JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DUHAMEL

Note sur la décomposition de $\sin x$ et $\cos x$ en un nombre infini de facteurs

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^re série, tome 19 (1854), p. 121-131.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__121_0>

NOTE

Sur la décomposition de $\sin x$ *et* $\cos x$ *en un nombre infini de facteurs;*

Par M. DUHAMEL.

Euler a donné, dans l'*Introduction à l'Analyse des infiniment petits*, les formules importantes au moyen desquelles on peut remplacer les sinus et cosinus par des produits de facteurs du premier degré, en nombre infini. Ses démonstrations n'avaient pas toute la rigueur désirable; on les a perfectionnées sous ce rapport, mais en leur faisant peut-être perdre un peu de leur simplicité. L'objet de cette Note est de réunir, autant qu'il m'a paru possible, les deux avantages.

Je commencerai par établir quelques propositions simples, qui retarderaient la marche du calcul si on les y laissait engagées.

Premier lemme. — Soient a, b deux arcs compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et $a < b$; on aura

$$\frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{a}{b}.$$

En effet, on sait que le rapport $\frac{\sin x}{x}$ décroît lorsque x croît, depuis o jusqu'à $\frac{\pi}{2}$. D'où il résulte d'abord

$$\frac{\sin a}{a} > \frac{\sin b}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin a}{\sin b} > \frac{a}{b}.$$

Il en résulte encore, en considérant les quatre valeurs o, a, b, $\frac{\pi}{2}$, de x, que les rapports suivants sont rangés par ordre de valeurs décroissantes

$$1, \quad \frac{\sin a}{a}, \quad \frac{\sin b}{b}, \quad \frac{1}{\frac{1}{2}\pi}.$$

Donc le rapport du second au troisième est moindre que celui du premier au quatrième, et, par conséquent,

$$\frac{\sin a}{\sin b} < \frac{\pi}{2}\frac{a}{b}.$$

Ainsi, comme on l'avait énoncé, $\frac{\sin a}{\sin b}$ est compris entre

$$\frac{a}{b} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{2}\cdot\frac{a}{b}.$$

Deuxième lemme. — Si l'on désigne par m un nombre entier quelconque, on aura

$$(1)\left\{\begin{array}{l} \quad\cos mx = 2^{m-1}\cos^m x + \mathrm{A}\cos^{m-2} x + \mathrm{B}\cos^{m-4} x + \ldots \pm 1 \\ \text{si } m \text{ est pair, et} \\ \quad\cos mx = 2^{m-1}\cos^m x + \mathrm{A}\cos^{m-2} x + \ldots \pm \mathrm{M}\cos x \\ \text{si } m \text{ est impair,} \end{array}\right.$$

A, B, ..., M désignant des valeurs numériques que nous n'avons pas besoin de déterminer.

On aura semblablement, pour $\sin mx$, les formules suivantes :

$$(2)\left\{\begin{array}{l} \quad\sin mx = \sin x\,(2^{m-1}\cos^{m-1} x + \mathrm{A}\cos^{m-3} x + \ldots \pm 1) \\ \text{si } m \text{ est impair, et} \\ \quad\sin mx = \sin x\,(2^{m-1}\cos^{m-1} x + \mathrm{A}\cos^{m-3} x + \ldots + \mathrm{M}\cos x) \\ \text{si } m \text{ est pair.} \end{array}\right.$$

Ces diverses formules résultent de ce que les sinus ou les cosinus d'arcs croissants d'une quantité constante x forment deux séries récurrentes, ayant l'une et l'autre pour échelle de relation $2\cos x - 1$. En partant des deux premiers arcs o et x, on calculera facilement, au moyen de cette loi, les valeurs successives de

$$\cos 2x, \quad \cos 3x, \quad \cos 4x, \quad \text{etc.},$$

ainsi que de

$$\sin 2x, \quad \sin 3x, \quad \text{etc.}$$

La détermination générale des coefficients A, B, ..., M nous est inutile et demanderait des développements dans lesquels nous n'entrerons pas. Quant à la forme des expressions (1) et (2), elle résulte immédiatement de la loi de formation que nous venons d'indiquer. Elle s'aperçoit de suite pour les premières, et se généralise par un raisonnement si fréquemment employé, que nous croyons inutile de le rappeler.

Décomposition de cos mx *en* m *facteurs.*

Troisième lemme. — Les seconds membres des équations (1) étant des polynômes du degré m par rapport à $\cos x$, peuvent être décomposés en m facteurs de la forme $\cos x - \alpha$, α désignant une quelconque des valeurs de $\cos x$ qui annulent ces polynômes ou leur égal $\cos mx$. Or les valeurs de mx, qui annulent $\cos mx$, sont toutes renfermées dans l'expression générale

$$\frac{\pi}{2} \pm n\pi,$$

n désignant un nombre entier quelconque, positif ou négatif. En les divisant par m, on aura les arcs dont les cosinus seront les différentes valeurs de α. Pour avoir toutes ces valeurs, il suffira de donner à n un nombre m de valeurs consécutives partant de o par exemple, ce qui conduira aux arcs suivants :

$$\frac{\pi}{2m}, \quad \frac{3\pi}{2m}, \quad \frac{5\pi}{2m}, \ldots, \quad \pi - \frac{\pi}{2m}.$$

La somme de deux quelconques de ces arcs, équidistants des extrêmes, est π; et si m est impair, le terme situé au milieu est égal à $\frac{\pi}{2}$. Et comme les cosinus de deux arcs dont la somme est π sont égaux et de signes contraires, les cosinus des arcs précédents ou les m valeurs de α seront

$$\pm \cos\frac{\pi}{2m}, \quad \pm \cos\frac{3\pi}{2m}, \ldots, \qquad \cos\frac{\pi}{2},$$

si m est impair, et

$$\pm \cos\frac{\pi}{2m}, \quad \pm \cos\frac{3\pi}{2m}, \ldots, \quad \pm \cos\frac{(m-1)\pi}{2m}$$

si m est pair.

On aura donc

$$\cos mx = 2^{m-1} \cos x \left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{2m}\right)\ldots$$
$$\times \left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)\right]$$

pour m impair, et

$$\cos mx = 2^{m-1} \left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{2m}\right)\ldots$$
$$\times \left[\cos x + \cos\frac{(m-1)\pi}{2m}\right]$$

pour m pair.

Ainsi, quel que soit le nombre entier m, $\cos mx$ se trouve décomposé en m facteurs du premier degré par rapport à $\cos x$, ou, en multipliant les facteurs qui ne diffèrent que par le signe du second terme, et observant qu'on a en général

$$\cos^2 u - \cos^2 v = \sin^2 v - \sin^2 u,$$

$$\cos mx = 2^{m-1} \cos x \left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots$$
$$\times \left[\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 x\right]$$

pour m impair, et

$$\cos mx = 2^{m-1} \left(\sin^2\frac{\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{3\pi}{2m} - \sin^2 x\right)\ldots$$
$$\times \left[\sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} - \sin^2 x\right)$$

pour m pair.

On peut remarquer qu'en faisant $x = 0$ dans ces formules, on obtient les relations suivantes :

$$\sin^2\frac{\pi}{2m} \cdot \sin^2\frac{3\pi}{2m} \ldots \sin^2\frac{(m-2)\pi}{2m} = \frac{1}{2^{m-1}}$$

si m est impair, et

$$\sin^2\frac{\pi}{2m}\cdot\sin^2\frac{3\pi}{2m}\cdots\sin^2\frac{(m-1)\pi}{2m}=\frac{1}{2^{m-1}}$$

si m est pair.

En y ayant égard, les formules précédentes deviennent :

$$(3)\quad\left\{\begin{array}{l}\cos mx=\cos x\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{(m-2)\pi}{2m}}\right]\\ \text{pour } m \text{ impair, et}\\ \cos mx=\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1-\dfrac{\sin^2 x}{\sin^2\dfrac{(m-1)\pi}{2m}}\right]\\ \text{pour } m \text{ pair.}\end{array}\right.$$

Décomposition de sin mx *en* m *facteurs.*

Quatrième lemme. — Dans les formules (2), le polynôme du degré $m-1$ par rapport à $\cos x$ est rendu nul par les valeurs de x correspondantes à $\sin mx = 0$. Les valeurs de mx qui satisfont à cette dernière condition sont renfermées dans l'expression générale $n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque positif ou négatif. Mais comme un polynôme de degré $m-1$ ne peut avoir plus de $m-1$ racines, il suffira de prendre $m-1$ valeurs de $\frac{n\pi}{m}$, donnant des cosinus différents, et n'annulant pas le facteur $\sin x$; ces cosinus seront les racines du polynôme. Les arcs ainsi obtenus seront

$$\frac{\pi}{m},\quad \frac{2\pi}{m},\quad \frac{3\pi}{m},\ldots,\quad \pi-\frac{\pi}{m}.$$

Tous ces arcs étant compris entre o et π ont des cosinus différents, et la somme de deux quelconques équidistants des extrêmes étant π, les cosinus sont, deux à deux, égaux et de signes contraires. Si m est pair, un des arcs sera $\frac{\pi}{2}$, et le cosinus correspondant sera nul. Cela n'arrivera pas si m est impair ; et c'est ce qu'indiquent immédiatement les formules (2). D'après cela, on aura

$$\sin mx = 2^{m-1} \sin x \left(\cos x - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)\right]\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)\right]$$

si m est impair, et

$$\sin mx = 2^{m-1} \sin x \left(\cos x - \cos\frac{\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{\pi}{m}\right)$$
$$\times\left(\cos x - \cos\frac{2\pi}{m}\right)\left(\cos x + \cos\frac{2\pi}{m}\right)\cdots$$
$$\times\left[\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)\right]\cos x$$

si m est pair; ou, en réunissant les facteurs deux à deux, et introduisant les sinus au lieu des cosinus,

$$\sin mx = 2^{m-1} \sin x \left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{m} - \sin^2 x\right)\cdots$$
$$\times\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) - \sin^2 x\right]$$

si m est impair, et

$$\sin mx = 2^{m-1} \sin x \cos x \left(\sin^2\frac{\pi}{m} - \sin^2 x\right)\left(\sin^2\frac{2\pi}{m} - \sin^2 x\right)\cdots$$
$$\times\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right) - \sin^2 x\right]$$

si m est pair.

On simplifiera ces formules en remarquant que, si on les divise par x, et qu'on fasse tendre x vers o, on obtient les suivantes :

$$2^{m-1} \sin^2\frac{\pi}{m} \sin^2\frac{2\pi}{m} \cdots \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right) = m$$

pour m impair, et

$$2^{m-1} \sin^2\frac{\pi}{m} \sin^2\frac{2\pi}{m} \cdots \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right) = m$$

pour m pair.

Les formules précédentes deviennent, d'après ces relations :

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
&\sin mx = m\sin x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left[1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}\right)}\right]\\
&\text{pour } m \text{ impair, et}\\
&\sin mx = m\sin x\cos x\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\\
&\qquad\times\left[1-\frac{\sin^2 x}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m}\right)}\right]\\
&\text{pour } m \text{ pair.}
\end{aligned}
\right.
$$

Développement de $\cos x$ *en un nombre infini de facteurs.*

Si dans les formules (3) on change la quantité arbitraire x en $\frac{x}{m}$, elles deviennent

$$
(5)\left\{
\begin{aligned}
&\cos x = \cos\frac{x}{m}\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{m}\right)}\right]\\
&\text{pour } m \text{ impair, et}\\
&\cos x = \left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{2m}}\right)\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{3\pi}{2m}}\right)\cdots\left[1-\frac{\sin^2\frac{\pi}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}\right)}\right]\\
&\text{pour } m \text{ pair;}
\end{aligned}
\right.
$$

et comme m est un nombre entier quelconque, $\cos x$ se trouve ainsi représenté par le produit d'un nombre arbitraire de facteurs.

La question que nous nous proposons ici est de déterminer la forme vers laquelle tend la valeur constante du second membre, lorsque le nombre de ces facteurs croît indéfiniment.

Si l'on considère un facteur quelconque $1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{n\pi}{2m}}$, n désignant un nombre impair aussi grand que l'on voudra; les arcs $\frac{x}{m}$, $\frac{2\pi}{nm}$ tendant vers zéro lorsque m croît indéfiniment, le rapport de leurs sinus aura pour limite le rapport des arcs $\frac{nx}{2\pi}$, et la limite du facteur sera $1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}$.

Comme d'ailleurs le facteur $\cos\frac{x}{m}$ tend vers l'unité, on arrive d'abord à cette conclusion, que, quelque grand que soit le nombre impair déterminé n, le produit des facteurs qui entrent dans les expressions (5), jusqu'à cette valeur de n, devient, lorsque m croît indéfiniment, aussi voisin qu'on voudra du suivant :

$$(6) \qquad \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{4x^2}{n^2\pi^2}\right).$$

Il resterait donc à trouver la limite vers laquelle tend le produit des facteurs suivants des expressions (5). Pour cela, nous remarquerons que, quelque grand qu'on suppose x, on peut toujours prendre un nombre impair μ tel, que l'on ait $x < \frac{\mu\pi}{2}$ ou $\frac{x}{m} < \frac{\mu\pi}{2m}$; et, en prenant $m > n$, $\frac{\mu\pi}{2m}$ sera plus petit que $\frac{\pi}{2}$. Les deux arcs $\frac{x}{m}$, $\frac{\mu\pi}{m}$ seront donc dans les conditions des deux arcs respectifs a, b dans le premier lemme; et l'on aura, par conséquent,

$$\frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{\mu\pi}{2m}} > \frac{2x}{\pi} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sin\frac{x}{m}}{\sin\frac{\mu\pi}{2m}} < \frac{x}{\mu},$$

d'où résulte

$$1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\mu\pi}{2m}} \begin{cases} < 1 - \frac{4x^2}{\mu^2\pi^2} \\ > 1 - \frac{x^2}{\mu^2}. \end{cases}$$

Considérons maintenant les produits de facteurs en nombre infini dont ces deux dernières expressions seraient les formes générales, c'est-à-dire

$$(7) \qquad \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{3x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots$$

et

$$(8) \qquad (1-x^2)\left(1-\frac{x^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{5^2}\right)\cdots$$

Ces produits tendent vers des limites déterminées à mesure que le nombre des facteurs augmente indéfiniment, parce que les séries des seconds termes de ces facteurs, pris avec le même signe, sont convergentes. Il résulte de là que l'on peut prendre un assez grand nombre de facteurs à partir du premier, dans les expressions (7) et (8), pour que la limite du produit des suivants soit aussi peu différente de l'unité qu'on le voudra. Et si, au lieu de prendre la limite du produit de ces derniers, on ne prenait que le produit d'un nombre limité d'entre eux, on aurait une quantité encore plus voisine de l'unité, puisque chacun de ces facteurs est plus petit que l'unité.

Ces remarques très-simples nous conduisent immédiatement à la solution de notre question.

En effet, il en résulte d'abord qu'on peut prendre n assez grand pour que les valeurs des expressions (6) et (7) aient une différence aussi petite que l'on voudra. Il en est donc de même du produit des facteurs correspondants à l'équation (6) dans les expressions (5), lorsque l'on suppose que m croît indéfiniment.

Quant aux facteurs qui suivent ceux-ci dans les formules (5) et dont le produit par les premiers est toujours $\cos x$, ils sont respectivement compris entre les deux facteurs de même rang dans les expressions (7) et (8). Leur produit total est donc compris entre les produits correspondants de ces dernières, dont nous venons de démontrer que les valeurs pouvaient différer de l'unité d'une quantité moindre que toute quantite donnée. Ce produit total peut donc lui-même différer aussi peu qu'on voudra de l'unité.

On voit donc que $\cos x$ peut être considéré comme composé de deux facteurs variables, dont l'un tend indéfiniment vers l'expression (7), et l'autre vers l'unité. Donc, enfin, $\cos x$ est égal à la valeur représentée par cette expression (7), quel que soit x.

D'où résulte la formule suivante,

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{5^2\pi^2}\right)\cdots\left[1 - \frac{4x^2}{(2k+1)^2\pi^2}\right]\cdots,$$

au moyen de laquelle $\cos x$ se trouve décomposé en une infinité de facteurs algébriques du premier ou du second degré, dont la formule générale est

$$1 \pm \frac{2x}{(2k+1)\pi},$$

k désignant un nombre entier quelconque, et qui, égalé à zéro, donne toutes les racines de $\cos x = 0$.

Développement de $\sin x$ *en un nombre infini de facteurs.*

Les formules (4) deviennent, en remplaçant x par $\frac{x}{m}$,

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left[1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}\right)}\right]$$

pour m impair, et

$$\sin x = m \sin\frac{x}{m}\cos\frac{x}{m}\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{\pi}{m}}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{2\pi}{m}}\right)\cdots\left[1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}\right)}\right]$$

pour m pair.

On a $m \sin\frac{x}{m} = x \cdot \frac{m}{x}\sin\frac{x}{m}$; et si l'on fait croître m indéfiniment, $\frac{m}{x}\sin\frac{x}{m}$ ou $\frac{\sin\frac{x}{m}}{\frac{x}{m}}$ tend vers l'unité; il en est de même de $\cos\frac{x}{m}$. Quant aux autres facteurs, si l'on en prend un quelconque $1 - \frac{\sin^2\frac{x}{m}}{\sin^2\frac{n\pi}{m}}$ sa limite sera $1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}$.

On trouvera donc, en employant les mêmes considérations que pour $\cos x$,

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{2^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{3^2 \pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4^2 \pi^2}\right) \cdots$$

Ainsi $\sin x$ se trouve décomposé en une infinité de facteurs du premier degré en x, dont le premier est x, et les autres sont renfermés dans la formule générale

$$1 \pm \frac{x}{n\pi},$$

n désignant un nombre entier quelconque. En les égalant à zéro, on trouve toutes les racines de l'équation $\sin x = 0$, qui sont représentées par la formule $\pm n\pi$, n désignant un nombre entier quelconque qui peut être zéro.