JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

**Sur l'équation différentielle $\frac{d.\left(x-x^3\right)\frac{dy}{dx}}{dx}-xy=0$**

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 19 (1854), p. 151-152.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__151_0>

# SUR L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$\frac{d.(x - x^3)\frac{dy}{dx}}{dx} - xy = 0;$$

## PAR J. LIOUVILLE.

C'est l'équation à laquelle conduit la fonction elliptique complète de première espèce; et comme cette équation ne change pas quand on y remplace $x$ par $\sqrt{1 - x^2}$, on en a de suite deux intégrales particulières, d'où l'on a conclu l'intégrale générale. Ces deux intégrales sont

$$y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - x^2 t^2)}}$$

et

$$y = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - t^2 + x^2 t^2)}}.$$

Elles se présentent sous forme réelle quand $x^2$ est $< 1$, comme on le suppose ordinairement. Mais si l'on prenait $x^2 > 1$, la première deviendrait imaginaire. Or j'observe qu'en y séparant la partie réelle de l'imaginaire, on est conduit alors aux deux intégrales que voici :

$$y = \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - x^2 t^2)}}$$

et

$$y = \int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(x^2 t^2 - 1)}}.$$

Des quatre valeurs particulières de $y$ que je viens d'écrire, la dernière doit être supprimée comme rentrant dans la seconde, à laquelle on la réduit en faisant

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 + \theta^2(x^2 - 1)}};$$

mais la troisième donne une intégrale distincte, qui remplacera la première dans la composition de l'intégrale générale pour le cas de $x^2 > 1$ : en posant $xt = \theta$, elle prend cette forme simple

$$y = \int_0^1 \frac{d\theta}{\sqrt{(1 - \theta^2)(x^2 - \theta^2)}}.$$

Ainsi, A et B désignant deux constantes arbitraires, l'intégrale complète de notre équation différentielle est

$$y = A\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - x^2 t^2)}} + B\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - t^2 + x^2 t^2)}},$$

pour $x^2 < 1$, et

$$y = A\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(x^2 - t^2)}} + B\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - t^2 + x^2 t^2)}},$$

pour $x^2 > 1$.