JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Note sur la projection stéréographique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 132-138.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__132_0>

NOTE

SUR LA PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE;

PAR M. E. CATALAN.

Le dernier cahier du *Journal de l'École Polytechnique* renferme, entre autres matières, la solution d'un problème que l'on peut énoncer ainsi : *Trouver tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur une sphère donnée.* Cette solution, fondée sur les théories les plus élevées du calcul intégral, m'a semblé d'une complication peu en rapport avec la nature du sujet. On va voir, en effet, que le problème dont il s'agit peut être résolu à l'aide des plus simples notions de Géométrie et d'Algèbre.

1. *Les projections stéréographiques de deux cercles orthogonaux appartenant à une sphère donnée, sont des cercles orthogonaux.* Réciproquement, *à deux cercles orthogonaux tracés sur le plan qui sert de* TABLEAU *correspondent, sur la sphère, deux cercles orthogonaux.*

D'après ces deux lemmes, pour résoudre la question qui nous occupe, il suffit de *déterminer tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur un plan.*

2. Considérons deux séries de cercles tels, que chacun de ceux de la première série coupe orthogonalement tous ceux qui appartiennent à la seconde. Si nous rapportons ces cercles à deux axes rectangulaires quelconques, nous pourrons les représenter par les deux équations

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2, \tag{1}$$

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\rho^2, \tag{2}$$

dans lesquelles a, b sont des fonctions inconnues du *paramètre* r, et α, β des fonctions inconnues du paramètre ρ.

La condition d'*orthogonalité* donne d'abord

$$(x-a)(x-\alpha)+(y-b)(y-\beta)=0;$$

puis, par l'élimination de x et de y,

$$(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2=r^2+\rho^2,$$

ou

$$(a^2+b^2-r^2)+(\alpha^2+\beta^2-\rho^2)=2(a\alpha+b\beta). \tag{3}$$

3. L'équation (3), dans laquelle r et ρ sont *deux variables indépendantes*, est impossible, à moins que son second membre ne se réduise à la forme $2[f(r)+\varphi(\rho)]$: en effet, elle doit être identique par rapport aux deux variables, et son premier membre est déjà de cette forme.

Cela posé, de

$$a\alpha+b\beta=f(r)+\varphi(\rho), \tag{4}$$

on conclut, en prenant les dérivées relatives à r,

$$a'\alpha+b'\beta=f'(r),$$

ou

$$\alpha+\frac{b'}{a'}\beta=\frac{f'(r)}{a'}. \tag{5}$$

Cette nouvelle relation exige, évidemment, que $\frac{b'}{a'}$ et $\frac{f'(r)}{a'}$ soient des constantes k et η. Ainsi,

$$b'=ka',\quad f'(r)=\eta a';$$

puis, h étant une nouvelle constante,

$$b=k(a-h); \tag{6}$$

puis encore, par l'équation (5),

$$\beta=-\frac{1}{k}(\alpha-\eta)\ [*]. \tag{7}$$

[*] On aurait pu tirer ces formules de l'équation (4), directement et sans employer la considération de la dérivée ; mais la solution eût été moins claire et peut-être moins rigoureuse.

4. Ces valeurs des ordonnées b et β, substituées dans l'équation (3), donnent, par un calcul facile,

$$r^2 = a^2 + b^2 - 2\eta(a-h) - l^2,$$
$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2h\alpha + l^2,$$

l^2 désignant une constante.

Par suite, les équations (1) et (2) deviendront

(8) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + 2\eta(a-h) + l^2 = 0,$$

(9) $$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2h\alpha - l^2 = 0.$$

5. Pour simplifier ces résultats, observons que, d'après les équations (6) et (7), les centres de nos deux séries de cercles sont situés sur deux droites perpendiculaires entre elles. Si donc nous prenons ces deux lignes pour axes, nous aurons

$$k = 0,\quad h = 0,\quad \eta = 0,\quad \alpha = 0,\quad b = 0,$$

et les équations (8) et (9) deviendront

(10) $$x^2 + y^2 - 2ax + l^2 = 0,$$

(11) $$x^2 + y^2 - 2\beta y - l^2 = 0.$$

6. Ces nouvelles équations représentent tous les cercles cherchés. Ceux de la première série ont leurs centres sur l'axe des x, et les autres ont les leurs sur l'axe des y. Le *système orthogonal* est déterminé par la constante l^2. Si cette constante est positive, ce qu'il est permis de supposer, les cercles représentés par l'équation (11) couperont l'axe des abscisses en deux points *fixes* A, B situés de part et d'autre de l'origine O, à une distance égale à l; et les autres cercles rencontreront orthogonalement le même axe, en deux points *variables* C, D, déterminés par

$$\mathrm{OC} = \beta - \sqrt{\beta^2 - l^2},\quad \mathrm{OD} = \beta + \sqrt{\beta^2 - l^2}.$$

7. On conclut, de ces dernières valeurs,

$$\mathrm{OC}\,.\,\mathrm{OD} = l^2 = \overline{\mathrm{AO}}^2.$$

Cette relation signifie que *la droite* AB *est partagée harmoniquement* *aux points* C, D. Conséquemment, *pour obtenir tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur un plan, on prend deux points fixes quelconques* A, B, *par lesquels on fait passer une première série de cercles; on partage la droite* AB, *harmoniquement, aux points variables* C, D; *enfin, sur* CD *comme diamètre, on décrit une circonférence : elle coupe orthogonalement tous les premiers cercles.*

8. Remarque. — *Il n'existe pas, sur un plan, de systèmes de cercles orthogonaux autres que ceux qui résultent de la construction précédente.*

Cette construction est bien connue, puisqu'elle ne diffère pas de celle qui donne la *projection stéréographique sur un horizon* [*]; mais il était intéressant d'examiner si les systèmes qu'elle fournit sont les seuls possibles.

9. Supposons à présent que les cercles AB, CD soient situés dans un plan passant par le centre I d'une sphère quelconque S; appelons V l'extrémité du rayon perpendiculaire à ce plan : V sera le *point de vue;* le plan ABCD sera le *tableau;* et les cercles orthogonaux AB, CD seront les *perspectives,* ou les projections stéréographiques de deux cercles orthogonaux ab, cd tracés sur la sphère. Cette proposition, que nous avons admise en commençant, se démontre sans difficulté. Il n'est pas aussi aisé de voir comment sont distribuées, sur la sphère, les deux séries de cercles répondant aux deux séries tracées sur le plan ABCDI. Pour résoudre cette partie de la question, je m'appuierai sur la proposition suivante :

10. *Si un faisceau harmonique a son centre* V *sur une circonférence, chacune des cordes* ab, cd *obtenues en joignant les extrémités des rayons conjugués, passe par le pôle de l'autre corde.*

Pour démontrer que ab passe par le point s, pôle de cd, menons da, db; nous aurons, par une propriété connue,

$$\frac{\sin cVa}{\sin cVb} = \frac{\sin dVa}{\sin dVb};$$

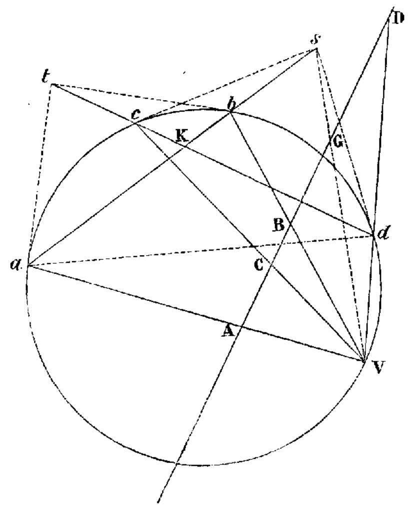
ou, en remplaçant les différents angles par ceux qui leur sont respec-

[*] *Voyez* ma *Cosmographie*.

tivement égaux,

$$\frac{\sin cda}{\sin cdb} = \frac{\sin sda}{\sin sdb}.$$

Fig. 1.



On conclut de là que la corde ab est partagée harmoniquement par la corde cd et par la tangente ds. On prouverait de même que ab est partagée harmoniquement par cd et par la tangente en c, etc.

11. Par le point V et par la droite ABCD considérée ci-dessus, faisons passer un plan : il coupera la sphère S suivant une circonférence $acbd$V, sur laquelle seront situés les points a, b, c, d dont A, B, C, D sont les perspectives. Puisque les points A, B sont fixes, il en sera de même pour a, b; c'est-à-dire que *tous les cercles de la première série passeront par les extrémités de la corde ab*. D'après un théorème connu, *le lieu des pôles de ces cercles, relativement à la sphère* S, *est la droite* RÉCIPROQUE *de ab* [*] : sur le plan de la figure, cette droite serait projetée suivant la perpendiculaire élevée au milieu de ab. Mais, d'après une propriété de la projection stéréographique démontrée par M. Chasles, chacun de ces pôles a pour perspective le centre du cercle AB correspondant. Donc, *à la droite lieu des centres des cercles* AB *correspond, dans l'espace, une autre droite, laquelle est réciproque de la corde ab*.

12. Soit G le milieu de CD, ou le centre du cercle CD : ce point est

[*] *Théorèmes et Problèmes de Géométrie*, seconde édition, page 282.

la perspective du sommet du cône circonscrit à la sphère S suivant le cercle cd. Donc, les tangentes cs et ds sont deux génératrices de ce cône, lequel a pour sommet s. Nous avons vu tout à l'heure que ce point s est situé sur la corde ab; conséquemment, *le lieu des pôles des cercles appartenant à la seconde série est la droite* ab; *les plans de ces cercles passent tous par la droite réciproque de* ab.

13. En résumé, *pour obtenir tous les systèmes de cercles orthogonaux tracés sur une sphère, on prend deux droites réciproques* l, l'; *suivant la première droite on fait passer des plans qui donnent lieu, par leurs intersections avec la sphère, à une première série de cercles; on opère de la même manière pour la seconde droite : chacun des cercles de la seconde série coupe orthogonalement tous ceux de la première.* En outre, *le lieu des pôles des premiers cercles, relativement à la sphère, est la seconde droite,* ET VICE VERSA.

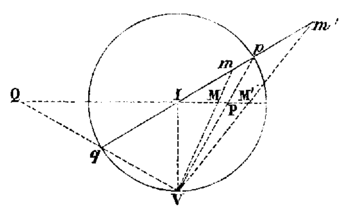
14. Les droites réciproques l, l' sont perpendiculaires entre elles, et elles ont pour projections stéréographiques les droites rectangulaires Ox, Oy, considérées plus haut (6). Par suite, *les projections stéréographiques de deux droites réciproques sont deux droites perpendiculaires entre elles.*

Cette propriété de la projection stéréographique n'avait pas, je crois, été remarquée : elle fait voir que l'angle de deux droites peut rester invariable en perspective, lors même que les côtés de l'angle ne sont pas dans un même plan.

15. Il y a plus : *les projections* M, M' *des points réciproques* m, m' *par lesquelles passent les droites réciproques* l, l' *sont elles-mêmes des points réciproques, relativement à un certain cercle.*

En effet, imaginons le grand cercle qVp passant par le rayon Imm' et par le point de vue V, et soit, sur le plan de ce grand cercle,

Fig. 2.



PIQ la trace du tableau. La perspective du grand cercle perpendiculaire au plan de la figure, et passant par qIp sera, évidemment, la circonférence décrite sur QP comme diamètre. Or, Vm, Vm', Vq et Vp forment un faisceau harmonique; donc M et M' sont réciproques relativement au cercle QP.

16. Supposons que, les points m, m' étant fixes, les droites l, l' tournent autour du rayon Im : alors les perspectives L, L' de ces deux droites tourneront autour des points M, M', sans cesser d'être perpendiculaires entre elles. Conséquemment, *le lieu du point de rencontre* R *des droites* L, L' *est la circonférence décrite sur* MM' *comme diamètre.*

17. Aux deux points M, M' qui restent fixes quand les droites l, l' éprouvent un mouvement de *rotation*, répondent deux points N, N' qui ne changent pas lorsque ces droites reçoivent un mouvement de *translation*. En effet, par le point de vue V, menons des parallèles à nos deux droites : les points N, N' où ces parallèles percent le tableau, seront les points de *fuite* des perspectives L, L'. Conséquemment, si les droites réciproques l, l' se déplacent, mais sans changer de direction, ces points N, N' seront invariables.

18. On pourrait continuer cette discussion; on verrait, par exemple, que *les cercles décrits sur les droites telles que* MM' *forment, avec les perspectives des grands cercles décrits sur le diamètre* p, q, *un système orthogonal;* mais je ne veux pas épuiser le sujet.

(Mai 1854.)