JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

WOEPCKE

Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de sin 1°

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 153-176.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__153_0>

DISCUSSION DE DEUX MÉTHODES ARABES

POUR DÉTERMINER UNE VALEUR APPROCHÉE DE sin 1°;

PAR M. WOEPCKE.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 13 mars 1854.)

§ I.

Les Tables des fonctions trigonométriques sont, comme on sait, indispensables à l'Astronomie, et, en général, à toutes les branches des Mathématiques appliquées. La connaissance approfondie des fonctions analytiques, à laquelle s'est élevée l'analyse moderne, nous fournit actuellement des moyens nombreux pour calculer ces Tables avec la plus grande facilité et avec une précision poussée aussi loin qu'on veut. Mais à l'époque de la science où l'on commençait à sentir le besoin de ces Tables, ces moyens, beaucoup plus restreints et beaucoup moins élégants, ne conduisaient qu'à une précision comparativement fort limitée. Par conséquent, chaque perfectionnement apporté à la construction de ces Tables par les géomètres d'une époque intermédiaire, soit en augmentant la précision de méthodes déjà connues, soit en en inventant de nouvelles, doit être compté comme un progrès essentiel dans le développement des sciences mathématiques.

Sous ce point de vue, deux méthodes arabes, que je soumettrai plus loin à un examen détaillé, m'ont paru mériter une attention particulière. Ces méthodes ont été distinguées par M. Sédillot dans le *Commentaire* fort étendu de Mériem-al-Tchélébi, dont il a joint divers extraits à la traduction des *Prolégomènes des Tables d'Oloug-Beg* qu'il vient de faire paraître, après en avoir publié précédemment le texte persan [*]. Dans la Lettre adressée à M. de Humboldt, qui sert de préface à cet ouvrage, M. Sédillot s'exprime ainsi au sujet de ces

[*] *Prolégomènes des Tables astronomiques d'Oloug-Beg.* Traduction et Commentaire, par M. SÉDILLOT; Paris, 1853, p. 69-83.

méthodes (page xxxv) : « Mériem, qui nous fournit une analyse très-» précieuse de la méthode de l'auteur (Oloug-Beg), ajoute, par son » exposé, une preuve nouvelle à celles que nous avons données du » développement remarquable de l'Algèbre chez les Arabes. »

Ces méthodes, développées dans le *Commentaire* de Tchélébi, ne sont pas dues à ce géomètre lui-même, mais appartiennent, soit à Oloug-Beg, soit à d'autres géomètres persans, et je renvoie, à ce sujet, aux détails donnés par Tchélébi lui-même [*]. Pour éviter des longueurs, je les appellerai indistinctement *Méthodes de Tchélébi,* c'est-à-dire exposées par ce géomètre. Pareillement, j'appelle ces méthodes *arabes,* parce que l'Astronomie et les Mathématiques chez les Persans font essentiellement partie de ce grand développement des sciences exactes qui prend son origine dans l'empire arabe des khalifes.

L'objet de ces deux méthodes est de déterminer une valeur approchée de sin 1° : car à une époque où l'on ne connaissait pas les séries par lesquelles s'expriment les fonctions trigonométriques, il n'existait d'autre moyen pour obtenir les valeurs des sinus de degré en degré que de les calculer au moyen des lignes dans le cercle dont elles expriment les rapports au rayon. Et l'on sait que ce sont seulement les sinus des multiples de 3° qui peuvent s'exprimer en forme finie par des radicaux du second degré, tandis que la détermination de sin 1°, dont on a besoin pour calculer les sinus des degrés intermédiaires, dépend d'une équation du troisième degré et nécessite, par conséquent, des procédés particuliers.

Les deux méthodes en question conduisent à cette détermination de deux manières différentes. La première est une méthode d'interpolation semblable à la méthode donnée par Ptolémée pour calculer la corde de 1°, mais permettant d'employer un plus grand nombre de valeurs connues de la fonction, tandis que la méthode de Ptolémée n'en admet que deux, lesquelles, multipliées par des coefficients numériques, y forment les deux limites supérieure et inférieure entre lesquelles est comprise la valeur cherchée de la fonction [**]. Je comparerai cette méthode à celle de Ptolémée, j'en démontrerai la supé-

[*] *Voir* l'ouvrage cité, p. 69 et 77.

[**] La méthode arabe, il est vrai, établit aussi deux limites de la valeur cherchée; mais chacune de ces limites dépend, comme on le verra plus tard, de deux valeurs connues de la fonction.

riorité, et j'examinerai ses points de ressemblance avec nos formules d'interpolation modernes.

La seconde méthode aborde directement le problème du troisième degré, établit l'équation, et la résout ensuite numériquement par un procédé qui se ramène, au fond, à un développement en série ou à une application de la méthode des coefficients indéterminés. Cette méthode, outre qu'elle fournit un résultat plus exact encore que la première, m'a paru fort remarquable, tant à cause de l'idée ingénieuse sur laquelle elle est fondée, qu'à cause de différentes particularités qu'elle présente.

Je procède maintenant à l'exposé détaillé des discussions dont je viens de résumer le résultat.

§ II.

Première méthode de Tchélébi pour déterminer la valeur de sin 1° [*].

I. On calcule les quantités suivantes :

Côté du triangle régulier inscrit dans le cercle, double de.	$\sin 60^\circ$
Côté du carré.	$\sin 45^\circ$
Côté de l'hexagone.	$\sin 30^\circ$
Côté de l'octogone.	$\sin 22^\circ 30'$
Côté du décagone.	$\sin 18^\circ$
Côté du pentagone.	$\sin 36^\circ$

Démonstration géométrique de quatre formules trigonométriques, savoir :

II. $$(1)\quad \sin\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{\sin\text{vers}\,\alpha}{2}\cdot r};$$

$$(2)\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha.\cos\alpha.$$

III. $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

IV. $$\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta).$$

$\alpha-\beta$, α, $\alpha+\beta$ étant des angles du premier quadrant [**].

[*] *Voir* Sédillot, *Tables d'Oloug-Beg*, p. 69-77.

[**] En effet, l'inégalité

$$\sin(\alpha+\beta) - \sin\alpha < \sin\alpha - \sin(\alpha-\beta)$$

équivaut à $2\sin\alpha.\cos\beta < 2\sin\alpha$, ou à $\cos\beta < 1$, c'est-à-dire à $\beta > 0$.

V. On connaît les sinus des angles suivants :

$$45'\,0'',\quad 56'\,15'',\quad 1^\circ\,7'\,30''\ [*],$$

qui sont, et c'est ce qu'il importe de remarquer, des fractions d'un degré rationnelles et équidistantes entre elles, savoir, $\frac{12}{16}$, $\frac{15}{16}$, $\frac{18}{16}$ d'un degré, de sorte qu'en divisant chacun des deux intervalles déterminés par ces trois arcs en trois parties égales, un des points de division sera l'extrémité de l'arc d'un degré.

Or, en vertu de la formule IV, on aura

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right] < \left[\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{14}{16}\right)^\circ\right]$$
$$< \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right],$$

---

[*] Les sinus de ces trois arcs dérivent de ceux déterminés dans le n° I, de la manière suivante :

1°. Le côté de l'hexagone donne sin 30°

$$\text{et}\quad \frac{30^\circ}{32} = \frac{30^\circ}{2^5} = 56'\,15'';$$

donc, on n'a qu'à employer cinq fois de suite la formule II (1) pour déduire

$$\sin 56'\,15'' \quad \text{de} \quad \sin 30^\circ;$$

2°. Le côté du décagone donne sin 18°

$$\text{et}\quad \frac{18^\circ}{16} = \frac{18^\circ}{2^4} = 1^\circ\,7'\,30'';$$

donc, par le même procédé répété quatre fois, on déduit

$$\sin 1^\circ\,7'\,30'' \quad \text{de} \quad \sin 18^\circ;$$

3°. Connaissant

$$\sin 18^\circ \quad \text{et} \quad \sin 15^\circ \quad \left(\text{puisque} \quad 15^\circ = \frac{30^\circ}{2}\right),$$

on obtient

$$\sin(18^\circ - 15^\circ) = \sin 3^\circ \quad \text{par la formule III;}$$

et de là

$$\sin 45' = \sin\left(\frac{3^\circ}{2^2}\right) \quad \text{par la formule II (1).}$$

donc

$$(1) \qquad \sin 1^\circ < \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right] + \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ.$$

De même,

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right] > \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right],$$

donc

$$(2) \qquad \sin 1^\circ > \frac{1}{3}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ\right] + \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ.$$

Des formules (1) et (2) on conclut, comme valeur approchée de $\sin 1^\circ$,

$$\sin 1^\circ = \frac{1}{6}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right] + \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ \text{ [*]}.$$

---

[*] Tchélébi ne pose pas cette dernière formule même; il calcule directement les valeurs (1) et (2) dont il prend ensuite la moyenne arithmétique.

L'expression la plus générale de la méthode arabe serait de poser

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{m-p}{m}\right)^\circ\right] < \frac{1}{q}\left[\sin\left(\frac{m-p}{m}\right)^\circ - \sin\left(\frac{\overline{m-p-q}}{m}\right)^\circ\right];$$

$$\left[\sin 1^\circ - \sin\left(\frac{m-r}{m}\right)^\circ\right] > \frac{1}{s}\left[\sin\left(\frac{\overline{m-r+s}}{m}\right)^\circ - \sin\left(\frac{m-r}{m}\right)^\circ\right],$$

où

$$s \geqq 2r,$$

$$\sin 1^\circ = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{q+1}{q}\sin\left(\dfrac{m-p}{m}\right)^\circ + \dfrac{s-1}{s}\sin\left(\dfrac{m-r}{m}\right)^\circ \\ -\dfrac{1}{q}\sin\left(\dfrac{\overline{m-p-q}}{m}\right)^\circ + \dfrac{1}{s}\sin\left(\dfrac{\overline{m-r+s}}{m}\right)^\circ \end{array}\right\};$$

en prenant

$$p = r = 1, \quad q = s = 3, \quad m = 16,$$

on a la formule de Tchélébi.

§ III.

MÉTHODE DE PTOLÉMÉE POUR DÉTERMINER LA VALEUR DE cord. 1°.

I. (ALMAGESTE, édition de Halma, p. 26-29).

Côté du décagone régulier inscrit dans le cercle	cord. 36°
Côté du pentagone.	cord. 72°
Côté de l'hexagone.	cord. 60°
Côté du carré.	cord. 90°

II. (*Idem.*, p. 31-32.)

$$\text{cord.}\,\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{2r.\frac{2r-\sqrt{(2r)^2-(\text{cord.}\,\alpha)^2}}{2}}.$$

III. (*Idem*, p. 30-31.)

$$\text{cord.}\,(\alpha-\beta) = \frac{\text{cord.}\,\alpha\,.\,\text{cord.}\,(180^\circ-\beta) - \text{cord.}\,\beta\,.\,\text{cord.}\,(180^\circ-\alpha)}{2r}.$$

Connaissant cord. 72° et cord. 60°, on obtient, au moyen de la relation III,

$$\text{cord.}\,(72^\circ-60^\circ) = \text{cord.}\,12^\circ;$$

et de là, en employant trois et quatre fois de suite la formule II, on tire

$$\text{cord.}\left(\frac{3}{2}\right)^\circ = \text{cord.}\,\frac{12^\circ}{2^3}$$

et

$$\text{cord.}\left(\frac{3}{4}\right)^\circ = \text{cord.}\,\frac{12^\circ}{2^4}.$$

IV. (*Idem*, p. 34-35.)

$$\text{cord.}\,(\alpha+\beta) : \text{cord.}\,\alpha < (\alpha+\beta) : \alpha,$$

$\alpha+\beta$ et α étant des angles plus petits que 180° [*].

---

[*] Cela revient à énoncer pour des angles plus petits que 90°, que

$$\sin(\alpha+\beta) : \sin\alpha < (\alpha+\beta) : \alpha,$$

V. (ALMAGESTE, édition de Halma, p. 35, 36.)

En vertu du principe précédent, on a

$$\text{cord. } 1^\circ < \frac{4}{3}\,\text{cord.}\left(\frac{3}{4}\right)^\circ$$

et

$$\text{cord. } 1^\circ > \frac{2}{3}\,\text{cord.}\left(\frac{3}{2}\right)^\circ.$$

Pour le degré d'exactitude que Ptolémée voulait obtenir, les valeurs de $\frac{4}{3}$ cord. $\left(\frac{3}{4}\right)^\circ$ et de $\frac{2}{3}$ cord. $\left(\frac{3}{2}\right)^\circ$ deviennent égales. C'est donc leur valeur commune que Ptolémée assigne à la corde de 1°.

Mais, afin de pouvoir exprimer par une formule ce que la méthode de Ptolémée donne naturellement au delà, sans aucune considération nouvelle, je prendrai pour valeur de cord. 1° la moyenne arithmétique des deux autres valeurs qui l'entourent. En d'autres termes, je poserai, comme valeur approchée dans Ptolémée,

$$\text{cord. } 1^\circ = \frac{1}{3}\left[2\,\text{cord.}\left(\frac{3}{4}\right)^\circ + \text{cord.}\left(\frac{3}{2}\right)^\circ\right].$$

§ IV.

Discutons maintenant le degré d'approximation qu'offrent respectivement les deux méthodes dont je viens de présenter l'exposé. Pour

---

ou que

$$\cos\beta + \frac{\sin\beta}{\tang\alpha} < 1 + \frac{\beta}{\alpha};$$

mais on a séparément

$$\cos\beta < 1 \quad \text{et} \quad \frac{\sin\beta}{\tang\alpha} < \frac{\beta}{\alpha},$$

puisque

$$\sin\beta < \beta \quad \text{et} \quad \tang\alpha > \alpha;$$

donc, etc. C. Q. F. D.

donner aux deux relations qu'elles fournissent une forme plus appropriée à cette discussion, écrivons :

1°. La formule de Ptolémée,

$$\text{cord. } 1^\circ = \frac{2}{3}\,\text{cord.}\left(\frac{12}{16}\right)^\circ + \frac{1}{3}\,\text{cord.}\left(\frac{24}{16}\right)^\circ;$$

2°. La formule de Tchélébi,

$$\sin 1^\circ = \sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ + \frac{1}{6}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ\right].$$

On sait que si P, Q, R, S, X désignent les valeurs d'une fonction correspondant aux arguments p, q, r, s, x où P, Q, R, S sont connues, la formule d'interpolation de Lagrange donne

$$(\mathrm{A})\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{X} = {} & \frac{(x-q)(x-r)(x-s)}{(p-q)(p-r)(p-s)}\,\mathrm{P} + \frac{(x-p)(x-r)(x-s)}{(q-p)(q-r)(q-s)}\,\mathrm{Q} \\ & + \frac{(x-p)(x-q)(x-s)}{(r-p)(r-q)(r-s)}\,\mathrm{R} + \frac{(x-p)(x-q)(x-r)}{(s-p)(s-q)(s-r)}\,\mathrm{S}, \end{aligned}\right.$$

tandis que

$$k = (x-p)(x-q)(x-r)(x-s)$$

est le coefficient de l'erreur que comporte cette forme d'interpolation.

Pour deux valeurs connues de la fonction dont les arguments soient $p = \frac{12}{16}$, $q = \frac{24}{16}$, tandis que $x = \frac{16}{16}$, cette formule donne

$$(3)\qquad \mathrm{X} = \frac{2}{3}\mathrm{P} + \frac{1}{3}\mathrm{Q} \;\ldots\; k = -\frac{1}{8},$$

et telle est, en effet, la formule de Ptolémée.

Prenant ensuite trois valeurs de la fonction dont les arguments soient $p = \frac{12}{16}$, $q = \frac{15}{16}$, $r = \frac{18}{16}$, tandis que $x = \frac{16}{16}$, la formule de Lagrange donne

$$(4)\qquad \mathrm{X} = -\frac{1}{9}\mathrm{P} + \frac{8}{9}\mathrm{Q} + \frac{2}{9}\mathrm{R} \;\ldots\; k = -\frac{1}{512}.$$

De la comparaison des valeurs de k il suit que, toutes choses pareilles, et en tant que l'exactitude de l'interpolation dépend du nombre des valeurs connues de la fonction et de la distance de leurs arguments à celui de la valeur cherchée, l'erreur de la méthode arabe serait *soixante-quatre* fois plus petite que celle de la méthode de Ptolémée.

Mais observons maintenant que la formule (4) ne s'identifie pas avec la formule arabe, celle-ci faisant la valeur de sin 1°,

$$= -\frac{1}{6}P + Q + \frac{1}{6}R.$$

Désignant cette dernière valeur par X_1, on aura

$$X = X_1 + \frac{1}{18}(P + R - 2Q).$$

Rendons-nous compte d'abord de la valeur que prend l'expression $\frac{1}{18}(P + R - 2Q)$ pour les fonctions P, R, Q proposées dans le cas que nous discutons. Nous verrons que cette quantité, à laquelle nous aurons encore à revenir, est extrêmement petite.

En effet, en développant sin $\left(\frac{12}{16}\right)^0$, sin $\left(\frac{15}{16}\right)^0$ et sin $\left(\frac{18}{16}\right)^0$ en série, et formant ensuite l'expression $\frac{1}{18}(P + R - 2Q)$, les termes qui contiennent la première puissance des arguments se détruisent; conséquemment, ce sera la quantité provenant du terme suivant de la série qui indiquera l'ordre de grandeur de l'expression $\frac{1}{18}(P + R - 2Q)$.

Cette quantité est

$$\frac{1}{18}\left[-\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{(16.\rho)^3}(18^3 + 12^3 - 2.15^3)\right]$$
$$= -\frac{1}{546,1 \times 188091,\ldots} < \frac{1}{100.000.000},$$

abstraction faite du signe, ρ étant l'arc égal au rayon exprimé en degrés, et

$$\rho^3 = 188091,\ldots.$$

Il résulte de là que, pour le cas que nous discutons, la différence entre X et X_1 ne s'élève pas encore à un cent-millionième de l'unité.

§ V.

Comme la forme d'interpolation adoptée par Tchélébi ne s'accorde pas avec la formule de Lagrange, recherchons, avant d'aller plus loin, si parmi les formules d'interpolation modernes, il y en a une qui correspond plus exactement à la formule de Tchélébi. Pour cela, représentons (comme cela est connu) par les notations du tableau ci-après une suite d'arguments à différence constante, les valeurs d'une fonction correspondant à ces arguments, et les différences première, deuxième, etc., de ces valeurs de fonction :

$a-2w$	$f(a-2w)$			
		$f'\left(a-\frac{3}{2}\right)$		
$a-w$	$f(a-w)$		$f''(a-1)$	
		$f'\left(a-\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)$
a	fa		$f''a$	
		$f'\left(a+\frac{1}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)$
$a+w$	$f(a+w)$		$f''(a+1)$	
		$f'\left(a+\frac{3}{2}\right)$		$f'''\left(a+\frac{3}{2}\right)$
$a+2w$	$f(a+2w)$		$f''(a+2)$	
		$f'\left(a+\frac{5}{2}\right)$		
$a+3w$	$f(a+3w)$			

Employons, en outre, les notations suivantes,

$$\begin{aligned}
f\left(a+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[fa+f(a+w)\right],\\
f'a &= \frac{1}{2}\left[f'\left(a+\frac{1}{2}\right)+f'\left(a-\frac{1}{2}\right)\right],\\
f''\left(a+\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left[f''a+f''(a+1)\right],\\
f'''a &= \frac{1}{2}\left[f'''\left(a+\frac{1}{2}\right)+f'''\left(a-\frac{1}{2}\right)\right],
\end{aligned}$$

et désignons par $f(a+nw)$ la valeur cherchée de la fonction correspondant à un argument proposé $a+nw$.

Remplaçant donc

$$p,\ q,\ r,\ s,\ x \quad \text{par} \quad a,\ a+w,\ a+2w,\ a+3w,\ a+nw,$$

la formule de Lagrange devient

$$(\mathrm{B})\quad \left\{\begin{aligned} &f(a+nw) = fa + nf'\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}f''(a+1)\\ &+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}}{1.2.3}f'''\left(a+\tfrac{3}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}}{1.2.3.4}f^{\mathrm{iv}}(a+2),\end{aligned}\right.$$

et le coefficient de l'erreur sera

$$nw.(n-1)w.(n-2)w.(n-3)w,$$

d'où il suit que, selon les différentes places que peut prendre $a+nw$ dans la suite des arguments connus, la formule (B) comportera des erreurs plus ou moins grandes, et qu'il y a lieu à chercher si, pour l'un ou l'autre de ces cas, on peut établir des formules plus exactes. On sait qu'une discussion détaillée prouve que les formules les plus avantageuses sont :

Pour $a+nw$ compris entre a et $a+w$,

$$(\mathrm{C})\quad \left\{\begin{aligned} &f(a+nw) = fa + nf'\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-1}}{1.2}f''a\\ &\qquad + \frac{\overline{n+1}.n.\overline{n-1}}{1.2.3}f'''\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \ldots,\end{aligned}\right.$$

Pour $a+nw$ compris entre a et $a-w$, n étant négatif,

$$(\mathrm{D})\quad \left\{\begin{aligned} &f(a+nw) = fa + nf'\left(a-\tfrac{1}{2}\right) + \frac{\overline{n+1}.n}{1.2}f''a\\ &\qquad + \frac{\overline{n+1}.n.\overline{n-1}}{1.2.3}f'''\left(a-\tfrac{1}{2}\right) + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Pour n très-près de 0,

$$(\mathrm{E})\quad \left\{\begin{aligned} &f(a+nw) = fa + nf'a + \frac{n.n}{1.2}f''a + \frac{\overline{n^2-1}.n}{1.2.3}f'''a\\ &\qquad + \frac{\overline{n^2-1}.n^2}{1.2.3.4}f^{\mathrm{iv}}a + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Pour n très-près de $\frac{1}{2}$,

$$(\mathrm{F})\quad \left\{\begin{aligned} &f(a+nw) = f\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \left(n-\tfrac{1}{2}\right)f'\left(a+\tfrac{1}{2}\right)\\ &+\frac{n.\overline{n-1}}{1.2}f''\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{n.\overline{n-\frac{1}{2}}.\overline{n-1}}{1.2.3}f'''\left(a+\tfrac{1}{2}\right) + \ldots.\end{aligned}\right.$$

Nous avons

$$f(a-w) = \sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ},$$
$$fa \qquad = \sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ},$$
$$f(a+w) = \sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ},$$
$$n = +\frac{1}{3},$$

et nous pouvons former, au moyen de ces trois valeurs, les quantités

$$f'\left(a-\frac{1}{2}\right), \quad f'\left(a+\frac{1}{2}\right), \quad f''a,$$
$$f\left(a+\frac{1}{2}\right), \qquad f'a.$$

Comme n est positif, on ne choisira pas la formule (D) dans le cas qui nous occupe; et comme nous ne pouvons pas former $f''\left(a+\frac{1}{2}\right)$, la formule (F) doit pareillement être rejetée, parce qu'en l'employant, on ne tirerait pas parti de la valeur de fonction $f(a-w)$.

Nous n'aurons donc à comparer la formule de Tchélébi qu'aux formules (C) et (E). L'une et l'autre de ces formules donnent identiquement

$$\sin\left(\frac{16}{16}\right)^{\circ} = -\frac{1}{9}\sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ} + \frac{8}{9}\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ} + \frac{2}{9}\sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ},$$

c'est-à-dire la valeur de X tirée déjà ci-dessus, équation (4), de la formule de Lagrange [*]; ainsi, pour le fond, la formule de Tchélébi approcherait également de l'une ou de l'autre de ces formules. Mais, par rapport à la *forme*, il mérite d'être observé que celle de la formule de Tchélébi est précisément celle de la formule (E), attendu

[*] Cela doit être parce que les avantages des formes particulières, c'est-à-dire les différences des valeurs qu'elles fournissent entre elles, ou d'avec celles de la formule générale, sont d'un ordre de petitesse plus élevé que ne l'est celui des quantités qu'on néglige dans le cas actuel.

que l'on a

$$\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ} = fa$$

et

$$\frac{1}{6}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ} - \sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ}\right] = nf'a,$$

la quantité négligée par Tchélébi étant

$$\frac{1}{18}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ} - 2\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ} + \sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ}\right] = \frac{n.n}{1.2}f''a,$$

quantité discutée ci-dessus, § IV, comme étant la différence entre X et X_1.

§ VI.

Enfin, pour déterminer directement le degré d'exactitude respective des formules de Ptolémée et de Tchélébi, développons en série les quantités de l'une et de l'autre formule, en substituant à celle de Ptolémée la suivante :

$$\sin\left(\frac{8}{16}\right)^{\circ} = \frac{2}{3}\cdot\sin\left(\frac{6}{16}\right)^{\circ} + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ}.$$

Dans l'une et dans l'autre formule c'est la quantité provenant du second terme de la série qui indique l'ordre de l'erreur.

Cette quantité est :

1°. Pour la formule de Ptolémée,

$$\text{erreur de } \sin 30' = -\frac{208}{24576\,\rho^3} = -\frac{1}{118,15 \times 188091,\ldots},$$

ou

$$< \frac{1}{20.000.000},$$

abstraction faite du signe; donc,

$$\text{l'erreur de cord. } 1^{\circ} < \frac{1}{10.000.000},$$

la valeur de Ptolémée étant trop faible.

2°. Pour la formule de Tchélébi,

$$\text{erreur de } \sin 1^\circ = +\frac{37}{24576\,.\,\rho^3} = +\frac{1}{664,21\times 188091,\ldots},$$

ou

$$< \frac{1}{100.000.000},$$

la valeur de Tchélébi étant trop forte [*].

Et en comparant directement les coefficients des deux quantités qu'on vient d'obtenir, il résulte

$$\frac{\text{erreur de } \sin 1^\circ \text{ d'après Tchélébi}}{\text{erreur de cord. } 1^\circ \text{ d'après Ptolémée}} = \frac{37}{416} \text{ ou } = \frac{1}{11} \text{ environ.}$$

C'est ce rapport qui est la mesure de la supériorité réelle de la méthode de Tchélébi sur celle de Ptolémée.

---

[*] Tchélébi (*voir* SÉDILLOT, *Oloug-Beg*, p. 76) fait

$$\sin\left(\frac{15}{16}\right)^\circ = 0^p\,58'\,54''\;\;7'''\,59^{iv}\;\;1^{v},$$

$$\sin\left(\frac{12}{16}\right)^\circ = 0^p\,47'\;\;7''\,21'''\;\;9^{iv}\,30^{v},$$

$$\sin\left(\frac{18}{16}\right)^\circ = 1^p\,10'\,40''\,52'''\,34^{iv}\;\;0^{v};$$

en substituant ces quantités dans notre formule

$$\left[X_1 = Q + \frac{1}{6}(R-P)\right],$$

on obtient

$$\sin 1^\circ = 1^p\,2'\,49''\,43'''\,13^{iv}\,6^{v},$$

tandis que le calcul de Tchélébi (*Idem*, p. 77) donne

$$1^p\,2'\,49''\,43'''\,13^{iv}\,5^{v}\,30^{vi}.$$

valeur *moins forte* de 30^{vi}. Mais cette différence est tout à fait accidentelle, et provient de ce que Tchélébi néglige dans ce calcul les quantités de la sixième sexagésimale. Ainsi, en prenant le tiers de FQ, il néglige 20^{vi}, et, en prenant le tiers de HS, il néglige 40^{vi}. En tenant compte de ces quantités, la demi-différence qui est le résultat final du calcul, sera

$$0.0.0.0.22.25.20,$$

et la valeur de sin 1° sera exactement celle que donne notre formule.

J'ai montré ci-dessus, § IV, qu'avec les valeurs connues de la fonction qu'emploie Tchélébi, ce rapport aurait pu être plus petit encore et ne s'élever qu'à $\frac{1}{64}$. La diminution de l'exactitude provient de la quantité négligée, comme nous avons vu, par Tchélébi, savoir

$$X - X_1 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{18}\left[\sin\left(\frac{18}{16}\right)^{\circ} - 2\sin\left(\frac{15}{16}\right)^{\circ} + \sin\left(\frac{12}{16}\right)^{\circ}\right],$$

qui est négative et d'environ un cent-millionième. Si on la néglige, l'ordre de l'exactitude retombe au moins à l'ordre de cette quantité même. Et l'ordre d'exactitude de la formule de Ptolémée étant d'environ un dix-millionième, l'exactitude de la formule arabe ne lui sera plus supérieure que de dix fois environ, ainsi que nous l'avons trouvé.

§ VII.

Seconde méthode de Tchélébi [*].

Première partie.

Plaçant sur une circonférence de cercle, bout à bout, trois arcs de longueur égale AB, BC, CD, on aura, dans le quadrilatère ABCD inscrit dans le cercle, en vertu d'un théorème connu de Ptolémée [**],

$$AC.BD = AB.CD + AD.BC$$

ou

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + AD.AB,$$

donc, en désignant l'arc AB par α,

$$(\text{cord. } 2\alpha)^2 = (\text{cord. } \alpha)^2 + \text{cord. } 3\alpha . \text{cord. } \alpha;$$

mais, en vertu du théorème ci-dessus, § III, n° II, de Ptolémée, on a aussi

$$(\text{cord. } 2\alpha)^2 = (2r)^2 - \left[2r - \frac{(\text{cord. } \alpha)^2}{r}\right]^2 = 4(\text{cord. } \alpha)^2 - \frac{(\text{cord. } \alpha)^4}{r^2};$$

[*] Sédillot, *Tables d'Oloug-Beg*, p. 77-83.

[**] Almageste, I, 9, édition de Halma, vol. I, p. 29.

donc

$$(\text{cord}.\,\alpha)^2 + \text{cord}.\,3\alpha.\,\text{cord}.\,\alpha = 4(\text{cord}.\,\alpha)^2 - \frac{(\text{cord}.\,\alpha)^4}{r^2},$$

ou

$$\text{cord}.\,3\alpha = 3\,\text{cord}.\,\alpha - \frac{(\text{cord}.\,\alpha)^3}{r^2};$$

et, puisque

$$\text{cord}.\,\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2},$$

on aura, en écrivant α' en place de $\frac{\alpha}{2}$,

$$\sin 3\alpha' = 3\sin\alpha' - 4\frac{(\sin\alpha')^3}{r^2}.$$

Tel est essentiellement le raisonnement par lequel Tchélébi démontre que

$$\sin 1^\circ = \frac{1}{3}\sin 3^\circ + \frac{4}{3}\frac{(\sin 1^\circ)^3}{r^2},$$

ou, en prenant $\sin 1^\circ$ pour inconnue,

$$x = \frac{1}{3}\sin 3^\circ + \frac{4}{3r^2}x^3.$$

Comme cette démonstration ne suppose en aucune façon que l'arc AB ait la valeur déterminée de 2° (quoique Tchélébi, ayant en vue son objet particulier, opère dès l'abord sur un arc auquel il assigne la valeur spéciale dont il aura besoin dans la suite), nous sommes en droit de dire que l'auteur arabe établit en cet endroit la relation générale par laquelle la trisection de l'angle se ramène à une équation du troisième degré.

J'ai montré, dans les Additions à mon édition de l'*Algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 125, qu'un géomètre arabe, qui florissait au commencement du XI^e siècle, Aboûl Djoûd, en résolvant un problème proposé par le célèbre Albîroûnî, avait déjà donné cette relation pour le cas *particulier* de $\alpha' = 10^\circ$, qui se présente dans la construction de l'ennéagone régulier inscrit dans le cercle.

Ainsi, le passage de Tchélébi que nous fait connaître M. Sédillot, et qui traite le cas *général*, est la preuve d'un progrès continuel des sciences mathématiques en Orient pendant le moyen âge, et il y a lieu de croire que de semblables preuves se multiplieront à mesure qu'on explorera les œuvres, pour la plupart inconnues encore, des géomètres et des astronomes arabes et persans.

§ VIII.

Seconde partie.

Étant proposée l'équation du troisième degré

$$X = \frac{A + X^3}{B} \quad \text{ou} \quad BX - A = X^3,$$

X sera, en vertu de cette relation même, fonction de A, de sorte que, si l'on conçoit A développé suivant les puissances descendantes d'une certaine quantité, X pourra généralement être développé suivant les puissances descendantes de la même quantité. Mais c'est ce qui a lieu dans le cas actuel, le terme connu de l'équation du troisième degré étant exprimé en sexagènes et sexagésimales; et de là résulte le mode suivant de résolution, qui n'est autre chose qu'une application de la méthode des coefficients indéterminés.

Soient

$$\begin{aligned} X &= \phantom{am + {}} x_0 + x_1\frac{1}{m} + x_2\frac{1}{m^2} + x_3\frac{1}{m^3} + \ldots, \\ A &= am + a_0 + a_1\frac{1}{m} + a_2\frac{1}{m^2} + a_3\frac{1}{m^3} + \ldots, \\ B &= bm; \end{aligned}$$

donc

$$BX - A \quad = \quad X^3$$

$$\left.\begin{aligned} &= (bx_0 - a)m \\ &+ bx_1 - a_0 \\ &+ (bx_2 - a_1)\frac{1}{m} \\ &+ (bx_3 - a_2)\frac{1}{m^2} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right| \begin{aligned} & \\ &= x_0^3 \\ &+ (3x_0^2 x_1)\frac{1}{m} \\ &+ (3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2)\frac{1}{m^2} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

on aura

$$(1)\left\{\begin{aligned}
&x_0 = \frac{a}{b},\\
&x_1 = \frac{1}{b}(x_0^3 + a_0),\\
&x_2 = \frac{1}{b}(3x_0^2 x_1 + a_1),\\
&x_3 = \frac{1}{b}(3x_0^2 x_2 + 3x_0 x_1^2 + a_2),\\
&x_4 = \frac{1}{b}(3x_0^2 x_3 + 6x_0 x_1 x_2 + x_1^3 + a_3),\\
&x_5 = \frac{1}{b}(3x_0^2 x_4 + 6x_0 x_1 x_3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_0 x_2^2 + a_4),\\
&x_6 = \frac{1}{b}(3x_0^2 x_5 + 6x_0 x_1 x_4 + 3x_1^2 x_3 + 6x_0 x_2 x_3 + 3x_1 x_2^2 + a_5),\\
&\quad\text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

Tandis que b, a, a_0, a_1, a_2, etc. sont des nombres entiers, x_0, x_1, x_2, etc., ne seront généralement pas des nombres entiers, mais seront composés d'une partie entière et d'une partie fractionnaire, soit

$$x_0 = x'_0 + \frac{v'_0}{b}, \quad \text{etc.}$$

Donc, si l'on désire que, dans le développement de X suivant les puissances descendantes de m, les coefficients soient des nombres entiers, on formera les quantités suivantes :

$$(\mathrm{II})\qquad\left|\begin{aligned}
&x_0 = x'_0 + \frac{v'_0}{b},\\
&x_1 + \frac{mv'_0}{b} = x'_1 + \frac{v'_1}{b},\\
&x_2 + \frac{mv'_1}{b} = x'_2 + \frac{v'_2}{b},\\
&x_3 + \frac{mv'_2}{b} = x'_3 + \frac{v'_3}{b},\\
&x_4 + \frac{mv'_3}{b} = x'_4 + \frac{v'_4}{b},\\
&\quad\text{etc.},
\end{aligned}\right.$$

et l'on aura rigoureusement

$$X = x'_0 + x'_1 \frac{1}{m} + x'_2 \frac{1}{m^2} + x'_3 \frac{1}{m^3} + x'_4 \frac{1}{m^4} + \ldots [*].$$

§ IX.

L'emploi de ce mode de résolution numérique, dans lequel on substitue à l'équation proposée du troisième degré une infinité d'équations linéaires, a pour condition que le diviseur B soit d'un ordre supérieur à celui de l'inconnue X.

Supposons, en effet, pour fixer les idées, que dans le développement suivant les puissances descendantes de m, le premier terme de X soit multiplié en m^0 [**], de sorte que X et X^3 soient du même ordre. Imaginons que les premiers membres des équations (I) soient placés sur une coulisse verticale. Si l'ordre de B est supérieur de plus d'un degré à celui de X, cela revient à faire monter la coulisse; les équations (I) qu'on obtient donneront encore les x par des relations linéaires. Si, au contraire, l'ordre de B est égal ou inférieur à celui de X, cela revient à faire descendre la coulisse, et alors, ou bien on retombera dans une équation du troisième degré, ou bien les relations qui devraient donner les x, renfermeront des indéterminées.

Quant à la quantité A, il suffit que son ordre ne soit pas supérieur à celui de BX [***], car si A est d'un ordre inférieur quelconque, cela revient seulement à rendre nulles quelques-unes des quantités a, a_0, a_1, etc., ce qui n'empêche pas les équations (I) de donner les x par des relations linéaires.

§ X.

La méthode que je viens d'exposer est au fond celle qui est em-

[*] Cette valeur représente celle des trois racines qui devient nulle pour $A = 0$.

[**] Cette supposition est permise, parce qu'elle revient seulement à choisir convenablement l'unité à laquelle on rapporte les nombres qui expriment A, B et X.

[***] Si, à la manière des Arabes, on considère A, B et X comme des quantités nécessairement positives, cette condition est remplie par cela même qu'on pose l'équation

$$BX - A = X^3.$$

ployée par Tchélébi pour calculer la valeur de sin 1° au moyen de la formule

$$x = \frac{\frac{r^2}{4}\sin 3^\circ + x^3}{\frac{3}{4}r^2},$$

en posant $r = 60$, et en exprimant $\frac{r^2}{4}\sin 3^\circ$ en sexagènes et sexagésimales.

Mais soit que Tchélébi n'ait pas connu la véritable loi de formation des seconds membres des équations (I), soit qu'elle lui ait paru trop compliquée, il substitue à cette manière d'obtenir les coefficients de la série qui exprime l'inconnue, le procédé suivant. Il fait

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{l}
\frac{a}{b} = a'_0 + \frac{\alpha_0}{b},\\[2mm]
\frac{m\alpha_0 + (a'_0)^3 + a_0}{b} = a'_1 + \frac{\alpha_1}{b},\\[2mm]
\frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + a_1}{b} = a'_2 + \frac{\alpha_2}{b},\\[2mm]
\frac{m\alpha_2 + m^2\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3\right] + a_2}{b} = a'_3 + \frac{\alpha_3}{b},\\[2mm]
\frac{m\alpha_3 + m^3\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2} + \frac{a'_3}{m^3}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3\right] + a_3}{b} = a'_4 + \frac{\alpha_4}{b},\\[2mm]
\text{etc.},
\end{array}\right.$$

où a'_0, a'_1, etc., désignent chacun la partie entière contenue dans le premier membre des équations respectives; puis il prend

$$\sin 1^\circ = a'_0 + a'_1\frac{1}{m} + a'_2\frac{1}{m^2} + a'_3\frac{1}{m^3} + a'_4\frac{1}{m^4} + \ldots.$$

§ XI.

Cependant, comme il ne s'agit ici que d'une méthode d'approximation, cette circonstance que le procédé de Tchélébi s'éloigne des formules rigoureuses, ne l'empêche pas d'être admissible, pourvu que le résultat numérique soit le même. Car quelle que soit d'ailleurs la manière dont on forme les premiers membres des équations (II), § VIII, et des équations (III), § X, il importe seulement que la partie entière contenue dans les premiers membres de deux équations correspondantes soit la même, ce qui peut très-bien avoir lieu sans que ces premiers membres soient égaux eux-mêmes. Si, par exemple, dans la deuxième équation (II) et la deuxième équation (III), on obtient $\alpha_1 < \nu'_1$, cela n'empêchera pas qu'on n'ait à l'équation suivante $x'_2 = a'_2$, surtout si la différence entre x_2 et $\dfrac{m\left[\left(a'_0+\frac{a'_1}{m}\right)^3-(a'_0)^3\right]+a_1}{b}$ agit en sens contraire à l'erreur provenant de la différence entre α_1 et ν'_1; et il en sera de même pour les équations suivantes. Or, la compensation que je viens d'indiquer, a réellement lieu dans le cas actuel, ainsi qu'il résulte de la discussion détaillée suivante. On a

1°. $x'_0 + \dfrac{\nu'_0}{b} = x_0 = \dfrac{a}{b} = a'_0 + \dfrac{\alpha_0}{b}$;

2°. $$x'_1 + \frac{\nu'_1}{b} = \frac{x_0^3 + a_0 + m\alpha_0}{b} = \frac{m\alpha_0 + \left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 + a_0}{b}$$

$$= \frac{m\alpha_0 + (a'_0)^3 + a_0 + \left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right]}{b}$$

$$= a'_1 + \frac{\alpha_1 + \left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right]}{b};$$

3°. $$x'_2 + \frac{\nu'_2}{b} = \frac{3x_0^2 x_1 + a_1 + m\nu'_1}{b} = \frac{m\nu'_1 + a_1 + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right)}{b}$$

$$= \frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + a_1 + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right)}{b},$$

et, en posant

$$\left[\left(a'_0 + \frac{\alpha_0}{b}\right)^3 - (a'_0)^3\right] - \left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] = \varepsilon,$$

où ε est une quantité positive, on aura

$$x'_2 + \frac{v'_2}{b} = \frac{m\alpha_1 + m\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3 - (a'_0)^3\right] + m\varepsilon + a_1 + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right)}{b}$$

$$= a'_2 + \frac{\alpha_2 + m\varepsilon + \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right)}{b};$$

4°. $$x'_3 + \frac{v'_3}{b} = \frac{3x_0^2x_2 + 3x_0x_1^2 + a_2 + mv'_2}{b}$$

$$= \frac{mv'_2 + a_2 + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \frac{3a_1}{b}x_0^2 + \frac{15a_0}{b^2}x_0^4 + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b}$$

$$= \frac{m\alpha_2 + m^2\varepsilon + m\left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right) + a_2 + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \frac{3a_1}{b}x_0^2 + \frac{15a_0}{b^2}x_0^4 + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b};$$

et, en posant

$$m\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3\right] - \left(\frac{3a_0}{b}x_0^2 + \frac{3}{b}x_0^5\right) = \varepsilon',$$

où ε' est une quantité positive, on aura

$$x'_3 + \frac{v'_3}{b} = \frac{m\alpha_2 + m^2\varepsilon + m^2\left[\left(a'_0 + \frac{a'_1}{m} + \frac{a'_2}{m^2}\right)^3 - \left(a'_0 + \frac{a'_1}{m}\right)^3\right] - m\varepsilon' + a_2 + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \ldots + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b}$$

$$= a'_3 + \frac{\alpha_3 + m^2\varepsilon - m\varepsilon' + \left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \frac{3a_1}{b}x_0^2 + \frac{15a_0}{b^2}x_0^4 + \frac{12}{b^2}x_0^7\right)}{b}.$$

Or, comme Tchélébi pose

$$\frac{r^2}{4}\sin 3^\circ = 47^r\, 6^p\, 8'\, 29''\, 53'''\, 37^{\text{iv}}\, 3^{\text{v}}\, 45^{\text{vi}},$$

de sorte que

$$a = 47, \quad a_0 = 6, \quad a_1 = 8, \ldots,$$

on obtient, en faisant le calcul des quantités ε et ε',

$$\varepsilon = \frac{2}{60} + \frac{9}{60^2} + \frac{30}{60^3} + \frac{57}{60^4} + \frac{46}{60^5} + \frac{40}{60^6},$$

$$\varepsilon' = 2 + \frac{7}{60} + \frac{53}{60^2} + \frac{15}{60^3} + \frac{44}{60^4} + \ldots,$$

$$m^2\varepsilon - m\varepsilon' = 60(60\varepsilon - \varepsilon') = 1 + \frac{37}{60} + \frac{42}{60^2} + \frac{2}{60^3} + \ldots,$$

d'où il résulte que l'influence de l'erreur de la troisième opération $\left(\text{savoir } 60^2\varepsilon = 129 + \frac{30}{60} + \ldots\right)$ et l'erreur propre de la quatrième opération [*] $\left(\text{savoir } 60\,\varepsilon' = 127 + \frac{53}{60} + \ldots\right)$ se détruisent presque complétement, leur différence ne s'élevant pas encore à $\frac{1}{78}$ de chacune de ces deux quantités séparément.

Aussi cette méthode donne-t-elle un résultat plus exact encore que la première (celle dont j'ai donné l'exposé au § II); car en faisant tout ce calcul d'après le procédé de Tchélébi, formules (III), § X, j'obtiens pour cinquième reste $a'_4 = 11$ [**], résultat exact, tandis que la valeur 13 fournie par la première méthode est trop forte.

Je ne pousserai pas plus loin cet examen, parce qu'il nécessiterait pour les termes suivants de la série des formules et des calculs plus compliqués encore que ceux qui précèdent, et je crains déjà d'avoir paru au lecteur donner trop d'étendue à cette discussion. Par cette raison, je supprime aussi quelques autres considérations auxquelles cette dernière méthode de Tchélébi pourrait donner lieu, notamment en ce qui concerne la convergence de la série.

Je dirai seulement, pour me résumer, que le procédé de Tchélébi, abstraction faite même de l'exactitude du résultat obtenu, est surtout intéressant à raison de l'ingénieuse idée sur laquelle il est fondé, savoir, de résoudre numériquement et par un développement en série une équation du troisième degré, et, sous ce point de vue, il me paraît digne, au plus haut degré, de l'attention des historiens des sciences mathématiques. Ainsi que l'a pensé M. Sédillot, cette méthode remarquable nous offre une nouvelle preuve des progrès réels que les sciences mathématiques ont faits chez les Arabes.

---

[*] A la quantité $\left(\frac{3a_0^2}{b^2}x_0 + \ldots + \frac{12}{b^2}x_0^2\right)$ près.

[**] Le manuscrit porte 51 (*noûn-élif*), leçon qui a, avec raison, paru douteuse à M. Sédillot (*Oloug-Beg*, p. 80, 1re ligne du *Commentaire*). La correction consiste simplement à mettre deux points au-dessous de la ligne au lieu d'un point au-dessus (*yá-élif* au lieu de *noûn élif*).

Note.

Pour qu'on puisse juger de l'exactitude absolue des résultats donnés par les deux méthodes arabes que je viens d'examiner, j'ai calculé les valeurs de sin 1° et de sin 3° jusqu'à la douzième décimale [*], savoir

$$\sin 1^\circ = 0{,}017.452.406.437,$$
$$\sin 3^\circ = 0{,}052.335.956.243;$$

d'où il suit, en faisant le rayon $= 60^p$,

$$\sin 1^\circ = 1^p\ 2'\ 49''\ 43'''\ 11^{\text{IV}}\ 14^{\text{V}}\ 44^{\text{VI}},$$
$$\frac{1}{4}\sin 3^\circ = 47'\ 6''\ 8'''\ 29^{\text{IV}}\ 53^{\text{V}}\ 37^{\text{VI}}.$$

Tchélébi obtient :

Par la première méthode,

$$\sin 1^\circ = 1^p\ 2'\ 49''\ 43'''\ 13^{\text{IV}}\ 5^{\text{V}}\ 30^{\text{VI}};$$

Par la seconde méthode,

$$\sin 1^\circ = 1^p\ 2'\ 49''\ 43'''\ 11^{\text{IV}};$$

et il prend

$$\frac{1}{4}\sin 3^\circ = 47'\ 6''\ 8'''\ 29^{\text{IV}}\ 53^{\text{V}}\ 37^{\text{VI}}\ 3^{\text{VII}}\ 45^{\text{VIII}}.$$

---

[*] En faisant

$$\sin 1^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{180}\right) = \frac{\pi}{180} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5,$$

et, de même,

$$\sin 3^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{60}\right).$$