alpha''_1 = 0, & \beta''_1 = 0, & \gamma''_1 = (ac), & \delta''_1 = 0, \\
\alpha'''_1 = 0, & \beta'''_1 = 0, & \gamma'''_1 = 0, & \delta'''_1 = (ad).
\end{array}$$

Les équations (39) fournissent les valeurs des autres coefficients, et, en achevant le calcul qui n'offre aucune difficulté, on trouve, pour la forme composée,

$$F = X^2 + lY^2 + l'Z^2 + l''V^2.$$

D'après la condition (41), le déterminant de cette forme est égal à $abcd$. Il est facile de vérifier directement que F est la forme composée, car on a bien

$$\left\{\begin{aligned}
&(ax^2 + by^2 + cz^2 + dv^2)(ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + dv'^2) \\
&= (axx' + byy' + czz' + dvv')^2 \\
&+ l[(ab)(yx' - xy') + (cd)(vz' - zv')]^2 \\
&+ l'[(ac)(zx' - xz') + (bd)(yv' - vy')]^2 \\
&+ l''[(ad)(vx' - xv') + (bc)(zy' - yz')]^2.
\end{aligned}\right. \tag{42}$$

Remarquons, en passant, que la condition

$$ll'l'' = abcd$$

se vérifie immédiatement sur la forme de Lagrange,

$$x^2 + by^2 + cz^2 + bcv^2;$$

on a, en effet,

$$l = b, \quad l' = c, \quad l'' = bc.$$

Revenons maintenant au cas plus général dans lequel les deux formes f et f' sont différentes.

Supposons d'abord que les neuf coefficients P_1, Q_1, R_1, P'_1, Q'_1, R'_1, P''_1, Q''_1, R''_1 soient connus; il nous sera facile d'obtenir une solution rationnelle. En faisant dans les deux formes

$$(43)\quad \left\{\begin{array}{ll} x = x_1, & x'_1 = x'_1, \\ y = \frac{cd}{M} y_1, & y = \frac{c'd'}{M'} y'_1, \\ z = \frac{bd}{M} z_1, & z = \frac{b'd'}{M'} z'_1, \\ v = \frac{bc}{M} v_1, & v = \frac{b'c'}{M'} v'_1, \end{array}\right.$$

elles deviennent

$$f_1 = ax_1^2 + \frac{1}{a}(cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2),$$

$$f'_1 = a'x_1'^2 + \frac{1}{a'}(c'd'y_1'^2 + b'd'z_1'^2 + b'c'v_1'^2).$$

D'après ce que nous avons vu plus haut, la substitution composée des neuf coefficients P_1, Q_1, etc., transformerait

$$cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2$$

en

$$c'd'y_1'^2 + b'd'z_1'^2 + b'c'v_1'^2;$$

il est facile d'en déduire les neuf coefficients P_2, Q_2, R_2, etc., de la substitution qui transformerait

$$c'd'y_1'^2 + b'd'z_1'^2 + b'c'v_1'^2$$

en

$$cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2.$$

En effectuant dans f'_1 la substitution

$$(44)\quad \left\{\begin{array}{l} x'_1 = x''_1, \\ y'_1 = P_2 y''_1 + Q_2 z''_1 + R_2 v''_1, \\ z'_1 = P'_2 y''_1 + Q'_2 z''_1 + R'_2 v''_1, \\ v'_1 = P''_2 y''_1 + Q''_2 z''_1 + R''_2 v''_1, \end{array}\right.$$

elle devient

$$f_1'' = a' x_1''^2 + \frac{1}{a'}(cdy_1''^2 + bdz_1''^2 + bcv_1''^2).$$

Remplaçant dans l'équation (42) les coefficients a, b, c, d par 1, cd, bd, bc, et les variables x, y, z, v, x', y', z', v' par $x_1\sqrt{a}$, $\frac{y_1}{\sqrt{a}}$, $\frac{z_1}{\sqrt{a}}$, $\frac{v_1}{\sqrt{a}}$, $x_1''\sqrt{a'}$, $\frac{y_1''}{\sqrt{a'}}$, $\frac{z_1''}{\sqrt{a'}}$, $\frac{v_1''}{\sqrt{a'}}$, on a

$$(45)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[ax_1^2 + \frac{1}{a}(cdy_1^2 + bdz_1^2 + bcv_1^2)\right]\left[a'x_1''^2 + \frac{1}{a'}(cdy_1''^2 + bdz_1''^2 + bcv_1''^2)\right] \\ &= aa'\left[x_1 x_1'' + \frac{cd}{aa'}y_1 y_1'' + \frac{bd}{aa'}z_1 z_1'' + \frac{bc}{aa'}v_1 v_1''\right]^2 \\ &+ \frac{cd}{aa'}\left[a'y_1 x_1'' - ax_1 y_1'' + b(v_1 z_1'' - z_1 v_1'')\right]^2 \\ &+ \frac{bd}{aa'}\left[a'z_1 x_1'' - ax_1 z_1'' + c(y_1 v_1'' - v_1 y_1'')\right]^2 \\ &+ \frac{bc}{aa'}\left[a'v_1 x_1'' - ax_1 v_1'' + d(z_1 y_1'' - y_1 z_1'')\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on résout maintenant les équations (43) et (44) par rapport à x_1, y_1, z_1, v_1, x_1'', y_1'', z_1'', v_1'', et si l'on substitue les valeurs ainsi obtenues dans l'équation (45) afin de rétablir les variables primitives, on obtient

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} &(ax^2 + by^2 + cz_1 + dv^2)(a'x'^2 + b'y'^2 + c'z'^2 + d'v'^2) \\ &= aa'(\alpha_1 x'x + \beta_1 x'y + \gamma_1 x'z + \ldots)^2 \\ &+ \frac{bd}{aa'}(\alpha_1' x'x + \beta_1' x'y + \gamma_1' x'z + \ldots)^2 \\ &+ \frac{cd}{aa'}(\alpha_1'' x'x + \beta_1'' x'y + \gamma_1'' x'z + \ldots)^2 \\ &+ \frac{bd}{aa'}(\alpha_1''' x'x + \beta_1''' x'y + \gamma_1''' x'z + \ldots)^2, \end{aligned}\right.$$

α_1, β_1, γ_1, δ_1, α_2, etc., étant des fonctions rationnelles des quantités a, b, c, d, a', b', c', d', P_1, Q_1, R_1, etc.

D'après ce que nous avons vu plus haut, la forme composée F doit pouvoir se déduire de la forme

$$aa'\,X^2 + \frac{1}{aa'}(bd\,Y^2 + cd\,Z^2 + bc\,V^2),$$

que nous venons d'obtenir à l'aide d'une substitution rationnelle. Nous avons donc le théorème suivant :

Si deux formes quaternaires f et f' sont composables, ces deux formes et leur composée F *peuvent, au moyen de substitutions rationnelles, se ramener à de nouvelles formes f_1, f'_1, F_1, qui ne diffèrent plus que par un seul coefficient, savoir :*

$$f_1 = ax^2 + \frac{1}{a}(bdy^2 + cdz^2 + bcv^2),$$

$$f'_1 = a'x'^2 + \frac{1}{a'}(bdy'^2 + cdz'^2 + bcv'^2),$$

$$F_1 = aa'\,X^2 + \frac{1}{aa'}(bd\,Y^2 + cd\,Z^2 + bc\,V^2).$$

Tous les cas de composition possibles sont donc compris dans l'équation (45), *et s'en déduiraient en remplaçant x, y, z, v, etc., par des fonctions linéaires et rationnelles de nouvelles variables.*

La solution générale du problème de la composition se ramène donc uniquement à la recherche d'une transformation entre deux formes ternaires; on ne connaît pas encore de solution générale de ce problème : en sorte que la forme composée ne peut être obtenue directement que dans des cas particuliers. Mais le théorème précédent montre que la composition des formes quaternaires a lieu dans des cas trop particuliers pour pouvoir conduire à des résultats importants. Une forme de cette espèce n'est même pas toujours composable avec elle-même. La classification des formes binaires créée par M. Gauss (*Disquisitiones arithmeticæ*, 301-307) n'a pas d'analogue dans les formes quaternaires; car il faudrait admettre des substitutions fractionnaires, ce qui donne à la forme composée une trop grande généralité, et ne permet plus de considérer la composition des classes, mais seulement celle des genres.

Nous avons supposé jusqu'ici que les formes données ne contenaient que les carrés des variables; mais il est aisé de voir que les propositions précédentes n'en sont pas moins générales. Car on peut toujours, au moyen d'une substitution rationnelle, faire disparaître les doubles produits des variables, et remplacer les formes proposées par des transformées sur lesquelles on raisonnera comme nous venons de le faire. Il suffira ensuite de revenir aux variables primitives par de nouvelles substitutions rationnelles inverses des premières. Mais ces transformations ne modifient les déterminants primitifs qu'en leur ajoutant ou leur enlevant des facteurs carrés; les déterminants des formes transformées devant être des carrés parfaits, il en est de même de ceux des proposées, et, par suite, toutes les conclusions que nous en avons déduites sont applicables à ces dernières.