JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

DUHAMEL

Note sur la discontinuité des valeurs des séries et sur les moyens de la reconnaître

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 19 (1854), p. 112-120.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1854_1_19__112_0>

NOTE

SUR LA DISCONTINUITÉ DES VALEURS DES SÉRIES

ET SUR LES MOYENS DE LA RECONNAITRE;

PAR M. DUHAMEL.

Considérons une série dont tous les termes soient des fonctions continues d'une variable x, et qui soit convergente tant que x reste compris entre certaines limites déterminées, condition que nous supposerons toujours satisfaite. Admettons, en outre, que chaque terme ne puisse prendre qu'une seule valeur pour une valeur donnée quelconque de x, et qu'il en soit de même, par conséquent, pour la somme d'un nombre fini quelconque de ces termes.

Cela posé, il pourra arriver deux cas : ou la limite de la somme des termes de la série variera avec x d'une manière continue; ou bien, pour certaines valeurs particulières de x, elle passera brusquement d'une valeur à une autre qui en différera d'une quantité finie.

Ainsi, par exemple, on sait qu'on peut développer une fonction de x, donnée pour toutes les valeurs de x comprises entre deux valeurs α, β, suivant une série dont les termes soient les sinus et les cosinus des multiples entiers d'un certain arc. Si la fonction développée est continue, la somme de la série qui lui est toujours égale l'est aussi. Mais si la fonction proposée est formée d'une fonction continue $\varphi(x)$ jusqu'à $x = a$, puis d'une autre fonction continue $\psi(x)$ lorsque x est plus grand que a, et que l'on n'ait pas

$$\varphi(a) = \psi(a),$$

on sait que la série provenant de cette fonction en représentera exactement les valeurs pour toutes les valeurs de x, excepté a; et que, pour cette dernière, la somme de la série, qui est toujours convergente, a une valeur déterminée qui n'est ni $\varphi(a)$ ni $\psi(a)$, mais leur demi-somme. On a donc ainsi un exemple de séries convergentes dont les termes sont des fonctions continues de la variable, et dont la somme reste cependant une fonction discontinue, quoique toujours déterminée.

C'est de ce cas singulier que nous allons nous occuper; et nous commencerons par quelques remarques sur la somme des termes de la série, dans le voisinage de la valeur particulière de la variable à laquelle correspond cette discontinuité.

Soit la série

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots.$$

Désignons par s la limite de la somme de ses termes pour une valeur quelconque de la variable x dont les termes sont des fonctions continues; par s_n la somme des n premiers termes; et par r_n la limite de la somme des suivants, de telle sorte que l'on ait toujours

$$s = s_n + r_n.$$

Soit a la valeur particulière de x à laquelle correspond la discontinuité; $\varphi(x)$ la fonction continue que représente s tant que l'on a

$$x < a;$$

$\psi(x)$ la valeur de s lorsque l'on a

$$x > a;$$

et admettons que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ soient inégaux. Remarquons d'abord que, pour connaître la valeur de s relative à une valeur donnée de x, on peut procéder de deux manières différentes. On peut commencer par substituer la valeur α à x dans tous les termes de la série, et chercher ensuite la limite vers laquelle tend la somme de ces termes devenus entièrement numériques, à mesure que leur nombre augmente indéfiniment. C'est ainsi que l'on procède quand on n'a en vue que l'évaluation même de la somme.

On peut, au lieu de cela, considérer d'abord la somme s_n des

n premiers termes, en attribuant à x une valeur qui diffère de α d'une quantité qui soit une fonction arbitraire de n, assujettie à devenir nulle pour n infini. Faisant ensuite croître n indéfiniment, la valeur de x tendra vers la limite a; et la limite vers laquelle tendra s_n pourra encore être appelée la valeur de s pour $x = a$.

Ces deux manières de procéder donnent généralement le même résultat. Mais il arrive quelquefois aussi non-seulement que cette coïncidence n'a pas lieu, mais que le résultat obtenu par le second procédé est indéterminé et dépend de la relation arbitraire que l'on établit entre x et n.

Nous allons voir que cette circonstance singulière se présente lorsque la fonction de x, qui a été développée en série, passe brusquement d'une valeur à une autre, qui en diffère d'une quantité finie; et, pour fixer les idées, nous considérerons d'abord les séries périodiques; le terme général u_n sera de la forme

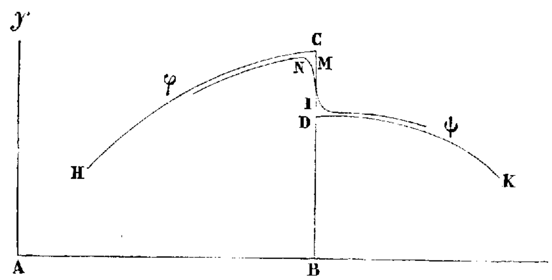
$$u_n = \mathrm{M} \sin \frac{2n\pi x}{l} + \mathrm{N} \cos \frac{2n\pi x}{l},$$

l désignant l'intervalle qui correspond à une période.

Construisons la courbe ayant pour équation

$$y = s_n.$$

Elle sera continue et ne sera coupée qu'en un seul point par toute



parallèle à l'axe des y. Elle variera de forme à mesure que n augmentera indéfiniment; elle s'approchera de plus en plus de la courbe HC ayant pour équation

$$y = \varphi(x),$$

lorsque l'on prendra $x < AB$ pris égal à a; elle tendra vers la courbe

$$y = \psi(x)$$

pour $x > a$; pour $x = a$, la somme s_n tendant vers

$$\frac{1}{2}[\varphi(a) + \psi(a)] \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}(\text{BC} + \text{BD}),$$

la courbe coupera la droite BC en un point dont la position limite sera le milieu de CD.

Il résulte nécessairement de tout cela, que la courbe continue $y = s_n$ tend indéfiniment à passer par un point quelconque de la courbe CH, de la courbe DK et de la portion de droite CD; et c'est ce qu'avait très-bien remarqué Fourier.

Voici maintenant une conséquence très-simple de cette remarque.

Prenons une ordonnée quelconque BM, comprise entre BC et BD, et menons par le point M une parallèle à l'axe des x; elle rencontrera la courbe $y = s_n$ en un point N, dont nous désignerons l'abscisse par x_1, et qui s'approchera indéfiniment de M à mesure que n augmentera. En laissant BM constant et faisant croître n indéfiniment, x_1 sera une fonction de n telle, que l'ordonnée de la courbe variable sera constamment égale à BM; et, par conséquent, on peut énoncer la proposition suivante :

« Si l'on fait la somme des n premiers termes de la série proposée,
» et que l'on substitue à x une fonction de n qui tende vers a lors-
» que x croît indéfiniment, on peut choisir cette fonction de telle
» sorte, que la somme tende vers une valeur quelconque comprise
» entre $\varphi(a)$ et $\psi(a)$. »

Passons maintenant au cas général où les termes de la série (1) sont des fonctions de x de forme quelconque, satisfaisant aux conditions énoncées. Construisons de même les courbes CH, DK, dont l'une ait pour ordonnée $\varphi(x)$ et l'autre $\psi(x)$, et qui, pour $x = a = AB$, donnent deux ordonnées inégales BC, BD. La valeur limite de s_n ne sera peut-être pas $\frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{BD})$, comme dans le cas précédent; de sorte que la limite I de la rencontre de la courbe variable avec la droite BC pourra être différente du milieu de CD; mais, comme la courbe $y=s_n$ est continue, qu'elle ne peut être rencontrée qu'en un seul point par toute parallèle à BC, et que, de plus, elle s'approche indéfiniment des points C, D, il s'ensuit nécessairement qu'elle s'approche indéfiniment de tous les points de la droite CD. Le raisonnement que nous avons fait tout à l'heure subsiste donc et conduit à cette proposition générale :

« Lorsqu'une série convergente est composée de termes qui sont
» fonctions continues de x et ne peuvent recevoir qu'une seule valeur
» pour une valeur donnée de x, si l'on admet qu'elle représente une
» fonction continue $\varphi(x)$ quand x est plus petit qu'une quantité
» fixe a, tandis que, pour $x>a$, elle en représente une autre $\psi(x)$,
» telle que $\varphi(a)$ et $\psi(a)$ soient inégaux; si dans la somme s_n on fait
» tendre x vers a en même temps que n croît indéfiniment, on pourra
» prendre pour x une telle fonction de n que, tandis qu'elle tend
» vers a, la somme s_n tende vers une valeur quelconque comprise
» entre $\varphi(a)$ et $\psi(a)$. »

Remarque. — Il est bon d'observer que la partie de la courbe variable qui s'approche indéfiniment de la portion IC de CD, correspond à $x<a$, et que la partie de la même courbe qui tend vers l'autre portion ID correspond à $x>a$.

Limite du reste. — Le reste r_n, correspondant à s_n, étant la limite de la somme des termes de la série à partir du dernier qui entre dans s_n, on a, pour une valeur quelconque de x,

$$s=s_n+r_n.$$

Supposons maintenant que l'on fasse

$$x=a+\varepsilon,$$

ε désignant une quantité positive très-petite, on aura

$$s_n+r_n=\psi(a+\varepsilon),$$

quantité qui peut être aussi voisine que l'on voudra de $\varphi(a)$, en prenant ε suffisamment petit.

Or, on peut supposer que ε soit une fonction de n qui tende vers zéro, de telle sorte que s_n tende vers une valeur quelconque s_1, comprise entre BI et $\psi(a)$; donc, dans cette hypothèse, r_n tendra vers $\psi(a) - s_1$. Ainsi, en supposant $x > a$, r_n pourra avoir toutes les valeurs comprises entre o et — DI.

Si l'on supposait, en second lieu, $x = a - \varepsilon$, la valeur de s serait $\varphi(a - \varepsilon)$, et l'on aurait

$$s_n + r_n = \varphi(a - \varepsilon).$$

Donc, si l'on suppose que ε soit une fonction de n tendant vers zéro, de manière à ce que s_n tende vers une valeur quelconque s_2 comprise entre BI et $\varphi(a)$, r_n tendra vers

$$\varphi(a) - s_2;$$

de sorte que r_n sera susceptible d'avoir toutes les valeurs possibles entre o et + CI, lorsque x tendra vers a, en restant toujours au-dessous.

Direction de la tangente dans le voisinage du point singulier. — D'après ce qui a été dit sur la nature de la courbe dont l'équation est

$$y = s_n,$$

la tangente au point dont l'abscisse est $a + \varepsilon$ tendra vers celle de la courbe $y = \psi(x)$, si on laisse ε constant, quelque petit qu'il soit, et que n croisse indéfiniment. Mais, si on lie la valeur de ε à celle de x, de manière que le point de la courbe s'approche indéfiniment d'un point déterminé de CD qui ne soit pas l'une de ses extrémités, la tangente à la courbe tendra indéfiniment vers la direction de cette parallèle, qui est la limite de la courbe dans la partie que l'on considère. Le passage d'une de ces directions extrêmes à l'autre se fera d'une manière continue, de sorte que la recherche de la direction de la tangente dans le voisinage de $x = a$ conduirait à un résultat indéterminé.

Considérons en particulier le point où la courbe $y = s_n$ coupe la droite CD ; on aura son ordonnée en faisant $x = a$ dans tous les termes de s_n et les ajoutant ensuite ; d'où l'on voit que ce point a pour limite celui que l'on trouve en faisant $x = a$ dans la série donnée, et par conséquent un certain point O de AB, qui sera même, en général, différent d'une de ses extrémités. La tangente en ce point, qui peut être variable ou fixe, tend donc à devenir parallèle à l'axe des y, puisque la courbe elle-même tend à s'y confondre des deux côtés de O, ou au moins d'un côté, si O tendait vers l'une des extrémités. Mais $\frac{ds_n}{dx}$ est le coefficient d'inclinaison de la tangente à la courbe $y = s_n$; donc, si l'on fait $x = a$ dans $\frac{ds_n}{dx}$, on aura une valeur qui croîtra indéfiniment avec n.

Ainsi la série des dérivées des termes de la proposée, ou

$$\frac{du_1}{dr} + \frac{du_2}{dr} + \ldots + \frac{du_n}{dr} + \ldots,$$

dans laquelle x est remplacé par a, a une somme infinie. On peut donc énoncer, en général, la proposition suivante :

« Si l'on a développé en série une fonction de x, qui a deux valeurs » différentes correspondantes à la valeur particulière a de la variable x, » la série des dérivées des termes de cette série aura une somme infinie » quand on y remplacera x par a. »

On pourra donc admettre que la somme d'une série sera continue pour toutes les valeurs de x comprises entre deux limites déterminées, lorsque la série des dérivées de ses termes ne deviendra infinie pour aucune des valeurs comprises entre ces limites ; mais, si une valeur particulière de x la rendait infinie, on n'en conclurait pas nécessairement que la série proposée serait discontinue, parce que la tangente à la courbe $y = s_n$ peut évidemment tendre vers la direction de l'axe des y sans qu'il y ait solution de continuité.

Remarque. — Si la série des dérivées des termes d'une série est convergente, la limite s' de la somme de ses termes sera la dérivée de la limite s de la première ; car on sait que l'intégrale indéfinie d'une fonction développée en série convergente est la somme des intégrales de ses termes.

Or, en intégrant les termes de s' on retrouve ceux de s; donc $\int s'dx$ et s ne peuvent différer que par une constante, et par conséquent elles ont la même dérivée. Mais la dérivée de $\int s'dx$ est s', donc aussi la dérivée de s est s'.

Cette proposition se trouve énoncée dans une Note de M. Cauchy.

Si une série ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x est convergente, sa somme sera une fonction continue de x.

Soit la série

$$(2) \qquad s = A + Bx^{\alpha} + Cx^{6} + \ldots + Mx^{\mu} + Nx^{\nu} + \ldots;$$

pour qu'elle soit convergente, il faut en général, comme on le sait, que le rapport de deux termes consécutifs qui s'éloignent indéfiniment du premier, finisse par être toujours au-dessous d'un nombre constant plus petit que l'unité. Soit l une quantité au-dessous de laquelle le rapport des coefficients N, M de deux termes consécutifs Mx^{μ}, Nx, finit par rester à mesure que l'on s'éloigne du premier; le rapport de ces deux termes sera moindre que $lx^{\nu-\mu}$; et si l'on a

$$lx^{\nu-\mu} < 1,$$

et que $\nu - \mu$ soit constant, la série sera convergente, puisque le rapport d'un terme au précédent finira par être constamment au-dessous d'une quantité déterminée plus petite que l'unité. Cette inégalité fait connaître une limite au-dessous de laquelle les valeurs de x rendent la série convergente; car elle donne, en désignant par d la différence $\nu - \mu$,

$$x < \frac{1}{\sqrt[d]{l}}.$$

Si la différence d ne reste pas la même, cette inégalité devra être satisfaite pour toutes les valeurs que d peut prendre dans tout le cours de la série.

Cela posé, en différentiant par rapport à x les termes de la série (2), on a la suivante :

$$(3) \qquad B\alpha x^{\alpha-1} + C\beta x^{\beta-1} + \ldots + M\mu x^{\mu-1} + N\nu x^{\nu-1} + \ldots.$$

Le rapport de deux termes consécutifs quelconques sera

$$(4) \qquad \frac{\nu}{\mu}\cdot\frac{N}{M}x^{\nu-\mu},$$

et ne diffère des correspondants dans la série (2) que par le facteur $\frac{\nu}{\mu}$, qui tend indéfiniment vers l'unité, puisque μ et ν croissent sans limite, tandis que leur différence reste finie. Il suit de là que l'expression (4) finit par être toujours au-dessous de $lx^{\nu-\mu}$, et que, par conséquent. la série (3) est convergente. D'où l'on conclut enfin que la somme de la série (2) est une fonction continue de x. Cette proposition avait été démontrée par Abel.