JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BRAVAIS

Mémoire sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 1-50.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__1_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur l'influence qu'exerce la rotation de la Terre sur le mouvement d'un pendule à oscillations coniques [*];

PAR M. A. BRAVAIS,
Lieutenant de vaisseau, Professeur à l'École Polytechnique.

Les recherches que je vais communiquer ont été entreprises à la suite de la publication de la belle expérience faite par M. Foucault sur la déviation du plan d'oscillation d'un pendule à suspension complétement libre. La conséquence forcée de ce fait était la durée inégale des oscillations dextrogyres et lévogyres d'un pendule conique, et j'eus l'honneur d'adresser à ce sujet une communication à l'Académie des Sciences, le 10 février 1851. J'annonçai en même temps qu'il y avait lieu à vérifier expérimentalement cette inégalité théorique, et que la méthode connue des astronomes sous le nom de *méthode des coïncidences* me paraissait surtout éminemment propre à la mettre en évidence.

[*] Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences le 18 août 1851, et soumis à une Commission composée de MM. Binet, Pouillet et Laugier. Un extrait en a été donné par l'auteur dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, tome XXXIII, page 195.

Depuis lors, M. Arago ayant eu l'obligeance de mettre à ma disposition la vaste salle de la Méridienne de l'Observatoire impérial, et m'ayant manifesté l'intérêt qu'il portait à cette expérience, je n'ai pas hésité à l'entreprendre, et j'ai eu la satisfaction non-seulement de retrouver l'effet prévu par la théorie, mais même de le mesurer avec un degré de précision que je n'avais pas d'abord espéré atteindre.

On peut se rendre compte de différentes manières de la cause du phénomène que nous avons à étudier. La plus simple, sans nul doute, consiste à décomposer la rotation effective de la Terre autour de son axe, en deux rotations simultanées, l'une ayant lieu d'occident en orient autour de la verticale du point de suspension du pendule; l'autre, pareillement dirigée d'occident en orient, et dont l'axe est une ligne menée par le point de rencontre de la verticale avec l'axe terrestre, dans une direction parallèle à la méridienne du lieu d'observation. Cette proposition n'est vraie que lorsqu'on considère une rotation s'effectuant dans un laps de temps infiniment court; mais les résultats qui s'en déduisent peuvent souvent être étendus au cas de rotations finies, et tel est le cas, entre autres, du phénomène qui nous occupe.

Le résultat des mouvements que produisent alors dans le système les deux rotations simultanées équivaut à celui que produiraient les deux rotations successivement effectuées; de même que le mouvement produit sous l'impulsion simultanée de deux forces équivaut à la somme géométrique des mouvements produits par ces forces agissant consécutivement. On peut donc considérer les deux rotations isolément, et calculer l'effet de chacune d'elles. Quant à la valeur absolue de chacune des rotations, on démontre facilement qu'elles sont égales à la rotation terrestre multipliée l'une par le sinus, l'autre par le cosinus de la latitude.

Pour savoir quel pourrait être l'effet de la rotation autour de la parallèle à la méridienne, on peut, avec M. Liouville, supposer le pendule à l'équateur, et le faire successivement osciller dans le plan de l'équateur et dans le plan du méridien; on démontre facilement que la rotation ne peut, ni dans l'un ni dans l'autre de ces deux cas, troubler la direction azimutale du mouvement; d'où, par la loi de la superposition des petits mouvements, il est facile de conclure qu'il en sera de même pour tous les azimuts intermédiaires. Cette même conclusion est évidemment applicable à toutes les latitudes, tant que l'on ne considère que la rotation autour de la droite normale au plan du premier vertical.

Pour se représenter l'effet de la rotation autour de la verticale, on peut de même se figurer placé au pôle, et y faire osciller le pendule dans différents plans : en considérant le mouvement oscillatoire qui s'établit alors comme indépendant de la rotation que la Terre effectue au-dessous du mobile, il est clair qu'en vertu de l'inertie, le plan restera fixe dans l'espace et paraîtra, quant à son mouvement apparent, se déplacer d'orient en occident, autour de la verticale, avec une vitesse angulaire égale à celle de la rotation terrestre. Il devra en être de même à toute latitude, avec cette différence que la rotation du plan se fera avec une vitesse moindre et sera à la rotation terrestre comme le sinus de la latitude est à l'unité. A la vérité, le pendule n'est pas complétement indépendant du globe terrestre, puisqu'il y tient par son point d'attache supérieur, et que l'effet de la rotation est de tordre le point d'attache sur lui-même dans le sens de cette rotation, à raison d'un tour en vingt-quatre heures sidérales, si l'on est placé au pôle même, avec une vitesse moindre, sous de moindres latitudes. Or il est facile de s'assurer, par exemple, au moyen de la balance de torsion de Coulomb, que l'effet de cette torsion de la partie supérieure du fil, pendant que le pendule oscille, se porte en entier, ou presque en entier, sur le mobile lui-même qui se tord autour de la droite représentant le prolongement du fil dans son intérieur, jusque par delà son centre de gravité.

Si j'ai ajouté les mots « presque en entier », c'est que la proposition énoncée n'est rigoureusement vraie, sans cette restriction, que dans le cas des oscillations infiniment petites. Lorsque les amplitudes sont considérables à l'extrémité de chaque oscillation, une partie de l'effet de la torsion du fil se transmet, par l'intermédiaire du fil lui-même, au centre de gravité du mobile, et tend à le dévier dans le sens vers lequel porte la rotation du point de suspension, effet très-faible qui a été examiné avec soin par Poisson dans un Mémoire inséré dans la *Connaissance des Temps* pour l'année 1819.

En négligeant cette très-faible action, qui s'annule d'ailleurs dans les oscillations infiniment petites, en négligeant aussi l'action très-faible que l'air peut opposer par sa résistance, on trouve que le pendule peut être considéré comme effectuant ses vibrations indépendamment du globe, et les lois de son mouvement relatif, le seul que nous puissions directement apprécier, sont alors celles que nous venons d'indiquer.

Lorsque le mouvement d'un pendule libre cesse de se faire rigoureusement dans un plan vertical, la trajectoire se change en une sorte d'ellipse qui diffère d'autant moins de l'ellipse des géomètres, que les amplitudes des oscillations sont plus petites. Dans ce cas encore, la rotation composante autour de la verticale ne troublera pas la manière dont s'effectueront les oscillations considérées dans l'espace absolu, et, par conséquent, le grand axe de l'ellipse d'oscillation devra paraître se porter régulièrement de l'orient vers l'occident, avec la même vitesse angulaire que dans le cas des oscillations planes.

Lorsque la courbe décrite par le mobile devient complétement circulaire, comme cela a lieu dans le cas du pendule conique, il n'y a plus de grand axe ni de petit axe, et, par conséquent, le phénomène de la déviation des axes cesse d'avoir lieu, mais l'effet de la rotation terrestre ne disparaît pas pour cela; il se reproduit sous une autre forme, et affecte la durée de la révolution, c'est-à-dire de l'intervalle entre deux passages successifs par le méridien du point de suspension. L'altération ainsi produite est trop faible pour être appréciable en une seule oscillation; mais, comme rien ne s'oppose à ce que l'on prolonge les observations en laissant le mouvement oscillatoire se continuer, on conçoit qu'au bout d'un certain laps de temps, la différence produite par la rotation terrestre peut devenir très-perceptible.

Soit T la durée de la rotation terrestre égale à vingt-quatre heures sidérales ($23^{h}\,56^{m}\,4^{s},19$), soit t la durée de la révolution du pendule conique autour de la verticale, durée qui dépend de la longueur l du fil suspenseur et de l'intensité g de la gravité, d'après la formule connue

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}};$$

la vitesse angulaire de la rotation terrestre sera représentée par $\frac{2\pi}{T}$, et celle de la rotation composante autour de la verticale par $\frac{2\pi}{T}\sin\lambda$, λ étant la latitude astronomique du lieu.

Soient maintenant t_w la durée apparente de la rotation lorsque le mouvement pendulaire s'effectue d'occident en orient, t_e la même durée lorsque ce mouvement s'effectue d'orient en occident; dans le premier cas, la vitesse de rotation absolue $\frac{2\pi}{t}$ sera égale à la vitesse apparente augmentée de la vitesse de rotation de la Terre, puisque ces deux vitesses ont lieu dans le même sens, et l'on aura

$$\frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{t_w} + \frac{2\pi\sin\lambda}{T}. \tag{1}$$

Dans le second cas, les vitesses se retranchent, et l'on aura

$$\frac{2\pi}{t} = \frac{2\pi}{t_e} - \frac{2\pi\sin\lambda}{T}: \tag{2}$$

on déduit de là

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t_e} + \frac{1}{t_w}\right) = \frac{1}{t}, \\ &\frac{1}{t_e} - \frac{1}{t_w} = \frac{2\sin\lambda}{T}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Cette dernière formule montre quel sera l'effet de l'action terrestre si l'on fait mouvoir le pendule alternativement dans les deux sens; les durées t_e, t_w ne seront pas identiques; le mouvement d'orient en occident accélérera l'oscillation, tandis que le mouvement inverse la ralentira.

Les appareils ont été disposés de la manière suivante dans une première série d'observations : Un fort madrier de chêne, de $1^m,07$ de longueur sur 150 millimètres de large et 95 millimètres de hauteur, fut disposé horizontalement à $11^m,6$ au-dessus du sol de la salle de la Méridienne. Sur sa face inférieure on boulonna une forte plaque de cuivre p (*fig.* 1, *côté droit de la figure, Pl. I*), taraudée dans sa partie centrale; le fil suspenseur, en acier recuit, fut soudé à l'étain suivant l'axe de la vis S, et en vissant cette pièce sur le plateau fixe p, le fil se trouva parfaitement maintenu dans sa partie supérieure. La partie inférieure du fil fut soudée de même dans la pièce s analogue à S, mais de dimensions moindres, et de manière à la traverser suivant son axe; cette pièce portait un filet de vis sur sa surface extérieure.

Le poids consistait en un cylindre en cuivre C, travaillé au tour, et dont la partie supérieure était traversée par une pièce à vis VT, dont la partie supérieure T venait se visser fortement sur le bas de la pièce s. Selon que le cylindre était plus ou moins vissé par l'opérateur sur la partie TV, la distance de son centre de gravité au point d'attache devenait plus ou moins considérable. Le cylindre pouvait être complétement rempli de mercure; son poids total égalait alors 10700 grammes.

Pour mettre le cylindre en mouvement, et surtout lui donner une rotation parfaitement circulaire, on plaça au-dessous du fil un trépied en bois de chêne fort et épais, supportant un plateau de chêne cc, et, par-dessus le plateau, un mouvement d'horlogerie M, mû par des poids, et dont les engrenages étaient disposés de manière à faire tourner l'axe aa, soit d'occident en orient, soit d'orient en occident. L'axe aa était couronné par la plate-forme F qu'il entraînait dans son mouvement, et de celle-ci partait un levier à branches horizontales articulées. La dernière branche LL' de ce levier était ajustée de manière que celle de ses deux faces latérales qui précédait l'autre pendant la rotation fût dirigée vers le centre de la plate-forme F. Le trépied lui-même était placé de telle manière que le prolongement du fil $\varphi\varphi$, à l'état de repos, vînt passer par le centre de la même plate-forme.

Alors on vissait à la paroi inférieure du cylindre C une petite tige cylindrique t, dont le niveau inférieur atteignait presque la plate-forme F. Cela fait, on écartait à la main le cylindre C, en le tirant vers le levier L, et l'on faisait reposer le petit tenon t sur une petite saillie placée en r, le long de la face latérale du levier mobile. La détente du mouvement était alors écartée, le poids commençait à agir; le levier L, commençant sa rotation, entraînait la tige t et le cylindre C. A l'origine du mouvement, le cylindre C exerçant une certaine pression sur le repos r, le frottement suffisait pour tordre le fil $\varphi\varphi$ sur lui-même, et le fil se détordait de temps à autre par des mouvements saccadés; mais bientôt, la rotation venant à s'accélérer, la force centrifuge diminuait la pression et le frottement; toute torsion sensible cessait dans le cylindre C et dans le fil qui le supportait; enfin la force centrifuge devenait égale à la composante horizontale de la tension du fil, et toute pression cessait sur le repos r. A partir de ce moment, le poids Π continuant à agir, la tige t se détachait de r, et, s'écartant de plus en plus du centre de la rotation, remontait lentement le long de la face latérale du levier LL'. Le poids moteur était réglé de manière à ce que ce mouvement centrifuge ne fût ni trop rapide ni trop lent. Une graduation, tracée de L en L', permettait de reconnaître s'il s'effectuait avec régularité : en effet, dans le cas où l'action du moteur était inégale et saccadée, la trajectoire décrite par le cylindre devenait elliptique, et la variation des rayons vecteurs devenait sensible par l'irrégularité de la progression de la tige t de L vers L'. Lorsque la tige t avait atteint le point de la graduation correspondant à l'amplitude de rotation que l'on avait assignée d'avance, on arrêtait à la main le levier LL', et on l'abaissait au-dessous de son niveau précédent en le faisant tourner autour d'une articulation à axe horizontal placée en α. Le cylindre C continuait alors son mouvement, il est facile de voir qu'il devait être parfaitement circulaire.

Petit à petit, ces oscillations circulaires allaient en se resserrant, les amplitudes diminuaient; or, l'on pouvait, à une époque quelconque du mouvement, non-seulement mesurer l'amplitude correspondante, mais même voir si le cercle avait dégénéré en une ellipse. Il suffisait de relever le levier LL', de sorte que la face supérieure fût très-peu au-dessous du plan horizontal décrit par l'extrémité inférieure de la tige t; la division de la graduation que recouvrait cette tige, au moment de son passage, indiquait la grandeur du rayon vecteur de l'orbite; on avait soin de répéter cette observation suivant les huit directions principales : nord, nord-est, est, sud-est, sud, sud-ouest, ouest et nord-ouest.

Le mouvement d'horlogerie qui devait imprimer le mouvement circulaire a fonctionné d'une manière satisfaisante pendant mes premières observations; vers la fin, il a fatigué de plus en plus, et les dents de la roue de rencontre se sont usées; les avaries étaient réparables; mais, pressé par le temps, j'ai fini par revenir à l'usage du poids moteur, et j'ai agi directement sur l'axe aa, à la main, au moyen d'un cordon qui l'embrassait de un ou deux de ses tours. On conçoit que le mouvement initial, dans ces conditions peu favorables, ait dû devenir un peu elliptique; mais cette ellipticité a toujours été peu sensible, au moins dans l'état initial de l'orbite.

OBSERVATIONS PAR LA MÉTHODE DES DURÉES.

Pour pouvoir mesurer la durée d'oscillations, un théodolite était placé en θ (*fig.* 2) à une dizaine de mètres de distance du point B, centre de l'oscillation circulaire du mobile, et précisément dans la direction du sud par rapport à B. La lunette du théodolite était dirigée sur la partie inférieure du fil suspenseur, à quelques centimètres au-dessus de la pièce sur laquelle le fil était soudé. A l'état de repos, l'image du fil suspenseur coïncidait rigoureusement avec le fil vertical du réticule de la lunette. Le fil étant mis en mouvement, on notait sur un chronomètre les passages de l'image par le milieu du champ, dans ses mouvements de la droite à la gauche de l'observateur.

Pour plus de précision, on observait l'époque des oscillations 0, 5, 10, 15 et 20, et la moyenne de ces nombres était censée représenter l'heure de l'oscillation n° 10; de même, on notait aussi les époques des oscillations 100, 105, 110, 115 et 120, et la moyenne était considérée comme donnant l'heure de l'oscillation n° 110 [*], et ainsi de suite après chaque nouvelle centaine.

On continuait ainsi pendant 1200 oscillations, observant régulièrement les grandeurs décroissantes de la courbe décrite par le mobile, et son ellipticité par la mesure des huit rayons vecteurs principaux, enfin toutes les circonstances du mouvement final. On arrêtait alors le pendule, puis on le mettait en mouvement dans le sens opposé, et l'on recommençait la série, en ayant soin que les amplitudes initiales, à l'oscillation 0 de chacune de ces deux séries, fussent sensiblement les mêmes.

Après avoir observé de nouveau 1200 oscillations, et pris dans cette nouvelle série les mêmes annotations que dans la série précédente, on

[*] Cinq oscillations équivalant à très-peu près à 32 secondes, sur le pendule que j'employais, le dixième de seconde revenait sensiblement le même, ce qui nuisait à la précision de l'observation; pour parer à cet inconvénient, dans les observations qui ont suivi celles du 5 mai, on a noté l'heure aux oscillations 0, 6, 12, 18 et 24.

possédait tous les éléments nécessaires pour calculer t_e et t_w, et en déduire l'effet de la Terre.

La température variait dans la salle avec une lenteur extrême; on l'enregistrait avant et après chaque série, cet élément pouvant influer sur la longueur du fil, et, par suite, sur la durée des oscillations. La réduction provenant de la variation thermométrique entre les deux séries a toujours été sensiblement nulle, et je n'en ai pas tenu compte; on la trouvera toutefois mentionnée dans les observations.

A partir du 13 mai 1851, j'ai installé deux fils pareils à côté l'un de l'autre, de mêmes grosseur et longueur, chacun d'eux supportant un cylindre de même forme et de même poids, tous deux remplis de mercure. La *fig.* 1 représente les deux fils ainsi placés à côté l'un de l'autre.

Pendant que l'un des cylindres était mis en mouvement d'orient en occident, l'autre était mis en mouvement en sens inverse. Le théodolite étant pourvu de deux lunettes, l'une visait sur le fil de droite, l'autre sur le fil de gauche. Les cylindres étaient ensuite mis en mouvement en sens inverse, de sorte que, dans le même laps de temps, et sans plus de fatigues, on pouvait faire une double observation. On a réduit les durées totales de 1200 à 900 oscillations, et l'on a pris des amplitudes initiales moindres.

Par ces dispositions nouvelles, l'effet des variations de température et de toutes les causes d'erreur susceptibles d'affecter dans le même sens les deux fils, se trouvait éliminé.

Corrections à faire aux heures des passages. — Lorsqu'on a obtenu la durée d'un nombre considérable d'oscillations, avant d'en conclure la durée d'une oscillation simple, il faut appliquer aux heures des passages des corrections de deux sortes; les unes ont pour but de réduire les amplitudes finies au cas des amplitudes infiniment petites, les autres de réduire le mouvement elliptique au mouvement circulaire.

La formule

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (4)$$

ne convient rigoureusement qu'au cas des amplitudes infiniment petites. Dans le cas contraire, soient α l'angle maximum que fait le fil avec la verticale au moment où le mobile atteint l'extrémité du grand axe de sa trajectoire, β l'angle minimum du fil avec la verticale correspondant à l'extrémité du petit axe. On sait que l'expression de la durée moyenne de l'oscillation peut se développer en fonction symétrique de α et de β, sous la forme

$$2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+m\alpha^2+m\beta^2+n\alpha\beta+p\alpha^4+p\beta^4+q\alpha^3\beta+q\beta^3\alpha+r\alpha^2\beta^2+\ldots),$$

qui ne renferme que des termes d'ordre pair [*]; m, n, p étant des coefficients à déterminer.

Mais, en se bornant aux quantités du second ordre déjà très-petites, cette expression prendra la forme

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}(1+m\alpha^2+m\beta^2+n\alpha\beta),$$

et il sera facile de déterminer m et n, en remarquant :

1°. Que, dans le cas des oscillations planes, où $\beta = 0$, on a, par une formule connue,

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2\right),$$

d'où, par conséquent,

$$m = +\frac{1}{16};$$

2°. Que, dans le cas des oscillations circulaires, où $\beta = \alpha$, on a, par une formule tout aussi connue,

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1-\frac{1}{4}\alpha^2\right);$$

d'où

$$2m+n = -\frac{1}{4}, \quad n = -\frac{6}{16}.$$

---

[*] Les équations différentielles sont, en effet, symétriques en α et en β, et ne changent pas de valeurs quand on remplace α, β par $-\alpha$, $-\beta$. *Voyez*, entre autres, LAGRANGE, *Mécanique analytique*, édition de 1811, tome II, page 198.

Ainsi l'on doit avoir, dans le cas général [*],

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta}{16}\right). \tag{5}$$

Dans le cas actuel, où α et β différaient toujours très-peu entre eux, la quantité entre parenthèses, mise sous la forme

$$1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\left[1 - 2\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)^2\right],$$

pouvait sans erreur se réduire à

$$1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2,$$

du moins dans l'immense majorité des cas que j'ai eus à traiter.

On avait ainsi à diviser chaque durée d'oscillation par le facteur $1 - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2$. On pouvait alors se borner à appliquer à la durée de chaque centaine d'oscillations la correction additive

$$+ 100\, t\, \frac{R^2}{l^2},$$

R étant le rayon vecteur *moyen* de l'orbite pendant cette période; une petite Table, calculée d'avance en fonction de l'argument R, rendait ce calcul assez facile.

Si $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont les rayons moyens pendant la première période qui s'étend de l'heure H_0 à l'heure H_1, pendant la deuxième période qui s'étend de l'heure H_1 à l'heure H_2, etc., et pendant la $n^{ième}$ période qui s'étend de H_{n-1} à H_n, on éliminera l'effet des amplitudes si l'on applique à l'heure initiale

H_0 la correction négative $- 100\, t.\frac{R_1^2}{l^2} - 100\, t.\frac{R_2^2}{l^2} \ldots - 100\, t.\frac{R_n^2}{l^2} = -t.\Sigma\frac{R^2}{l^2}$,

H_1 la correction négative. . . . . $- 100\, t.\frac{R_2^2}{l^2} \ldots - 100\, t\, \frac{R_n^2}{l^2}$,

H_{n-1} la correction négative. . . . . $- 100\, t.\frac{R_n^2}{l^2}$,

H_n la correction négative. . . . . 0.

---

[*] Cette formule est une conséquence de la théorie de Lagrange, et, si Lagrange ne l'a point obtenue dans sa *Mécanique analytique*, 2[me] édition, tome II, page 204, c'est par suite d'une erreur de calcul que j'ai retrouvée et corrigée. (*Voyez* la Note à la fin de ce Mémoire.)

Pour réduire le mouvement elliptique au mouvement circulaire, il importe de se rappeler que les aires décrites autour du centre sont proportionnelles au temps; ainsi la vitesse angulaire de rotation n'est rigoureusement constante que dans le cas du mouvement circulaire. Si ce mouvement devient elliptique, il conviendra de considérer un pendule fictif animé d'un mouvement circulaire proportionnel au temps, et dont le rayon vecteur ne coïncidera avec celui du pendule vrai que dans les passages par le grand et le petit axe de l'ellipse. En dehors de ces quatre époques de coïncidence, pour chaque révolution du mobile, il se produit une anomalie que l'on calculera de la manière suivante :

Soient OA et OB (*fig.* 3) les deux axes de l'ellipse, que je représenterai par α et β; soit OR″ le rayon vecteur fixe qui, prolongé, vient aboutir au théodolite; soit h_v l'heure vraie à laquelle le mobile traverse ce rayon, allant, par exemple, de A en B, et comptée du passage en A; soit h_m l'heure à laquelle le mobile fictif le traverse à son tour, dans sa rotation uniforme dont la vitesse est $\frac{2\pi}{t}$; soient x, y les coordonnées de R″ rapportées aux axes OA et OB; on aura

$$x = \alpha \cos \frac{2\pi h_v}{t}, \quad y = \beta \sin \frac{2\pi h_v}{t},$$

$$\operatorname{tang} \mathrm{AOR}'' = \frac{\beta}{\alpha} \operatorname{tang} \frac{2\pi h_v}{t};$$

et, par une formule connue,

$$\frac{2\pi h_v}{t} = \mathrm{AOR}'' + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \sin 2\,\mathrm{AOR}'' + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \sin 4\,\mathrm{AOR}'' + \ldots,$$

et, en négligeant les termes en $\left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}\right)^3$,

$$\frac{2\pi h_v}{t} = \frac{2\pi h_m}{t} + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \sin 2\,\mathrm{AOR}'' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \cos 2\,\mathrm{AOR}''\right).$$

Donc

$$h_m - h_v = -\frac{t}{2\pi} \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \sin 2\,\mathrm{AOR}'' \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \cos 2\,\mathrm{AOR}''\right).$$

Telle est l'expression de la correction horaire due à l'ellipticité de l'orbite, α représentant la grandeur du demi-axe qui précède le passage, et β celle du demi-axe qui suit le passage.

Or on avait mesuré, par la méthode indiquée ci-dessus,

Le rayon vecteur $OR = R$, normal à OR'' et *précédant* OR'' *dans le sens de la rotation,*

Le rayon vecteur $OR' = R'$, faisant un angle de 45° avec OR'' et le précédant aussi,

Le rayon vecteur $OR'' = R''$,

Enfin le rayon vecteur $OR''' = R'''$, faisant un angle de 45° avec OR'' et venant après lui dans le sens du mouvement du pendule.

L'ellipse étant peu excentrique, on trouve facilement que l'on avait, à fort peu près,

$$\alpha + \beta = R + R'' = R' + R''',$$
$$(\alpha - \beta)\cos 2\,AOR'' = R'' - R,$$
$$(\alpha - \beta)\sin 2\,AOR'' = R' - R''';$$

de là résulte la valeur suivante de la correction d'ellipticité :

$$-\frac{t}{2\pi}\left(\frac{R' - R'''}{R + R''}\right)\left(1 + \frac{R'' - R}{R + R''}\right);$$

si l'on y remplace $1 + \frac{R'' - R}{R + R''}$ par $\frac{1}{1 + \frac{R - R''}{R + R''}}$, ce qui en trouble très-peu la valeur, elle devient égale à

$$\frac{t}{2\pi}\cdot\frac{R''' - R'}{2R};$$

telle est la correction, additive ou soustractive, selon que $R''' >$ ou $< R'$, qui a été appliquée à l'heure des passages.

Si, au lieu de noter le passage du pendule à travers le vertical OR'' du côté de OR'', on avait à le noter du côté opposé de l'orbite et sur le prolongement de OR'', il est clair que la correction conserverait sa valeur et son signe.

On peut se borner à appliquer cette correction à l'heure initiale ainsi qu'à l'heure finale; en les représentant par C_i et C_f, désignant par N le nombre des oscillations, il est clair qu'il faudra ajouter à la durée observée le terme $\frac{C_f - C_i}{N} = \Delta$.

La correction C_i est ordinairement très-faible et souvent négligeable, le mouvement initial étant toujours presque circulaire; mais il n'en est pas de même du terme C_f, qui parfois s'est élevé à près d'un dixième de seconde.

On peut comprendre dans la valeur de C_i le terme $-t\Sigma\frac{R^2}{l^2}$, qui représente la correction de l'heure initiale dépendant des amplitudes, et alors la quantité Δ, ainsi calculée, représentera d'une manière suffisamment exacte l'ensemble des deux corrections dépendant des amplitudes et de l'ellipticité.

Détermination de la durée la plus probable. — La méthode des moindres carrés, appliquée à ce cas, mène à un mode de calcul fort simple, qui ne diffère pas de celui que j'ai indiqué dans mon Mémoire : *Sur la mesure de l'intensité magnétique en divers points de la Suisse, de la Savoie, etc.* [*].

Je prendrai pour exemple l'une des séries du 16 mai :

OSCILLATIONS.	HEURES.	CORRECTIONS.	HEURES CORRIGÉES.
	h m s	s	h m s
0	3.10. 5,19	— 0,42	3.10. 4,77
100	3.20.45,29	— 0,34	3.20.44,95
200	3.31.25,31	— 0,28	3.31.25,03
300	3.42. 5,40	— 0,22	3.42. 5,18
400	3.52.45,48	— 0,17	3.52.45,31
500	4. 3.25,53	— 0,13	4. 3.25,40
600	4.14. 5,51	— 0,09	4.14. 5,42
700	4.24.45,60	— 0,05	4.24.45,55
800	4.35.25,69	— 0,03	4.35.25,66
900	4.46. 5,78	— 0,00	4.46. 5,78

La première colonne de ce tableau donne le numéro de l'oscillation, la deuxième l'heure correspondante, la troisième la réduction à l'amplitude infiniment petite calculée par la méthode indiquée ci-dessus, la dernière l'heure corrigée.

La combinaison 0,900 donne 6^s,40112 avec le poids 81,
celle 100,800 donne 6,40101 avec le poids 49,
celle 200,700 donne 6,40104 avec le poids 25,
celle 300,600 donne 6,40080 avec le poids 9,
celle 400,500 donne 6,40090 avec le poids 1.

[*] *Annales de Chimie et de Physique*, 3ᵉ série, tome XVIII.

Le poids étant proportionnel au carré des nombres d'oscillations, on trouve facilement pour la durée la plus probable,

$$6^s,40106,$$

durée à laquelle on devra ensuite appliquer la correction relative à l'ellipticité de l'orbite.

Toutes les observations ont été faites avec le chronomètre n° 310 de Winnerl; sa marche, parfaitement régulière, était une avance de $2^s,2$ en vingt-quatre heures; il retardait de quinze minutes en mai et de quatorze minutes en juin sur le temps moyen de Paris.

Je vais communiquer maintenant les résultats principaux des observations.

5 *mai* 1851. — Distance du point d'attache supérieur au centre du cylindre = 10 200 millimètres environ. Cette longueur n'a pas été exactement mesurée; mais on pourrait la déduire au besoin de la durée d'oscillation qui a été exactement déterminée :

Température de la salle (1^{re} série) = 10°,85,
Température de la salle (2^{me} série) = 10,75.
Rotation d'orient en occident = $6^s,39818$ (1^{re} série), 1200 oscillations,
Rotation d'occident en orient = 6,39896 (2^{me} série), 1200 oscillations.

Ces durées, corrigées de l'effet de l'ellipticité finale des orbites, deviennent :

Orient en occident = $6^s,39823$
Occident en orient = 6,39887
Valeur moyenne.. = 6,39855

9 *mai* 1851. — Vers le milieu de la deuxième série, le fil s'est dessoudé et la série a été interrompue; cette journée ne peut donc entrer en ligne de compte dans le résultat général.

Même longueur de fil à peu près :

Température de la salle (1^{re} série) = 11°,75,
Température de la salle (2^{me} série) = 11, 9.
Rotation d'occident en orient = $6^s,39910$ (1^{re} série), 1200 oscillations,
Rotation d'orient en occident = 6,39858 (2^{me} série), 400 oscillations.

Ces durées, corrigées de l'ellipticité de l'orbite, deviennent :

La première.........	$6^s,39902$
La deuxième........	$6,39864$
Valeur moyenne......	$6,39883$

11 *mai* 1851. — Le fil a été ressoudé; il a sensiblement conservé sa longueur.

Température de la salle (1^re série) $= 11°,87$,

Température de la salle (2^me série) $= 12,02$.

Rotation d'occident en orient $= 6^s,39935$ (1^re série), 1200 oscillations,

Rotation d'orient en occident $= 6,39839$ (2^me série), 1200 oscillations.

En corrigeant ces durées de l'effet de l'ellipticité de l'orbite, on a :

Occident en orient	$= 6^s,39925$
Orient en occident	$= 6.39849$
Valeur moyenne..	$= 6,39887$

A partir de ce jour, on a mesuré aussi exactement que possible les longueurs du fil.

La distance invariable du point S, à l'extrémité supérieure de la vis T, a été trouvée égale à $10036^{mm},5$ sous la température de 13 degrés, et sous la tension de $10^k,5$, égale à celle du poids du cylindre. Cette longueur, ainsi que celle du fil B, ont été mesurées sur le parquet de la salle de la Méridienne, avec un compas à verge de 4 décimètres, vérifié sur un mètre étalon de Lenoir, appartenant à l'École Polytechnique. En calculant les longueurs inscrites ci-après, on a supposé le nombre 10036,5 invariable, malgré les changements de température. Pour avoir les vraies longueurs, il faudra donc leur appliquer une correction dépendant des variations thermométriques de la salle.

16 *mai* 1851. — Longueur totale depuis le point d'attache jusqu'au centre de gravité du cylindre $= 10187^{mm},1$:

Température de la salle (1^re série) $= 12°,15$,

Température de la salle (2^me série) $= 12,\ 3$.

Rotation d'occident en orient... durée $= 6^s,39816$ (1^re série), 900 oscillations,

Rotation d'orient en occident... durée $= 6,39752$ (2^me série), 800 oscillations.

En corrigeant les durées des effets de l'ellipticité, on trouve :

$$\begin{aligned}\text{Occident en orient} &= 6^s{,}39815\\ \text{Orient en occident} &= 6{,}39751\\ \hline \text{Valeur moyenne..} &= 6{,}39783\end{aligned}$$

18 *mai* 1851. — Longueur totale du point d'attache supérieur au centre du cylindre $= 10190^{mm}{,}7$:

Température de la salle (1^re^ série) $= 13^{\circ}{,}05$,
Température de la salle (2^me^ série) $= 13{,}00$.
Rotation d'orient en occident... durée $= 6^s{,}39864$ (1^re^ série), 900 oscillations,
Rotation d'occident en orient... durée $= 6{,}39960$ (2^me^ série), 800 oscillations.

En corrigeant ces nombres des effets de l'ellipticité de l'orbite, on trouve :

$$\begin{aligned}\text{Orient en occident} &= 6^s{,}39863\\ \text{Occident en orient} &= 6{,}39959\\ \hline \text{Valeur moyenne..} &= 6{,}39911\end{aligned}$$

OBSERVATIONS FAITES AVEC LE FIL B.

Ce fil a été mis en place à côté du fil A le 14 mai, et du côté de l'orient. La distance invariable du point S (*fig.* 1), à l'extrémité supérieure de la tête de la vis T, a été trouvée égale à 10042 millimètres, sous la tension $10^k{,}500$ et par une température de $11^{\circ}{,}9$. En calculant les longueurs inscrites ci-après, on n'a tenu compte que de la variation de la distance du point T au centre du cylindre, mais non des changements de température, et l'on a supposé la longueur 10042 invariable. Pour avoir les véritables longueurs, il faudra donc leur appliquer une correction dépendant de la température.

16 *mai* 1851. — Longueur totale depuis le point d'attache supérieur jusqu'au centre de gravité du cylindre $= 10196^{mm}{,}2$:

Température de la salle (1^re^ série) $= 12^{\circ}{,}15$,
Température de la salle (2^me^ série) $= 12{,}3$.
Rotation d'orient en occident... durée $= 6^s{,}40037$ (1^re^ série), 800 oscillations,
Rotation d'occident en orient... durée $= 6{,}40106$ (2^me^ série), 900 oscillations.

En corrigeant ces durées de l'effet de l'ellipticité, on trouve :

Orient en occident $= 6^s,40032$
Occident en orient $= 6,40106$
Valeur moyenne.. $= 6,40069$

18 *mai* 1851. — Longueur totale jusqu'au centre du cylindre $= 10196^{mm},2$:

Température de la salle (1re série) $= 13°,05$,
Température de la salle (2^{me} série) $= 13,00$.
Rotation d'occident en orient... durée $= 6^s,40116$ (1re série), 800 oscillations,
Rotation d'orient en occident... durée $= 6,40051$ (2^{me} série), 900 oscillations.

Les mêmes durées étant corrigées de l'effet de l'ellipticité, on a :

Occident en orient $= 6^s,40116$
Orient en occident $= 6,40044$
Durée moyenne... $= 6,40080$

A partir du 20 mai, d'autres observations ont été faites par la méthode des coïncidences dont je parlerai bientôt; mais comme on a continué à noter les époques des oscillations sur le fil B, on peut aussi se servir de ces observations pour déterminer l'effet de la Terre. On doit seulement remarquer que la précision des lectures était alors notablement moindre, attendu que chacune d'elles correspondait à un seul passage du fil, et non à la moyenne de cinq passages successifs. Voici les nombres que l'on a obtenus :

25 *mai* 1851. — Longueur totale jusqu'au centre du cylindre $= 10216^{mm},2$:

Température de la salle (1re série) $= 14°,05$,
Température de la salle (2^{me} série) $= 14,15$.
Rotation d'orient en occident... durée $= 6^s,40685$ (1re série), 880 oscillations,
Rotation d'occident en orient... durée $= 6,40741$ (2^{me} série), 820 oscillations.

Les mêmes durées étant corrigées des effets de l'ellipticité, on a obtenu :

Orient en occident $= 6^s,40684$
Occident en orient $= 6,40741$
Durée moyenne... $= 6,40712,5$

10 *juin* 1851 [*]. — Longueur totale jusqu'au centre du cylindre $= 10216^{mm},2$:

Température de la salle (1re série) $= 16^{o},85$,

Température de la salle (2me série) $= 16,\ 7$.

Rotation d'orient en occident... durée $= 6^{s},40683$ (1re série), 870 oscillations,

Rotation d'occident en orient... durée $= 6,40768$ (2me série), 830 oscillations.

Les mêmes durées étant corrigées des effets de l'ellipticité, on a eu :

Orient en occident $= 6^{s},40674$

Occident en orient $= 6,40768$

Durée moyenne... $= 6,40721$

En comparant ces nombres entiers, il convient de réduire les valeurs des durées à la longueur invariable 10200 millimètres et à la température de $12^{o},5$. On trouve alors le tableau suivant :

	FIL A.			
	5 MAI.	11 MAI.	16 MAI.	18 MAI.
Occident en orient... ...	»	»	$6^{s},40221$	$6^{s},40247$
Orient en occident.......	»	»	6, 40157	6, 40151
Durée moyenne.	»	»	6, 40189	6, 40199
Différence..............	$0^{s},00064$	$0^{s},00076$	0, 00064	0, 00096
	FIL B.			
	16 MAI.	18 MAI.	25 MAI.	10 JUIN.
Occident en orient.	$6^{s},40226$	$6^{s},40231$	$6^{s},40227$	$6^{s},40245$
Orient en occident	6, 40152	6, 40159	6, 40170	6, 40151
Durée moyenne	6, 40189	6, 40195	6, 40198	6, 40198
Différence.	0, 00074	0, 00072	0, 00057	0, 00094

[*] M. Laugier a bien voulu me prêter son concours, aussi éclairé que bienveillant, dans les observations de cette journée.

Il faut remarquer que les durées $0^s,0057$ et $0^s,0094$ proviennent des observations moins précises des 25 mai et 10 juin.

On peut adopter, pour la valeur moyenne des durées d'oscillations, le nombre $6^s,40194$.

Les nombres de ce tableau peuvent donner une idée suffisamment exacte du degré de précision que l'on obtient par ce mode d'expérimentation.

Pour comparer ces résultats avec la théorie, il faut déduire la valeur de $t_w - t_e$ de la formule (1), mise sous la forme

$$t_w - t_e = \frac{2\, t_e\, t_w . \sin\lambda}{T}.$$

Posant

$$\lambda = 48^\circ\, 50'\, 13'', \quad T = 86164^s, \quad t_e\, t_w = (6^s,402)^2,$$

on trouve

$$t_w - t_e = 0^s,0007162.$$

La moyenne des quatre observations faites avec le fil A, et des deux premières observations faites avec le fil B, donne

$$t_w - t_e = 0^s,000743.$$

L'accord de ce nombre avec le précédent est aussi parfait qu'on puisse le désirer, eu égard à la précision des observations et à l'accord des divers nombres avec leur moyenne.

On conclut facilement de ce qui précède que la durée de l'oscillation du pendule simple de longueur l, se mouvant coniquement, doit être représentée par

$$t_w = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{4\pi^2 l}{g}\frac{\sin\lambda}{T} \quad \text{si le mouvement a lieu d'occident en orient,}$$

$$t_e = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} - \frac{4\pi^2 l}{g}\frac{\sin\lambda}{T} \quad \text{si le mouvement a lieu d'orient en occident.}$$

OBSERVATIONS PAR LA MÉTHODE DES COÏNCIDENCES.

Quoique la méthode précédente suffise pour mettre hors de doute la nécessité de tenir compte de la rotation terrestre, dans l'expression de la rotation du pendule, elle ne suffit pas pour décider la question de savoir si le retard ou l'accélération dans la rotation sont rigoureusement représentés par la théorie, ou si quelque cause perturbatrice est venue altérer quantitativement le phénomène fondameuial. Pour pouvoir apprécier ce dernier effet, une méthode plus précise était nécessaire.

Je dus renoncer à observer les coïncidences de deux pendules d'égale longueur, tournant en sens inverse, attendu que les périodes qui ramènent ces coïncidences auraient été beaucoup trop longues. Cette difficulté fut surmontée en prenant deux pendules dont les fils A, B différaient suffisamment en longueur pour qu'on pût observer, par exemple, quatre ou cinq coïncidences dans une période d'une heure ou une heure et demie. La *fig.* 1 représente l'installation donnée à nos appareils pour pouvoir observer les coïncidences.

Sur l'ancienne traverse Q, qui a servi à la suspension des fils dans mes premières expériences, je plaçai en équerre une deuxième poutre PP' en chêne, dont la longueur, dirigée du nord au sud, était de 770 millimètres, la hauteur 160 millimètres, la largeur 100 millimètres.

A son extrémité boréale fut suspendu le fil A, dont la partie flexible fut réduite à $9991^{mm},3$ de longueur; je l'appellerai désormais le fil A': une rallonge AA' abaissait d'environ 1 décimètre le point d'attache S du fil. A l'extrémité australe fut placé le fil B, dont la longueur, non compris les parties engagées en S et *s*, était égale à $10035^{mm},2$.

La vis VT, qui terminait le fil A', pénétrait dans l'intérieur du cylindre C d'environ 50 millimètres de plus que ne le faisait la vis analogue qui terminait le fil B, comme le montre la *fig.* 1. Les deux cylindres se trouvaient aussi sensiblement à la même hauteur au-dessus du parquet, et le mouvement d'horlogerie M pouvait facilement être transporté de l'un à l'autre, pour leur imprimer la rotation unique.

La distance horizontale qui séparait les fils était égale à 705 millimètres.

La distance du point d'attache au centre de gravité du cylindre était de $10216^{mm},2$ pour le pendule long (fil B), et de $10115^{mm},5$ pour le pendule court (fil A').

Le fil A, *fig.* 1 et 2 (ancien fil occidental), fut placé au nord, et le fil B (ancien fil oriental) fut placé au sud. De la suspension supérieure au centre du cylindre, on avait :

Pour le fil A..... $10115^{mm},5$,

Pour le fil B..... $10216^{mm},2$.

L'écartement des deux fils l'un de l'autre,

$$AS' \ (\textit{fig. } 1) \quad \text{ou} \quad AB \ (\textit{fig. } 2) = 705 \text{ millimètres.}$$

Alors, si A' et B étaient mis en mouvement simultané, l'un dans la direction d'orient en occident, l'autre dans la direction d'occident en orient, et si, après l'observation des coïncidences, on recommençait en renversant les sens des deux mouvements, la durée des périodes qui ramenaient les coïncidences ne devait plus être la même, et ainsi l'effet de la rotation terrestre devait être mis facilement en évidence.

Soient A (*fig.* 2) le centre du cercle décrit par le pendule attaché à l'extrémité du fil A'; B le centre du cercle que décrit en sens inverse le pendule attaché à l'extrémité du fil B. Dans le plan vertical ABθ, qui contient les deux fils suspenseurs dans leur position de repos, plaçons un théodolite θ, dont l'axe optique sera exactement dirigé sur les fils A', B, lesquels paraîtront se recouvrir exactement.

Lorsque les pendules traverseront simultanément le plan vertical AB, A' arrivant en a lorsque B arrive en b, les deux fils traverseront ensemble le champ de la lunette et passeront ensemble par le fil vertical du réticule; une demi-oscillation après, le fil A' sera en a' et le fil B en b', de sorte que les fils mobiles traverseront de nouveau le milieu du champ, mais suivant une direction inverse de la précédente. On dit alors qu'il y a *coïncidence*. L'inégalité des rotations détruit bientôt ces coïncidences, et, au bout de quelque temps, le pendule le plus rapide gagne une demi-oscillation, soit 180 degrés, sur le pendule le moins rapide; A' arrivant en a, B arrive en b', alors les deux fils mobiles traversent en même temps le milieu du champ, et paraissent marcher à la rencontre l'un de l'autre : on dit alors qu'il y a *croisement*. Lorsque le pendule le plus rapide vient à gagner sur l'autre une deuxième demi-oscillation, la coïncidence se rétablit, puis un second croisement, et ainsi de suite.

Il convient, pour mieux juger soit des coïncidences, soit des croisements, de placer sur le diaphragme focal un réticule à cinq fils verticaux équidistants, d'adapter le tirage de la lunette du théodolite à la vision distincte d'un objet placé en C, au milieu de la distance AB, afin que les images des deux fils soient sensiblement pareilles ; enfin, la perception des fils mobiles aura toute la netteté désirable, s'ils se projettent sur le fond éclairé du ciel.

Avec les valeurs

AB = $0^m,705$,
Cθ = $13^m,6$, dans la direction du sud par rapport aux fils,
Diamètre de l'objectif.............. = $0^m,034$,
Distance focale principale de l'objectif. = $0^m,400$,
Pour $13^m,6$ de distance........... = $0^m,413$;

ces images, vues sur le fond du ciel, à travers la grande fenêtre nord de la salle de la Méridienne, offraient tout le degré de netteté désirable.

Le résultat de ces observations de coïncidences et de croisements consiste, en définitive, en ce que l'on reconnaît qu'au bout de n oscillations du pendule long, le pendule court, dont l'oscillation est la plus rapide, a gagné précisément une oscillation; de sorte que n fois la durée d'oscillation du premier égale $n+1$ fois la durée d'oscillation du second. Mais, après avoir déterminé ainsi la valeur des nombres n et $n+1$, il convient, pour plus de symétrie dans les formules, de considérer la somme de ces deux nombres que je nommerai s; ce nombre peut être fractionnaire, le retour des coïncidences n'ayant pas nécessairement lieu au bout d'un nombre entier d'oscillations : alors $\frac{s-1}{2}$ oscillations du pendule long équivaudront à $\frac{s+1}{2}$ du pendule court.

Soient t, t_w, t_e les durées d'oscillation du pendule long oscillant rectilignement, coniquement de l'ouest à l'est, coniquement de l'est à l'ouest; soient de même t', t'_w, t'_e les mêmes durées pour le pendule court.

La comparaison de t_w avec t'_e donnera l'équation

$$\frac{s-1}{2}\,t_w = \frac{s+1}{2}\,t'_e;$$

d'où, à cause des équations (1), (2), en posant, pour abréger,

$$(6) \qquad \frac{\sin\lambda}{T} = \alpha,$$

on tire

$$(7)\qquad \left(\frac{1}{t}-\alpha\right)(s+1)=\left(\frac{1}{t'}+\alpha\right)(s-1).$$

Si maintenant l'on fait tourner les pendules en sens inverse, les deux durées se rapprocheront, les coïncidences reviendront à des intervalles plus éloignés; et si l'on nomme S la somme des deux nombres d'oscillations qui ramènent une coïncidence, on aura

$$(8)\qquad \left(\frac{1}{t}+\alpha\right)(S+1)=\left(\frac{1}{t'}-\alpha\right)(S-1).$$

Des équations (7) et (8) on tire

$$(9)\qquad \frac{\alpha}{S-s}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t'}-\frac{1}{t}\right)}{S+s}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right)}{2Ss}=\frac{\frac{1}{t'}}{2Ss+S+s}=\frac{\frac{1}{t}}{2Ss-S-s}.$$

L'équation (9) montre que l'on a

$$t\left(\frac{2Ss}{S+s}-1\right)=t'\left(\frac{2Ss}{S+s}+1\right),$$

et si l'on pose

$$(10)\qquad \frac{Ss}{\frac{1}{2}(S+s)}=\Sigma,$$

on aura

$$(11)\qquad \left(\frac{\Sigma-1}{2}\right)t=\left(\frac{\Sigma+1}{2}\right)t',$$

de sorte que Σ est la somme des deux nombres d'oscillation qui amèneraient une coïncidence entre les deux pendules débarrassés de l'effet de la rotation de la Terre.

On conclut de l'équation (10), que :

« Si, dans l'observation des coïncidences de deux pendules, la vi-
» tesse de rotation est altérée d'une part en plus et de l'autre en
» moins, d'une même quantité, et si l'altération se produit ensuite en
» sens inverse, la somme Σ des oscillations des deux pendules qui
» ramènerait les coïncidences, l'altération venant à cesser d'avoir
» lieu, est égale au carré de la moyenne géométrique des sommes
» d'oscillation correspondant aux deux genres d'altération divisé
» par leur moyenne arithmétique. »

Des équations (9) et (10) on tire

$$(12) \qquad \alpha = \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{\Sigma - 1}\cdot\frac{S-s}{S+s} = \frac{1}{t'}\cdot\frac{1}{\Sigma+1}\cdot\frac{S-s}{S+s}.$$

Avec cette valeur de α, on trouve les équations suivantes :

$$(13) \quad \begin{cases} t_w = \dfrac{t(S+s)(\Sigma-1)}{(S+s)(\Sigma-1)-(S-s)}, & t'_w = \dfrac{t'(S+s)(\Sigma+1)}{(S+s)(\Sigma+1)-(S-s)}, \\ t_e = \dfrac{t(S+s)(\Sigma-1)}{(S+s)(\Sigma-1)+(S-s)}, & t'_e = \dfrac{t'(S+s)(\Sigma+1)}{(S+s)(\Sigma+1)+(S-s)}. \end{cases}$$

Ainsi, quoique les équations (7) et (8) ne suffisent pas pour déterminer les trois inconnues t, t', α, on voit, par les équations (12) et (13), que la connaissance de l'une des six quantités t, t', t_e, t_w, t'_e, t'_w suffira pour que le problème soit complétement résolu.

Dans les observations de coïncidence qui ont été faites par cette méthode, on a toujours déterminé simultanément les valeurs t_e et t_w; on en a conclu la durée t à très-peu près égale à $\frac{t_e+t_w}{2}$: substituant cette valeur de t dans les équations

$$(14) \qquad \alpha = \frac{S-s}{t(S+s)(\Sigma-1)},$$

$$(15) \qquad t_w - t_e = \frac{2t(S+s)(\Sigma-1)(S-s)}{(S+s)^2(\Sigma-1)^2-(S-s)^2},$$

on a pu déterminer α et comparer le nombre $t_w - t_e$ conclu de l'observation par la formule (15), avec le nombre théorique

$$\frac{2\,t_e\,t_w \sin\lambda}{T}.$$

En général, $(S-s)^2$ étant excessivement petit par rapport à $(S+s)^2(\Sigma-1)^2$, on peut, sans erreur appréciable, mettre l'équation (15) sous la forme

$$(16) \qquad t_w - t_e = \frac{2t(S-s)}{(S+s)(\Sigma-1)} = \frac{t(S-s)}{Ss-\frac{1}{2}(S+s)}.$$

On aurait de même

$$(17) \qquad t'_w - t'_e = \frac{2t'(S-s)}{(S+s)(\Sigma+1)}.$$

On peut aussi exprimer α en fonction de $t+t'$, et l'on trouve alors facilement

$$\alpha = \frac{(S-s)4Ss}{(t+t')[4S^2s^2-(S+s)^2]} = \frac{2\Sigma(S-s)}{(t+t')(\Sigma^2-1)(S+s)},$$

et, si l'on néglige 1 devant Σ^2, ce qui est permis, vu le degré de précision auquel on peut espérer obtenir α, on aura très-simplement,

$$(17)\qquad \alpha = \frac{1}{t+t'}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right),$$

$$(18)\qquad \begin{cases} t_w - t_e = 2t^2\alpha = \dfrac{2t^2}{t+t'}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{S}\right), \\ t'_w - t'_e = 2t'^2\alpha = \dfrac{2t'^2}{t+t'}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{S}\right). \end{cases}$$

Corrections pour les amplitudes et pour l'ellipticité de l'orbite. — En vertu de l'accélération de vitesse due aux amplitudes, et de la variation de forme ou de position des orbites elliptiques, les durées de rotation sont altérées dans chaque mouvement; à la somme des durées observées depuis l'observation initiale jusqu'à l'observation finale, dans un temps de N oscillations, on doit ajouter le terme (*voyez* ci-dessus, p. 14)

$$C_f - C_i + t\Sigma\frac{R^2}{l^2},$$

et, en admettant que l'altération se soit faite d'une maniere proportionnelle au temps, on a à ajouter aux durées t_w, t_e, t'_w, t'_e, des corrections que je représenterai par Δ_w, Δ_e, Δ'_w, Δ'_e, et dont le calcul s'opérera par la formule générale

$$\frac{1}{N}\left(C_f - C_i + t\Sigma\frac{R^2}{l^2}\right).$$

Ainsi les durées observées, au lieu d'être égales aux durées théoriques, auront pour valeur

$$t_w - \Delta_w,\quad t_e - \Delta_e,\quad t'_w - \Delta'_w,\quad t'_e - \Delta'_e.$$

Pour savoir comment ces altérations troublent le retour des coïncidences, reprenons la formule

$$(s-1)\,t_w = (s+1)\,t'_e,$$

où s représente la somme des oscillations qui ramèneraient les coïncidences dans des pendules à oscillations rigoureusement circulaires et infiniment petites. Faisons varier de quantités très-petites s, t_w et t'_e, et nommons Δ_s, Δ_w, Δ'_e les variations de s, t_w, t'_e.

Avant de différentier l'équation précédente, il convient de la mettre sous la forme

$$\log \frac{s+1}{s-1} = \log t_w - \log t'_e\,;$$

on trouve alors

$$-\frac{2\Delta_s}{s^2-1} = \frac{\Delta_w}{t_w} - \frac{\Delta'_e}{t'_e},$$

et, négligeant 1 devant s^2,

$$\Delta\frac{1}{s} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_w}{t_w} - \frac{\Delta'_e}{t'_e}\right).$$

On trouverait de même

$$\Delta\frac{1}{S} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_e}{t_e} - \frac{\Delta'_w}{t'_w}\right),$$

et, par suite,

$$(19)\qquad \Delta\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta_w}{t_w} + \frac{\Delta'_w}{t'_w} - \frac{\Delta_e}{t_e} - \frac{\Delta'_e}{t'_e}\right).$$

Telle est la correction qu'il faut introduire dans le second membre de l'équation (17), pour avoir la véritable valeur de α.

Avec une approximation moindre que celle de l'équation (19), mais qui sera habituellement suffisante, on aura

$$\Delta\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right) = \frac{\Delta_w + \Delta'_w - \Delta_e - \Delta'_e}{t+t'},$$

et substituant cette valeur dans celle de α, on trouvera

$$(20)\qquad \alpha = \frac{1}{t+t'}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{S}\right) + \frac{1}{(t+t')^2}(\Delta_w + \Delta'_w - \Delta_e - \Delta'_e).$$

Portant cette valeur en

$$t_w - t_e = 2t^2\alpha,$$

et remplaçant $\frac{2t}{t+t'}$ par $\frac{S+s+2}{S+s}$, on obtient la formule définitive

$$(21)\qquad \left\{\begin{aligned} t_w - t_e = {} & \frac{t_w + t_e}{2}\cdot\frac{(S+s+2)(S-s)}{(S+s)Ss} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{S+s+2}{S+s}\right)^2\cdot(\Delta_w + \Delta'_w - \Delta_e - \Delta'_e), \end{aligned}\right.$$

laquelle m'a servi à calculer l'excès $t_w - t_e$.

Voici le tableau des observations qui ont été faites avec cet appareil.

Tableau des observations faites pour déterminer l'effet de la rotation terrestre sur le pendule conique par la méthode des coïncidences.

Observations du 23 Mai 1851.			Observations du 25 Mai 1851.			Observations du 10 Juin 1851.		
NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule,		NATURE de l'observation.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule,		NATURE de l'observation.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule,		NATURE de l'observation.
long B.	court A'.		long B.	court A'.		long B.	court A'.	
1$^{\text{re}}$ série, mesure de s.			1$^{\text{re}}$ série, mesure de s.			1$^{\text{re}}$ série, mesure de s.		
0,0	0,0	coïncidence.	0,0	0,0	croisement.	0,8	0,8	coïncidence.
103,0	103,5	croisement.	104,3	104,8	coïncidence.	106,2	106,7	croisement.
207,5	208,5	coïncidence.	207,7	208,7	croisement.	206,8	207,8	coïncidence.
310,0	311,5	croisement.	312,5	314,0	coïncidence.	312,5	314,0	croisement.
415,4	417,4	coïncidence.	416,1	418,1	croisement.	413,0	415,0	coïncidence.
518,0	520,5	croisement.	520,6	523,1	coïncidence.	518,6	521,1	croisement.
624,1	627,1	coïncidence.	623,6	626,6	croisement.	619,8	622,8	coïncidence.
»	»	»	728,5	732,0	coïncidence.	724,7	728,2	croisement.
»	»	»	830,8	834,8	croisement.	826,2	830,2	coïncidence.
207,86 (p$^{\text{le}}$ long) = 208,86 (p$^{\text{le}}$ court)			207,86 (p$^{\text{le}}$ long) = 208,86 (p$^{\text{le}}$ court)			206,31 (p$^{\text{le}}$ long) = 207,31 (p$^{\text{le}}$ court)		
$s = 416,72$			$s = 416,72$			$s = 413,62$		
2$^{\text{e}}$ série, mesure de S.			2$^{\text{e}}$ série, mesure de S.			2$^{\text{e}}$ série, mesure de S.		
0,0	0,0	croisement.	0,7	0,7	croisement.	0,3	0,3	croisement.
112,3	112,8	coïncidence.	109,3	109,8	coïncidence.	105,9	106,4	coïncidence.
219,6	220,6	croisement.	218,8	219,8	croisement.	215,0	216,0	croisement.
329,2	330,7	coïncidence.	327,7	329,2	coïncidence.	321,3	322,8	coïncidence.
436,6	438,6	croisement.	435,5	437,5	croisement.	429,0	431,0	croisement.
»	»	»	545,7	548,2	coïncidence.	537,4	539,9	coïncidence.
»	»	»	654,1	657,1	croisement.	648,0	651,0	croisement.
»	»	»	764,0	767,5	coïncidence.	753,5	757,0	coïncidence.
»	»	»	871,3	875,3	croisement.	863,5	867,5	croisement.
218,015 (p$^{\text{le}}$ long) = 219,015 (p$^{\text{le}}$ court)			217,82 (p$^{\text{le}}$ long) = 218,82 (p$^{\text{le}}$ court)			215,965 (p$^{\text{le}}$ long) = 216,965 (p$^{\text{le}}$ court)		
S = 437,03			S = 436,64			S = 432,93		

Les valeurs moyennes des nombres n et $n+1$, qui servent à calculer s et S, ont été déduites des nombres de ce tableau, en comparant les intervalles des coïncidences entre elles, celle des croisements entre eux, et tenant compte, dans la moyenne générale, des différences de poids provenant des différences d'intervalles. Il peut arriver que l'époque d'un croisement ne tombe pas exactement au milieu de l'intervalle qui sépare les coïncidences; cela indique que l'axe optique de la lunette ne passait pas exactement par l'axe de rotation de l'un des deux fils : cette circonstance peut altérer un peu la durée de l'intervalle pour les coïncidences, à cause de la diminution des amplitudes; mais elle agit en sens inverse sur les croisements, de sorte que l'erreur résultante est très-sensiblement nulle. Lorsque la centralité de l'axe optique de la lunette, par rapport aux deux cônes décrits par les fils, a été convenablement réglée, cette petite anomalie a disparu.

Pour pouvoir déterminer la valeur de $t_w - t_e$, qui est l'inconnue principale de la question, il a fallu mesurer, au moins d'une manière approchée, les valeurs de t_w, t_e; on aurait pu le faire par des expériences préliminaires, mais on a préféré faire cette détermination simultanément à l'observation de s et de S; on trouvera ces valeurs, ainsi que celles de Δ_w, Δ'_w, Δ_e. Δ'_e, qui servent à corriger la valeur de $t_w - t_e$, dans le tableau suivant :

Tableau des éléments numériques servant à calculer $t_w - t_e$.

	23 MAI.	25 MAI.	10 JUIN.
s	416,72	416,72	413,62
S	437,03	436,64	432,93
t_w	6s,40744	6s,40741	6s,40768
t_e	6,4069?	6,40685	6,40683
Δ_w	+ 0,000173	+ 0,000326	+ 0,000315
Δ'_w	+ 0,000317	+ 0,000289	+ 0,000362
Δ_e	+ 0,00252?	+ 0,000294	+ 0,000250
Δ'_e	+ 0,00112?	+ 0,000277	+ 0,000390
$t_w - t_e$	0,000716	0,000703	0,000693
Idem corrigé . .	0,000779	0,000725	0,000710

On remarquera que, dans la série du 23 mai, les corrections Δ_e et Δ'_e sont très-incertaines, l'ellipticité correspondante n'ayant pas été observée et ayant dû se déduire d'observations analogues, et, de plus, les amplitudes entrant dans la correction Δ_e n'ayant pas été notées. L'erreur résultante peut altérer le second chiffre significatif de la valeur de $t_w - t_e$ d'une manière considérable. Si l'on rejette cette observation, on trouvera pour la moyenne générale,

$$t_w - t_e = 0{,}000717, \tag{22}$$

valeur qui coïncide parfaitement avec le nombre théorique.

Le procédé actuel est évidemment beaucoup plus précis que l'ancien, et la comparaison des résultats partiels avec les moyennes m'a démontré que l'erreur moyenne de passage est environ quatre fois moindre dans cette méthode; de sorte que le poids de l'observation serait ici seize fois plus grand, si là se trouvait la seule cause d'erreur de ce genre d'observations. Il est d'ailleurs évident que, si l'on veut tirer de cette méthode tout le parti possible, ce n'est pas en améliorant le mode d'observation des coïncidences que l'on y parviendra, mais bien plutôt en s'attachant à mesurer avec plus de précision que je ne l'ai fait, soit la valeur des amplitudes, soit la mesure de l'ellipticité de l'orbite. Il serait convenable que ces mesures pussent être prises, autant que possible, sans s'approcher des mobiles; car j'ai observé que les périodes de retour des coïncidences sont plus régulières si l'on évite de venir auprès d'eux.

J'ai voulu savoir si la présence du fer dans le corps oscillant pouvait modifier les résultats obtenus; en conséquence j'ai substitué au cylindre en cuivre un cylindre en fer placé à l'extrémité du fil le plus long. Le tableau suivant offre les résultats des deux observations faites dans ces conditions. Le nouveau cylindre en fer avait la même forme que le cylindre en cuivre, et on le remplissait de mercure; son poids total, 10500 grammes, différait à peine du poids de l'ancien cylindre.

Tableau des observations faites pour déterminer l'effet de la rotation terrestre, sur un pendule conique armé d'un cylindre de fer, par la méthode des coïncidences.

NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule, long.	court.	NATURE de l'observation.	NUMÉRO D'ORDRE des oscillations du pendule, long.	court.	NATURE de l'observation.	ÉLÉMENTS NUMÉRIQUES servant à calculer $t_w - t_e$.	
24 juin, 1re série, mesure de s.			24 juin, 2e série, mesure de S.			24 juin.	
0,5	0,5	croisement.	0,8	0,8	coïncidence.	s	409,70
103,7	104,2	coïncidence.	107,0	107,5	croisement.	S	426,66
204,3	205,3	croisement.	214,0	215,0	coïncidence.	t_w	6,40822
308,0	309,5	coïncidence.	319,2	320,7	croisement.	t_e	6,40718
409,2	411,2	croisement.	426,8	428,8	coïncidence.	Δ_w	+ 0s,000328
512,0	514,5	coïncidence.	532,5	535,0	croisement.	Δ'_w	+ 0,000359
613,5	616,5	croisement.	639,4	642,4	coïncidence.	Δ_e	+ 0,000309
716,5	720,0	coïncidence.	»	»	»	Δ'_e	+ 0,000271
818,0	822,0	croisement.	»	»	»	$t_w - t_e$	0s,000623
204,35 (ple long) = 205,35 (ple court)			212,83 (ple long) = 213,83 (ple court)			Id. corrigé.	0,000677
$s = 409,70$			S = 426,66				
7 juillet, 1re série, mesure de s.			7 juillet, 2e série, mesure de S.			7 juillet.	
0,6	0,6	croisement.	0,9	0,9	coïncidence.	s	408,74
103,2	103,7	coïncidence.	105,4	105,9	croisement.	S	426,96
204,6	205,6	croisement.	213,7	214,7	coïncidence.	t_w	6,40825
307,6	309,1	coïncidence.	318,7	320,2	croisement.	t_e	6,40786
408,2	410,2	croisement.	426,7	428,7	coïncidence.	Δ_w	0s,000322
511,3	513,8	coïncidence.	532,1	534,6	croisement.	Δ'_w	0,000299
612,5	615,5	croisement.	639,9	642,9	coïncidence.	Δ_e	0,000233
715,8	719,3	coïncidence.	744,5	748,0	croisement.	Δ'_e	0,000277
815,3	819,3	croisement.	852,5	856,5	coïncidence.	$t_w - t_e$	0s,000671
203,87 (ple long) = 204,87 (ple court)			212,98 (ple long) = 213,98 (ple court)			Id. corrigé.	0,000727
$s = 408,74$			S = 426,96			Moyenne...	0s,000702

Ces observations donnent sensiblement le même résultat que les précédentes, et quant à l'écart qu'offre l'observation du 24 juin, on remarquera que, dans l'intervalle de temps écoulé entre la fin de la première série et le commencement de la deuxième, le cylindre en fer du long pendule a reçu un choc oblique qui a fortement tordu le fil, et qui a pu faire remonter le cylindre le long de l'écrou de la vis T, et diminuer ainsi la longueur de la suspension d'une très-petite fraction de millimètres. Il suffit d'admettre que la durée t_e a été ainsi diminuée de $0^s,00008$, soit de $\frac{1}{80000}$ de sa valeur absolue, ce qui correspond à une variation d'un quart de millimètre, dans la hauteur du cylindre, pour expliquer la différence observée.

Le cylindre en fer, vide, pesait 890 grammes, et était, par conséquent, bien plus lourd que le fil suspenseur, dont le poids n'était que de 65 grammes.

On peut conclure de là que la présence du fer ne paraît pas modifier d'une manière sensible le phénomène observé.

Si l'on divise par $2t^2$ les valeurs 0,000743 et 0,000717 que nous avons obtenues pour $t_w - t_e$, on aura la valeur de la constante α, ou de $\frac{\sin\lambda}{T}$. On trouve ainsi

$$\alpha = 0,00000906,\ \text{méthode directe,}$$
$$\alpha = 0,00000874,\ \text{méthode des coïncidences;}$$

et, en donnant à ce dernier nombre un poids trois fois plus considérable qu'au premier, ce qui ne paraîtra pas exagéré, on aura

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \alpha &= 0,00000882,\\ 2\pi\alpha &= 0,0000554. \end{aligned}\right.$$

Ce dernier nombre exprime de combien la vitesse angulaire d'un pendule à oscillations coniques est altérée, à l'Observatoire de Paris, en plus ou en moins, par la rotation terrestre, pendant une seconde de temps, et, si on le multiplie par le nombre de secondes contenues dans l'arc égal au rayon, on trouvera

$$(24)\qquad 2\pi\alpha = 11'',43.$$

Il résulte donc de l'ensemble de ces observations que, pour des pendules de 10 mètres de longueur, tournant coniquement d'occident en orient, la vitesse angulaire de rotation est retardée, à Paris, à raison de $11'',4$ par seconde, et qu'elle est augmentée de la même quantité lorsque la rotation s'effectue d'orient en occident.

DÉTERMINATION DE LA LONGUEUR DU PENDULE A SECONDES PAR LES OSCILLATIONS CONIQUES.

Les observations précédentes peuvent servir à la détermination de la longueur du pendule à secondes que je nommerai λ, au moyen de la longueur l du pendule et de la durée t de l'oscillation. Nous avons vu, en effet, que la durée d'oscillation $6^s,40194$ correspondait à une longueur de 10200 millimètres mesurée à la température de $12^\circ,5$. Il convient d'abord de réduire cette longueur à 0 degré; car les divisions de la règle qui a servi à la mesure devaient valoir 1 millimètre à 0 degré, et $1 + 0,000011\,t$ à la température t, de sorte que la véritable longueur est $10201^{mm},4$.

Il faut ajouter à cette grandeur la quantité dont le centre d'oscillation (propre aux oscillations coniques) est abaissé au-dessous du centre de gravité; cette quantité, très-petite ici, a pour valeur approchée $0^{mm},1$, ce qui donne pour nouvelle longueur $10201^{mm},5$.

Enfin, il faut appliquer à la longueur totale l une double correction due à la pesanteur du fil de suspension; cette correction, dont je parlerai bientôt, a pour valeur

$$-21^{mm},1;$$

d'où enfin

$$l = 10180^{mm},4.$$

Quant à la durée t, elle doit être réduite de $6,40194$ à $6,40178$, à cause des $2^s,2$ d'avance diurne du chronomètre.

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation connue qui donne la longueur λ du pendule à secondes,

$$\lambda = \frac{g}{\pi^2} = \frac{l}{\left(\frac{1}{2}t\right)^2}, \qquad (25)$$

on trouvera

$$\lambda = 993^{mm},63.$$

Ce nombre λ et la gravité correspondante sont un peu plus faibles que leurs valeurs bien connues pour l'Observatoire de Paris; mais nous n'avons pas encore tenu compte de la perte de poids dans l'air, qui diminue la gravité dans le rapport de la densité de l'air à celle du mobile, c'est-à-dire à très-peu près de $\frac{1}{10300}$, et comme, d'après les remarques faites à ce sujet par Poisson, cette correction doit, à cause de l'état de mouvement, être multipliée par le nombre $\frac{3}{2}$, on voit qu'il faudra augmenter g et λ de $\frac{1}{6900}$ de leur valeur et porter λ à la valeur

$$\lambda = 993^{\text{mm}},77. \tag{26}$$

La différence qui existe entre ce nombre et celui qu'a obtenu Borda [*] (993,86) correspond à une erreur de $0^{\text{mm}},9$ dans la mesure des longueurs 10036,5 et 10042 des fils d'acier employés à la suspension; elle peut s'expliquer par une petite inexactitude dans cette mesure même, que je n'avais point effectuée avec le degré de précision qu'il eût été nécessaire d'employer, si j'avais eu pour but de contrôler les observations de la gravité à l'Observatoire de Paris [**].

Il me reste à démontrer les formules qui doivent servir à corriger les observations de l'effet de la pesanteur du fil.

Le fil suspenseur agit, par son poids, de deux manières différentes: d'abord, comme corps pesant, il tend à élever le centre d'oscillation; ensuite, comme étant à la fois pesant et flexible, il se courbe suivant une ligne légèrement convexe vers le sol, et dont la dernière tangente étant prolongée jusqu'à la rencontre de l'axe de la rotation y détermine un point d'intersection qui doit être considéré comme le véritable point d'attache; cette dernière proposition est évidente.

---

[*] *Base du système métrique*, 3e volume, page 337.

[**] On devra remarquer que Borda et les physiciens qui ont mesuré la longueur du pendule simple par le procédé de la suspension filaire, n'ont pas tenu compte de la courbure, sous forme de chaînette, que prend le fil pendant les oscillations. A la vérité, il n'est pas évident que cette correction soit la même dans le cas des oscillations coniques et dans celui des oscillations planes dont Borda déterminait la durée; s'il en était ainsi, le nombre 993,86 devrait se réduire environ à $993^{\text{mm}},61$. On voit que cette correction est très-importante, et qu'il vaut la peine de rechercher si elle doit aussi s'appliquer au cas des oscillations planes.

Voyons d'abord quel sera l'effet de la pesanteur du fil sur le centre d'oscillation, les amplitudes étant supposées infiniment petites. Soit prise pour axe des z positifs la verticale qui descend du point de suspension, et soit pris son plan horizontal pour plan des x et des y. On trouve facilement que l'ordonnée z_1 du centre d'oscillation a pour valeur

$$z_1 = \frac{\int z^2\, dm}{\int z\, dm}, \tag{27}$$

dm étant un des éléments de masse du système oscillant, et les deux intégrales étant étendues à tout le système. Si donc la masse oscillante se compose d'un fil non pesant, portant à son extrémité inférieure un corps de masse M symétrique par rapport au plan horizontal mené par son centre de gravité, et si l'on nomme l la distance de ce centre au point d'attache, on aura, en posant $z = l + \zeta$,

$$\int z\, dm = l\mathrm{M},$$
$$\int z^2\, dm = l^2\,\mathrm{M} + \int \zeta^2\, dm,$$
$$z_1 = l + \frac{\int \zeta^2\, dm}{l\mathrm{M}}:$$

la quantité $\frac{\int \zeta^2\, dm}{l\mathrm{M}}$ représentera la quantité dont le centre d'oscillation est abaissé au-dessous du centre de gravité; j'ai déjà dit que, dans mes expériences, sa valeur était $0^{\mathrm{mm}},1$.

Si maintenant un fil pesant homogène, de longueur l_0, s'étend à partir du point de suspension jusqu'à la masse M, en nommant s sa section, ρ sa densité, m sa masse totale, le numérateur du second membre de l'équation (27) augmentera de

$$\int z^2 \rho\, dx\, dy\, dz = \int z^2 \rho s\, dz = \tfrac{1}{3}\, l_0^3\, \rho s = \tfrac{1}{3}\, l_0^2\, m,$$

le dénominateur augmentera de

$$\int z\rho\, dx\, dy\, dz = \int \rho s\, dz = \tfrac{1}{2}\, l_0^2\, \rho s = \tfrac{1}{2}\, l_0\, m;$$

d'où l'on voit qu'il faudra, pour tenir compte du poids du fil, multiplier z_1 par

$$1 + \frac{1}{3}\frac{l_0^2\, m}{l^2\,\mathrm{M}},$$

et le diviser par

$$1 + \tfrac{1}{2}\frac{l_0 m}{l\mathrm{M}},$$

et, comme les termes qui suivent l'unité sont très-petits, la correction résultante sera, à cause de $z_1 = l$, à fort peu près égale à

$$+ \tfrac{1}{3}\frac{l_0^2 m}{l\mathrm{M}} - \tfrac{1}{2}\frac{l_0 m}{\mathrm{M}} = -\tfrac{1}{6}\frac{ml}{\mathrm{M}}\left(1 + 2\frac{l-l_0}{l}\right)\left(1 - \frac{l-l_0}{l}\right),$$

et, lorsque la longueur l_0 sera à fort peu près égale à l, ce qui arrivera généralement, la correction se réduira à

$$(28) \qquad -\frac{m(2l - l_0)}{6\mathrm{M}}.$$

Je considère maintenant que le fil est flexible, et, comme son diamètre est petit et que la flexion est peu considérable, on peut faire abstraction de la rigidité et supposer le fil parfaitement flexible; il prendra donc la forme d'une chaînette, dont la courbure toutefois sera modifiée par la force centrifuge provenant de la rotation à laquelle il est soumis.

Soient O le point d'attache (*fig.* 4), P le centre de gravité de la masse M du mobile, OP le fil que je suppose prolongé jusqu'en P; prenons P pour origine des coordonnées, Pz pour axe des z, Px pour axe des x; posons Pp = R, et continuons à nommer l la longueur OP du fil, s sa section, ρ sa densité, m sa masse, et à supposer les oscillations infiniment petites.

En appelant x, z les coordonnées d'un point m de la courbe, la tension en m sera évidemment

$$\mathrm{M}g + mg.\frac{z}{l},$$

et, en la multipliant par l'angle de contingence $-d.\frac{dx}{dz}$, on aura la force moléculaire qui s'oppose à la courbure du fil. D'autre part, la force horizontale qui tire l'élément $d\sigma$ vers l'axe sera la composante normale au fil de la pesanteur de l'élément diminuée de l'effet de la force centrifuge correspondant à une vitesse de rotation ω, soit, à fort peu près,

$$\left[g\frac{dx}{d\sigma} - \omega^2(\mathrm{R} - x)\frac{dz}{d\sigma}\right]\rho s\, d\sigma;$$

or on peut, à cause de la très-faible flexion, et comme OP est presque rectiligne, supposer dans cette expression $\frac{dx}{d\sigma}$ constant; de plus, au point le plus bas P, la force centrifuge et la pesanteur se contre-balancent exactement, puisque le point P ne s'écarte ni ne se rapproche de l'axe; on aura donc très-sensiblement

$$g\frac{dx}{d\sigma} = \omega^2 \mathrm{R}\frac{dz}{d\sigma},$$

et faisant, par suite de la petitesse de l'angle du fil avec la verticale,

$$d\sigma = dz,$$

il viendra

$$-g\left(\mathrm{M} + m\frac{z}{l}\right)d.\frac{dx}{dz} = \omega^2 x\rho s\, dz,$$

et, divisant par

$$-\rho s l g = -mg,$$

on aura

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{m} + \frac{z}{l}\right)d.\frac{dx}{dz} = -\frac{\omega^2}{gl}x\,dz = -\frac{dx}{d\sigma}\cdot\frac{x}{\mathrm{R}l}\,dz.$$

Mais, puisque OP est presque rectiligne, on a, à fort peu près,

$$\frac{dx}{d\sigma} = \frac{p\mathrm{P}}{\mathrm{OP}} = \frac{\mathrm{R}}{l};$$

substituant et multipliant par $\frac{l}{dz}$, on trouve

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{m}l + z\right)\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{l};$$

c'est l'équation différentielle de la courbe OP, cette courbe étant supposée (ce qui a lieu en effet) différer très-peu d'une ligne droite.

Dans la pratique, $\frac{\mathrm{M}}{m}$ est un nombre considérable (environ 160 dans mes expériences), et l'on peut, sans erreur sensible, supposer (à $\frac{1}{300}$ près)

$$\frac{\mathrm{M}}{m}\cdot l + z = \frac{\mathrm{M}}{m}\cdot l + \tfrac{1}{2}l,$$

ce qui réduit l'équation à

$$\left(\frac{\mathrm{M}}{m} + \tfrac{1}{2}\right)\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{x}{l^2},$$

dont l'intégrale est

$$\frac{2M+m}{2m}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = -\frac{x^2}{l^2} + \text{constante}.$$

Soit donc nommé φ l'angle $O'Pp$; on aura, pour l'équation différentielle de premier ordre de la courbe,

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 = \text{tang}^2\varphi - \frac{x^2 . 2m}{(2M+m)l^2},$$

et en changeant dans le second membre x^2 en $z^2 \text{tang}^2 \varphi$, ce qui n'occasionne aucune erreur sensible, il viendra

$$\frac{dx}{dz} = \text{tang}\,\varphi . \sqrt{1 - \frac{2mz^2}{(2M+m)l^2}}.$$

Enfin, à cause de la petitesse du facteur $\frac{2m}{2M+m}$, on peut extraire la racine par approximation, et écrire

$$dx = dz\,\text{tang}\,\varphi\left[1 - \frac{mz^2}{(2M+m)l^2}\right],$$

$$x = z\,\text{tang}\,\varphi\left[1 - \frac{mz^2}{3(2M+m)l^2}\right].$$

Je n'ajoute pas de constante, puisque la courbe passe par l'origine; on voit que c'est une parabole du troisième ordre, et que sa courbure est nulle dans le voisinage de l'origine, c'est-à-dire dans la partie la plus basse du fil. Il résulte de là qu'on peut toujours, quoique le fil ne vienne pas en général jusqu'en P, le supposer prolongé jusque-là, pourvu que l'on remplace sa masse m par $\frac{ml}{l_0}$, l_0 étant la longueur *effective* du fil.

Si l'on fait, dans la formule ci-dessus,

$$z = l, \quad x = R,$$

il viendra

$$R = l\,\text{tang}\,\varphi\left(1 - \frac{m}{6M+3m}\right),$$

$$pO' = l\left(1 - \frac{m}{6M+3m}\right);$$

d'où

$$Oo' = \frac{ml}{6M+3m},$$

et si l'on y remplace m par $\frac{ml}{l_0}$, mais seulement au numérateur, on aura enfin

$$(29) \qquad Oo' = \frac{m(2l - l_0)}{6M + 3m}.$$

En réunissant cette correction à la précédente, donnée par la formule (28), la correction totale due au poids du fil deviendra

$$-\frac{m(2l - l_0)}{6M} - \frac{m(2l - l_0)}{6M + 3m};$$

d'où l'on voit que ces deux corrections sont presque égales entre elles, et qu'on peut les embrasser en un seul terme sous la forme

$$-\frac{2l - l_0}{3} \frac{m}{M + \frac{1}{4}m}.$$

Dans nos expériences, on avait, pour les valeurs moyennes de l, l_0, m, M, sur les fils A' et B,

$$\begin{aligned} l &= 10193^{\text{mm}}, \\ l_0 &= 10032^{\text{mm}},5, \\ m &= 64^{\text{gr}},89, \\ M &= 10600^{\text{gr}}; \end{aligned}$$

ainsi la correction de longueur du fil était égale à $-21^{\text{mm}},1$, comme nous l'avions annoncé.

On voit qu'elle est sensiblement proportionnelle au carré de la longueur du fil ; il y aurait donc de l'avantage, si l'on voulait obtenir par ce procédé la longueur du pendule simple, à se servir d'un pendule moins long, circonstance qui faciliterait aussi la mesure exacte de sa longueur totale.

Sur les irrégularités qui se produisent dans le mouvement de rotation du pendule conique libre.

Dans les conditions où les expériences précédentes ont été faites, l'amplitude des oscillations, ou, en d'autres termes, le rayon de la trajectoire décrite par le mobile, allait en diminuant avec lenteur, et cette variation représentait la loi du ralentissement de la vitesse, effet combiné de la résistance de l'air et des frottements produits au point de suspension supérieure du fil.

L'observation de plusieurs séries de ces amplitudes décroissantes m'a permis de déterminer la loi empirique de ce décroissement entre les valeurs 300 millimètres et 100 millimètres du rayon R de l'orbite. En examinant ces séries, on y reconnaît facilement que la résistance n'est proportionnelle ni à la simple vitesse du mobile, ni au carré de cette vitesse, mais plutôt à une puissance intermédiaire, laquelle peut être exprimée, à fort peu près, par la fraction $\frac{16}{10}$. D'après ces mêmes expériences, j'ai construit une Table des valeurs corrélatives du rayon R et du temps t écoulé depuis l'origine du mouvement, celui-ci étant supposé commencer à l'époque où R est égal à 295 millimètres; mais, comme cette Table n'aurait pas un grand intérêt pour les physiciens, je me bornerai à donner la formule par laquelle je suis parvenu à la représenter à très-peu près. Cette formule est la suivante :

$$\mathrm{R}^{-0,6} = c + c't, \tag{1}$$

c et c' étant deux constantes convenablement choisies. On peut mettre cette équation sous la forme

$$\log \mathrm{R} = -\tfrac{10}{6} \log (c + c't).$$

Dans le cas actuel, R étant exprimé en millimètres, le temps t en minutes, la formule devient

$$\log \mathrm{R} = -\tfrac{10}{6} \log (0,03297 + 0,000186\, t). \tag{2}$$

Elle est valable depuis $t = 0$, $\mathrm{R} = 295^{\mathrm{mm}}$, jusqu'à $t = 160^{\mathrm{m}}$, $\mathrm{R} = 103^{\mathrm{mm}},6$. Entre ces limites, les valeurs qu'elle fournit pour R ne s'écartent pas de plus de $1^{\mathrm{mm}},5$ des nombres moyens déduits des observations.

Réciproquement, ayant observé l'amplitude R et l'amplitude r à deux époques distantes d'un nombre de minutes égal à θ, on vérifiera notre formule générale en substituant les valeurs de ces quantités dans l'équation

$$\theta = \frac{5555}{r^{0,6}} - \frac{5555}{\mathrm{R}^{0,6}}. \tag{3}$$

Il faut remarquer que les équations (2) et (3) ne s'appliquent réellement qu'au pendule de 10216 millimètres de longueur; pour le pendule raccourci ayant pour longueur 10116 millimètres, la constante 5555 doit devenir un peu moindre; mais la différence n'est guère sensible dans le degré de précision de mes observations.

Comme le coefficient constant de l'équation (3) peut se déduire de chaque observation isolée, en divisant la durée θ par la valeur de $\frac{1}{r^{0,6}} - \frac{1}{R^{0,6}}$, il ne sera pas sans intérêt de voir d'un seul coup d'œil les diverses valeurs que lui assignent les observations; c'est ce que montre le tableau suivant :

Valeurs de $\frac{1}{c'}$, d'après les observations.

JOUR.	CIRCONSTANCES.	VALEUR de la constante $\frac{1}{c'}$.		JOUR.	CIRCONSTANCES.	VALEUR de la constante $\frac{1}{c'}$.	
1851.				1851.			
5 mai.	Fil A. E. à O. par le sud.	5110	5132	24 juin.	Fil B. E. à O. par le sud.	6031	5931
	O. à E.	5155		*Id.*	O. à E.	5832	
9 mai.	Fil A. O. à E.	5164	5164	7 juill.	Fil B. E. à O.	5648	5801
11 mai.	Fil A. E. à O.	5410	5432	*Id.*	O. à E.	5954	
	O. à E.	5454		25 mai.	Fil A'. E. à O.	5590	5496
16 mai.	Fil A. O. à E.	5500	5500		O. à E.	5402	
18 mai.	Fil A. E. à O.	5628	5628	10 juin.	Fil A'. E. à O.	5682	5420
16 mai.	Fil B. O. à E.	5596	5596		O. à E.	5158	
18 mai.	Fil B. E. à O.	5505	5505	24 juin.	Fil A'. E. à O.	5495	5477
25 mai.	Fil B. E. à O.	5595	5695		O. à E.	5460	
	O. à E.	5795		7 juill.	Fil A'. E. à O.	5730	5653
10 juin.	Fil B. E. à O.	5033	5415		O. à E.	5577	
	O. à E.	5797					

Pour chacun des trois fils A, B, A' successivement employés, la valeur de $\frac{1}{c'}$ a été généralement croissante, à mesure que l'on a fait avec ce fil de nouvelles séries. La seule manière d'expliquer ce fait me paraît être celle qui consiste à admettre qu'à la longue le frottement produit par les flexions alternatives du fil, en son point de suspension, va en diminuant, le fil devenant de plus en plus facile à fléchir.

Il est d'ailleurs probable que j'aurais obtenu des nombres plus concordants que ceux du tableau précédent, si les observations avaient eu précisément pour but d'obtenir la loi de la variation des amplitudes.

Je terminerai par quelques détails sur le mode de dégénérescence des trajectoires en ellipses. Le tableau suivant présente, pour mes diverses expériences, la valeur des demi-diamètres des orbites dans les quatre azimuts principaux, est-ouest, nord-sud, sud-est-nord-ouest et sud-ouest-nord-est; 1° dans l'état initial, immédiatement avant l'observation; 2° dans l'état final, vers la fin de la série. Une colonne particulière donne l'intervalle de temps écoulé entre ces deux états.

De ces quatre observations, on peut déduire les éléments de l'orbite. Les deux dernières colonnes du tableau donnent ces éléments pour l'orbite finale, qui est la plus importante à déterminer. Pour déterminer le grand axe et le petit axe, en nommant R, R′, R″, R‴ [*] les rayons vecteurs de l'orbite, comptés vers le nord, le nord-ouest, l'ouest et le sud-ouest, et supposant l'ellipse peu différente d'un cercle, j'ai trouvé que l'on pouvait exprimer les axes par la formule

$$\left(\frac{R+R''}{2}+\frac{R'+R'''}{2}\right)\pm\sqrt{(R-R'')^2+(R'-R''')^2},$$

le signe + correspondant au grand axe, et le signe — au petit axe. Le rapport de ces deux expressions donne le nombre inscrit dans la dernière colonne du tableau.

Quant à la direction du grand axe, on sait d'avance dans quels quadrants il est situé.

S'il est situé dans le quadrant nord-est-sud-ouest, on écrira

$$\text{Azimut grand axe} = \text{sud}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang} = \frac{R'''-R'}{R-R''}\right)\text{ vers l'ouest.}$$

S'il est situé dans le quadrant sud-est-nord-ouest, on écrira

$$\text{Azimut grand axe} = \text{sud}\left(\tfrac{1}{2}\,\text{arc tang} = \frac{R'-R'''}{R-R''}\right)\text{ vers l'est,}$$

l'angle arc tang se comptant de 0 degré à 180 degrés, et l'angle $\frac{1}{2}$ arc tang de 0 degré à 90 degrés.

---

[*] L'équation de l'ellipse prouve que ces quatre grandeurs sont liées entre elles par la relation

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R'''^2}.$$

Formes initiale et finale des orbites du pendule conique.

JOUR.	CIRCONSTANCES.	ORBITE INITIALE, valeur de R.				ORBITE FINALE, valeur de r.				DURÉE θ.	ORBITE FINALE.	
		S.-N.	S.-E.-N.-O.	E.-O.	S.-O.-N.-E.	S.-N.	S.-E.-N.-O.	E.-O.	S.-O.-N.-E.		Direction du grand axe.	Rapport des deux axes.
		R.	R′.	R″.	R‴.	R.	R′.	R″.	R‴.			
1851.		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	m	° ′	
5 mai.	Fil A. Occid. E. à O. par le S.	315,5	312,0	311,0	314,0	126,0	118,5	122,0	132,0	120	S.36.44 O.	1,12 : 1
	Fil A. O. à E. par le S.	309,0	308,5	306,7	308,5	109,5	106,0	134,7	132,5	125	S.65. 1 O.	1,38
9 mai.	Fil A. O. à E.	305,5	307,5	307,7	307,5	103,5	105,5	134,5	136,0	126	S.68.10 O.	1,43
11 mai.	Fil A. E. à O.	312,5	314,5	312,5	312,0	129,0	111,0	117,0	138,5	128	S.36.53 O.	1,28
	O. à E.	315,0	315,5	312,7	313,5	111,0	109,5	137,2	142,0	128	S.64.26 O.	1,41
16 mai.	Fil A. O. à E.	237,5	236,0	235,2	236,5	127,0	123,0	120,5	125,0	98	S. 8.30 O.	1,06
18 mai.	Fil A. E. à O.	229,5	232,0	230,5	230,5	122,0	125,5	122,7	120,5	99	S.63. E.	1,06
	Fil long.											
16 mai.	Fil B. Oriental. O à E.	246,0	243,5	241,2	243,0	136,2	125,8	117,8	125,2	100	S. 0.45 E.	1,16 : 1
18 mai.	Fil B. Oriental. E. à O.	217,0	214,0	215,0	216,0	116,5	123,0	118,5	110,0	97	S.49.20 E.	1,12
25 mai.	Fil B. Austral. E. à O.	201,0	205,5	202,5	197,0	111,5	113,5	107,0	105,0	103	S.31. 3 E.	1,09
	O. à E.	193,0	190,0	188,0	191,0	120,5	114,0	107,2	113,5	90	S. 1. 0 E.	1,13
10 juin.	Fil B. Austral. E. à O.	226,5	230,5	235,0	231,5	116,5	131,5	121,0	109,5	93	S.55.46 E.	1,22
	O. à E.	197,5	195,5	191,8	194,0	122,5	114,0	108,5	113,0	92	S. 2. 0 E.	1,13
24 juin.	Fil B. Austral. E à O.	195,0	191,0	189,7	194,5	119,0	124,0	123,7	121,0	81	S.73.52 E.	1,05
	O. à O.	199,5	200,5	208,2	206,0	121,0	111,0	111,9	120,8	96	S.22.15 O.	1,13
7 juill.	Fil B. Austral. E. à O.	192,0	188,0	188,2	191,5	106,5	113,5	112,0	105,0	102	S.61.24 E.	1,096
	O. à E.	213,5	216,5	217,5	214,5	124,0	116,5	114,2	120,0	95,5	S. 9.54 O.	1,09
	Fil court.											
25 mai.	Fil A′. Boréal E. à O.	209,5	210,5	208,5	208,5	105,0	113,0	112,2	104,5	109	S.65. 8 E.	1,11 : 1
	O. à E.	219,5	221,0	222,5	222,0	104,0	98,5	90,7	93,0	136,5	S.11.22 E.	1,16
10 juin.	Fil A′. E. à O.	230,5	232,5	233,2	232,0	105,0	115,0	118,2	106,5	120	S.44. E.	1,06
	O. à E.	246,0	248,0	244,3	243,5	106,5	109,0	106,2	103,0	124	S.73.40 E.	1,15
26 juin.	Fil A′. E. à O.	206,5	205,5	213,0	213,0	101,0	111,5	111,7	102,5	111	S.69.42 E.	1,14
	O. à E.	202,0	202,5	195,7	198,7	110,5	109,5	102,0	102,5	105	S.19.44 E.	1,11
7 juill.	Fil A′. E. à O.	213,0	219,0	221,5	215,5	107,5	114,0	111,7	105,5	115	S.58.18 E.	1,09
	O. à E.	194,5	193,5	193,2	195,0	104,0	102,0	96,0	99,0	115	S.10.18 E.	1,09

Voici les remarques auxquelles conduit l'inspection de ce tableau, et celles que j'ai eu l'occasion de faire pendant la durée des expériences.

Tant que l'on se sert du même fil et que la rotation est de même sens, l'orbite supposée primitivement circulaire a une tendance à se changer en une ellipse dont le grand axe offre une direction déterminée. La forme légèrement elliptique que peut avoir l'orbite initiale ne trouble pas sensiblement ce résultat. Si l'ellipticité de l'orbite initiale était inverse de celle que doit avoir l'ellipse finale, l'orbite variable commencerait d'abord par arriver à la forme circulaire ou sensiblement circulaire, circonstance qui retarderait la transformation en ellipse finale. C'est ce qui a été surtout sensible dans la rotation du fil B d'occident en orient, observée le 7 juillet. Si, au contraire, l'orbite initiale avait une ellipticité analogue de position à l'ellipticité finale, cette circonstance favoriserait son prompt établissement.

On voit ainsi que, pour un même fil, la diminution des amplitudes ne se fait pas avec la même rapidité pour les différents rayons vecteurs de l'orbite. Il est deux positions rectangulaires pour lesquelles la diminution est à son maximum dans l'une et à son minimum dans l'autre.

Si l'on fait tourner le même fil dans le sens inverse, la position du grand axe de l'ellipse finale se déplace. Un défaut d'horizontalité dans la plaque de suspension peut aussi modifier cette position, et faire dégénérer plus rapidement l'orbite en une ellipse sensiblement allongée. Ainsi, dans les observations du fil A, d'occident en orient, les 5, 9 et 11 mai, le grand axe de l'orbite finale tendait à se diriger au S. 60° O.; mais, après le redressement de la plaque de suspension, le grand axe s'est dirigé au S. 15° O. Pour les rotations d'orient en occident, la différence a été encore plus considérable.

En général, lorsqu'on change le sens de la rotation, la position normale du grand axe marche dans le sens de l'ancienne rotation.

Ainsi, pour le fil A, avant la rectification de la suspension qui a eu lieu le 13 mai, dans la rotation de l'est à l'ouest par le sud, le grand axe était situé au S. 35° O.; en renversant la rotation, il a rétrogradé de 25 degrés et passé au S. 60° O.

Pour ce même fil A, après la rectification de la suspension, le grand axe, situé au S. 46° E., lorsque la rotation avait lieu de l'est à l'ouest, a passé au S. 15° O.; rétrogadation, 61 degrés pour le sens de la nouvelle rotation.

Pour le fil B, dans les mêmes conditions, S. 50° E., et ensuite S. 5° E.; la rétrogradation est de 55 degrés.

Enfin, pour le fil A', les deux positions du grand axe sont S. 64° E. et S. 18° E.; rétrogradation de 46 degrés.

Ces résultats semblent indiquer une notable influence exercée par la pièce de suspension; l'état moléculaire des fils, près de la suspension, semble, au contraire, avoir une faible influence, les trois fils ayant donné sensiblement les mêmes résultats.

La forme du mobile n'a pu d'ailleurs avoir aucune influence appréciable; les cylindres pesants étaient parfaitement tournés, ainsi que toutes les pièces de la suspension inférieure, et la résistance de l'air devait ainsi être constante dans toutes les directions azimutales.

J'ai eu aussi l'occasion de reconnaître que les courants d'air, soit accidentels, soit déterminés par l'approche de l'observateur, pouvaient troubler un peu le mouvement. C'est surtout dans l'observation des coïncidences que j'ai pu vérifier ce fait; car, lorsque je me bornais à les noter de loin, en les observant au théodolite, sans approcher des appareils, les périodes de retour étaient plus régulières que si j'allais, après chaque croisement ou coïncidence, mesurer les rayons vecteurs des orbites, ce qui exigeait un séjour de quelques minutes auprès des pendules. Ces perturbations irrégulières peuvent expliquer, au moins en partie, les différences de forme qu'offrent d'un jour à l'autre les ellipses finales, après des rotations du même fil dirigées dans le même sens.

Je n'ai pas remarqué que les grands axes des ellipses eussent un déplacement lent, dans le sens du mouvement diurne, c'est-à-dire d'orient en occident, comme on pouvait l'inférer à priori du phénomène de déviation observé par M. Foucault; il est à croire que l'action de la Terre se borne à déplacer dans ce sens, d'un petit nombre de degrés, la position d'équilibre que la suspension tend à donner au grand axe, et que cette déviation, *étant sensiblement constante* dans toutes les séries d'observations du même pendule, reste ainsi inaperçue.

Il est inutile d'insister davantage sur des sujets qui n'ont fixé mon attention que d'une manière secondaire. Je pense toutefois que les remarques précédentes pourront ne pas être inutiles à la personne qui désirerait reprendre ces expériences, ou traiter directement la question de la diminution des amplitudes et celle de la rotation lente des axes des orbites pendulaires.

Note sur une formule de Lagrange, relative au mouvement pendulaire.

Mon édition de la *Mécanique analytique* (Paris, 1815, in-4°), renfermant un grand nombre de fautes typographiques, je vais reprendre les calculs de Lagrange à la page 197 du tome II [*].

Lagrange veut calculer l'angle de rotation φ du pendule autour de la verticale, et il écrit que : α et β étant les amplitudes maximum et minimum, ψ l'amplitude variable avec le temps, et σ un angle auxiliaire donné par la formule

$$\cos\psi = \cos\alpha \sin^2\sigma + \cos\beta \cos^2\sigma,$$

l'on aura

$$d\varphi = \frac{\sqrt{\varkappa}\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\frac{d\sigma}{(1+\cos\psi)\Sigma} + \frac{\sqrt{\varkappa}\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta}{\sqrt{\cos\alpha+\cos\beta}}\frac{d\sigma}{(1-\cos\psi)\Sigma}.$$

On a d'ailleurs

$$\varkappa = \frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2+4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta},$$

$$\Sigma = \sqrt{1+\varkappa(\cos\beta-\cos\alpha)\cos 2\sigma}.$$

Il s'agit d'intégrer de $\sigma = 0$ à $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ou, ce qui revient au même, de $\psi = \alpha$ à $\psi = \beta$, en tenant compte des termes du second ordre en α, β, et négligeant ceux du quatrième ordre. Le calcul du premier des deux termes qui composent la valeur de $d\varphi$ n'offre aucune diffi-

[*] *Mécanique analytique*, édition Courcier, 1811, section VIII, chapitre II, article 16.

culté; on peut poser

$$\varkappa = \tfrac{1}{4},\quad \Sigma = 1,\quad 1 + \cos\psi = 2,\quad \sqrt{\cos\alpha + \cos\beta} = 2,\quad \sin\alpha\sin\beta = \alpha\beta;$$

on trouve alors, pour ce premier terme,

$$\tfrac{1}{4}\,\alpha\beta\,d\sigma,$$

et, intégrant,

$$\frac{\pi}{2}\frac{\alpha\beta}{4}.$$

Le calcul du second terme est plus compliqué, parce que le dénominateur renferme le facteur $1 - \cos\psi$, qui est lui-même du second ordre.

Faites, avec Lagrange,

$$\frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{2 + 4\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta} = \sin 2\gamma,$$

$$\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2 - \cos\beta - \cos\alpha} = \sin 2\nu;$$

vous aurez

$$\frac{1}{1 - \cos\psi} = \frac{2}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\,(1 + \operatorname{tang}^2\nu - 2\operatorname{tang}\nu\cos 2\sigma)},$$

$$\frac{1}{(1 - \cos\psi)\,\Sigma} = \frac{2}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma}\left[A'' + B''\cos 2\sigma + C''\cos 4\sigma\right],$$

ou, plus simplement, en supprimant les termes en $\cos 2\sigma$, $\cos 4\sigma$, lesquels doivent disparaître par l'intégration,

$$\frac{1}{(1 - \cos\psi)\,\Sigma} = \frac{2A''}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma} = \frac{2(A + B\operatorname{tang}\nu + C\operatorname{tang}^2\nu + \ldots)}{(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos^2\nu\cos\gamma\,(1 - \operatorname{tang}^2\nu)}.$$

Dans cette formule, on a d'ailleurs

$$A = 1 + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\gamma\ldots,$$

$$B = -\operatorname{tang}\gamma - \ldots,$$

$$C = \tfrac{3}{4}\operatorname{tang}^2\gamma + \ldots,$$

ce qui change le terme à calculer en

$$\frac{\sqrt{2}\sin\alpha\sin\beta\,2\,d\sigma\,(1 + \tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\gamma - \operatorname{tang}\gamma\operatorname{tang}\nu + \tfrac{3}{4}\operatorname{tang}^2\gamma\operatorname{tang}^2\nu + \ldots)}{\sqrt{2 + 4\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha + \cos^2\beta}\,(2 - \cos\alpha - \cos\beta)\cos\gamma\cos^2\nu\,(1 - \operatorname{tang}^2\nu)}.$$

En intégrant de $\sigma = 0$ à $\sigma = \frac{\pi}{2}$, ce terme devient

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{2-\cos\alpha-\cos\beta}\cdot\frac{\pi\sqrt{2}}{\sqrt{2+4\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta}}\,\frac{1}{\cos\gamma}\cdot\frac{1}{\cos 2\nu}$$
$$\times\left(1+\tfrac{1}{4}\operatorname{tang}^2\gamma-\operatorname{tang}\gamma\operatorname{tang}\nu+\tfrac{3}{4}\operatorname{tang}^2\gamma\operatorname{tang}^2\nu\ldots\right).$$

Si l'on néglige les quantités du quatrième ordre en α, β, le premier facteur aura pour valeur

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\left[1-\frac{\alpha^4+\beta^4+4\alpha^2\beta^2}{12(\alpha^2+\beta^2)}\right];$$

le deuxième facteur sera

$$\frac{\pi}{2}\left[1+\tfrac{3}{16}(\alpha^2+\beta^2)\right];$$

le troisième facteur sera

$$\frac{1}{\cos\gamma}=1;$$

le quatrième facteur sera égal à

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}\left[1-\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{24(\alpha^2+\beta^2)}\right];$$

le cinquième facteur sera égal à

$$1-\frac{\alpha^2-\beta^2}{16}\sqrt{\frac{1-\cos 2\nu}{1+\cos 2\nu}}=1-\frac{(\alpha-\beta)^2}{16}.$$

Le produit total sera donc

$$\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\alpha\beta}{8}\right),$$

et, en lui ajoutant $\frac{\pi}{2}\frac{\alpha\beta}{4}$, on trouvera

$$\Phi=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\alpha\beta}{8}\right),$$

Φ étant la différence des valeurs de la variable φ, entre les limites $\psi=\alpha$ et $\psi=\beta$.

Lagrange a trouvé

$$\Phi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}:$$

son erreur provient de ce que, dans le calcul du second terme de $d\varphi$, il a écrit, par mégarde, au dénominateur, $1 + \tang^2 \nu$ au lieu de $1 - \tang^2 \nu$, erreur qui a fait disparaître le facteur $\frac{1}{\cos 2\nu}$, et, par cette suppression, le facteur $\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$ provenant de $\frac{\sin\alpha \sin\beta}{2 - \cos\alpha - \cos\beta}$ s'est trouvé introduit dans la valeur de Φ.

On peut s'étonner que Lagrange n'ait pas reconnu une telle erreur; car la formule

$$\Phi = \frac{\pi\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

donne pour l'orbite du mobile, comme Lagrange en fait lui-même la remarque, une courbe festonnée, dans laquelle le rapport de l'amplitude angulaire 2Φ des festons à la demi-circonférence peut varier d'une manière quelconque entre 0 et 1 : or, il suffit de jeter les yeux sur un pendule oscillant elliptiquement, et, par exemple, sur un fil à plomb ordinaire, pour reconnaître que ce résultat est complétement contredit par l'observation. Tant il est vrai que l'erreur est tellement humaine, qu'elle peut se glisser même sous la plume du plus illustre géomètre.

La durée du retour du pendule à la même extrémité du grand axe de l'ellipse est désignée, dans Lagrange, par $2T$; et l'intégration lui donne (page 204)

$$2T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{16}\right).$$

Pour obtenir le temps 2θ du retour au vertical de la lunette d'observation, il faut remarquer que, dans le temps 2θ, le rayon vecteur décrit l'angle 2π, tandis que, dans le temps $2T$, il décrit l'angle

$$4\Phi = 2\pi\left(1 + \frac{3\alpha\beta}{8}\right) = 360^\circ + 135^\circ \sin\alpha \sin\beta.$$

Donc, en supposant que l'on tienne compte de la petite inégalité relative à la position du grand axe par rapport au vertical de la lunette, suivant la méthode indiquée à la page 12 de ce Mémoire, on aura

$$2\theta : 2\mathrm{T} :: 2\pi : 4\Phi :: 1 : 1 + \frac{3\alpha\beta}{8},$$

$$\theta = \pi\sqrt{\frac{r}{g}}\cdot\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 6\alpha\beta}{16}\right),$$

ce qui est la formule donnée dans mon Mémoire.

Il importe de remarquer que la durée du retour au méridien ne doit pas avoir tout à fait la même valeur, selon que le méridien est voisin du grand axe ou du petit axe.