JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Théorie des cônes circulaires roulants

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 41-70.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__41_0>

THÉORIE

DES

CÔNES CIRCULAIRES ROULANTS;

PAR M. POINSOT,
Membre de l'Institut.

Sous ce titre abrégé, je n'ai pas uniquement en vue, comme on pourrait le croire, le cas particulier d'un corps homogène de figure conique qui roulerait sur un autre cône fixe : mais je considère en général un corps solide de forme et de constitution quelconque, doué de deux axes égaux d'inertie, et qui se meut, autour d'un point pris sur son troisième axe, comme si un cône circulaire décrit du même point autour de cet axe roulait actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône circulaire de même sommet. Je cherche la condition d'un tel mouvement, je veux dire, le couple accélérateur étranger qui serait capable de le produire.

DÉFINITIONS ET LEMMES PRÉLIMINAIRES.

1. Considérons donc un corps quelconque mobile autour d'un point fixe O.

Soit OA un des trois axes principaux du corps, et autour duquel le moment d'inertie soit A; et supposons que tous les moments d'inertie soient égaux entre eux et à B, autour de tous les axes menés par le point O perpendiculairement à celui-là. Tous ces autres axes formeront un plan que je nommerai l'*équateur* du corps, tandis que l'axe perpendiculaire OA en sera nommé l'*axe de figure*.

A et B étant les deux moments d'inertie du corps, l'un autour de l'axe de figure, l'autre autour d'un diamètre quelconque de l'équateur; si l'on nomme I le moment d'inertie de ce corps autour d'un axe OI, incliné d'un angle o à l'axe de figure, on aura, comme on le sait,

$$I = A \cos^2 o + B \sin^2 o.$$

2. Supposons maintenant que le corps soit frappé par un couple G, dont l'axe soit OG (*Pl. I, fig.* 1), et qui tende à produire au premier instant une rotation θ autour de l'axe OI; cet axe instantané OI tombera dans le plan même de l'axe du couple et de l'axe de figure, et si l'on désigne par i l'inclinaison de OI à l'axe OG du couple, il est aisé de voir qu'on aura l'équation

$$G \cos i = I\theta;$$

car il est clair que $I\theta$ exprime, aussi bien que $G \cos i$, la somme des moments de toutes les forces, ou le moment total G estimé autour de l'axe OI.

3. De plus, si vous nommez u l'inclinaison de l'axe OG du couple à l'axe OA du corps, vous aurez, entre o et u, la relation nécessaire

$$B \operatorname{tang} o = A \operatorname{tang} u;$$

car, imaginez le couple G décomposé en deux, l'un autour de OA, l'autre autour de l'axe principal OB mené dans le plan GOA, vous aurez pour ces deux composants rectangulaires du couple G, les valeurs $G \cos u$ et $G \sin u$, et dont le rapport, pris dans l'ordre inverse, sera $\operatorname{tang} u$. Mais, d'un autre côté, la rotation θ, décomposée en deux autour des mêmes axes, donne les deux composantes $\theta \cos o$, $\theta \sin o$, et, par conséquent, $A\theta \cos o$ et $B\theta \sin o$ pour les deux couples capables de les produire; couples dont le rapport, pris dans le même ordre que ci-dessus, donne $\frac{B}{A} \operatorname{tang} o$: d'où résulte, en égalant cette expression à la précédente, l'équation $B \operatorname{tang} o = A \operatorname{tang} u$, qu'il s'agissait de démontrer.

4. Les trois axes OA, OI et OG étant dans un même plan, on voit que l'angle u n'est autre chose que la différence ou la somme des deux angles o et i; de sorte qu'on aura

$$u = o - i, \quad \text{ou} \quad u = o + i,$$

selon qu'on aura

$$A > B, \quad \text{ou} \quad A < B,$$

comme on le voit par la relation ci-dessus, qui donne $u < o$, ou $u > o$, selon qu'on a $A > B$, ou $A < B$. La figure répond ici au cas de $A > B$

5. Enfin, les deux composants rectangulaires du couple G étant exprimés par $A\theta \cos o$ et $A\theta \sin o$, on aura, entre G et θ, la relation

$$G = \theta \cos o \sqrt{A^2 + B^2 \operatorname{tang}^2 o}.$$

Mais cette équation est déjà renfermée dans les précédentes; car, en y mettant au lieu de o sa valeur en i, tirée de la relation

$$B \operatorname{tang} o = A \operatorname{tang}(o - i),$$

elle reviendrait (en faisant $A \cos^2 o + B \sin^2 o = I$) à l'équation trouvée plus haut,

$$G \cos i = I\theta:$$

ce qui peut servir réciproquement à démontrer cette dernière, que j'avais posée directement en observant que $G \cos i$ est le moment total des forces appliquées, estimé autour de OI, et que $I\theta$ est de même, par rapport à cet axe OI, la somme des moments de toutes les forces qui naissent de la rotation θ due au même couple G.

6. Au reste, il est bien évident que, des huit quantités désignées par A, B, G, I, θ, i, o, u, il n'y en a que quatre d'indépendantes. Car, en se donnant, par exemple, A et B, qui sont connues par la nature du corps, et les deux quantités G et u qui déterminent la grandeur et la position du couple d'impulsion, il est clair que le mouvement du corps est entièrement déterminé, et que tout le reste s'ensuit. Ainsi il ne peut y avoir que quatre équations différentes entre les huit quantités dénommées ci-dessus.

J'ai donné d'abord ces différentes relations, parce qu'elles pourront servir, dans chaque problème, à présenter les formules entre les seules données immédiates qu'on y voudra considérer.

6.

QUESTION PROPOSÉE.

7. Pour arriver maintenant d'une manière naturelle à la question précise qu'on se propose ici de résoudre, je remarque en premier lieu que, si le corps frappé par le couple G (*fig.* 1) était abandonné à lui-même, l'axe instantané OI décrirait, dans l'intérieur du corps, un cône droit et circulaire autour de l'axe OA; et, dans l'espace absolu, un autre cône droit et circulaire autour de l'axe OG, qui resterait fixe : et le mouvement du corps serait exactement le même que si le premier cône (IOA) roulait uniformément sans glisser sur la surface du cône fixe (IOG). Tel est donc le mouvement que suivrait le corps s'il était libre de toute action étrangère : c'est la rotation *naturelle* d'un corps qui a reçu l'impulsion d'un couple, et qui reste abandonné à sa propre inertie; et cette rotation simple est à la rotation quelconque d'un corps, ce que le mouvement uniforme d'un point en ligne droite est au mouvement de ce point en ligne courbe.

Mais si le corps, au lieu d'être abandonné à lui-même, est soumis à l'action continuelle d'un couple accélérateur étranger K, ce couple fera naître, à chaque instant dt, un couple infiniment petit $K\,dt$ qui se composera avec le couple d'impulsion G, et fera varier continuellement l'axe et la grandeur de ce couple; de sorte que l'axe instantané OI ne décrira plus le même cône dans l'intérieur du corps, ni le même cône dans l'espace absolu. Or on demande ici quel devrait être ce couple accélérateur K pour que le mouvement du corps fût le même que si le cône droit et circulaire (IOA) roulait uniformément, non plus sur le cône (IOG), mais sur un autre cône fixe (IOV) décrit par OI autour d'un axe OV situé d'une manière quelconque dans le plan des axes OI et OA. Ce serait le cas remarquable du mouvement uniforme de l'axe OA d'un sphéroïde autour d'un axe fixe OV, sans aucune nutation de cet axe OA, ni aucune variation de la vitesse angulaire du corps sur le même axe.

8. Pour résoudre cette question, j'observe que si le couple K est bien choisi, l'axe OA du corps et l'axe OG du couple d'impulsion doivent toujours tomber dans un même plan avec l'axe fixe OV. Il faut donc que le mouvement angulaire du pôle (A) de la figure et

celui du pôle (G) du couple d'impulsion autour du même axe fixe (OV) soient toujours égaux entre eux. Il n'y a donc qu'à chercher ces deux mouvements et à les égaler. Or, soit désignée par α l'inclinaison de l'axe OA du corps à l'axe fixe OV, et concevez la rotation actuelle θ décomposée en deux, l'une autour de OA, l'autre autour de OV. Il est évident que, par la première autour de OA, le pôle (A) du corps reste immobile, et que, par la seconde, il tourne autour de l'axe fixe OV avec une vitesse angulaire exprimée par cette même rotation. Or, suivant le parallélogramme des rotations, cette seconde composante de θ est exprimée par $\theta \frac{\sin o}{\sin \alpha}$. Donc, en désignant par le symbole $\frac{d(\mathrm{A})}{dt}$ le mouvement angulaire du pôle (A) de la figure autour de l'axe OV, on a

$$\frac{d(\mathrm{A})}{dt} = \theta \frac{\sin o}{\sin \alpha}.$$

Cherchons maintenant la vitesse angulaire que prend le pôle (G) du couple d'impulsion, par l'accession du couple accélérateur K. J'observe d'abord que ce couple K doit avoir son axe dans la ligne des nœuds, afin que le couple Kdt, étant composé avec G, ne tende qu'à faire pencher l'axe du couple résultant vers cette ligne des nœuds, sans faire varier ni son inclinaison à l'axe fixe OV, ni la grandeur du couple G. Or maintenant ce couple Kdt, qui a son axe dans la ligne des nœuds, étant composé avec le couple d'impulsion G, donne, au bout d'un instant, la position nouvelle de OG dans la diagonale du rectangle construit sur les deux lignes Kdt et G, qui représenteraient les axes et les grandeurs de ces deux couples. L'extrémité de la ligne G (que je prendrai pour le pôle du couple d'impulsion) est donc portée, au bout d'un instant, suivant une direction parallèle à la ligne des nœuds par un espace Kdt; et cet espace étant divisé par la distance G $\sin(\alpha - u)$ de ce pôle (G) à l'axe fixe OV, donne $\frac{\mathrm{K}\,dt}{\mathrm{G}\sin(\alpha - u)}$ pour l'angle qu'il décrit en un instant autour de cet axe. On a donc, en désignant par le symbole $\frac{d(\mathrm{G})}{dt}$ le mouvement angulaire du pôle (G) autour de l'axe fixe,

$$\frac{d(\mathrm{G})}{dt} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G}\sin(\alpha - u)}.$$

Donc, si l'on veut qu'au bout d'un instant l'axe OA du corps, l'axe OG du couple, et, par conséquent, l'axe OI de la rotation, se retrouvent dans un même plan et sous les mêmes angles avec l'axe fixe OV, afin que le mouvement soit encore le même dans l'instant suivant, et se perpétue ainsi de la même manière à l'infini, il faut poser la condition

$$\frac{d(\mathrm{A})}{dt} = \frac{d(\mathrm{G})}{dt},$$

et, par conséquent, l'équation

$$\frac{\theta \sin o}{\sin \alpha} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G} \sin(\alpha - u)}:$$

d'où l'on tire, pour la détermination du couple K,

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{G}\,\theta \sin o}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha - u).$$

Ce qu'il fallait trouver.

Corollaire I.

9. On voit d'abord par cette expression que le sens du couple accélérateur K ne dépend point du sens du couple d'impulsion G, ou de celui de la rotation θ à laquelle ce couple G donne naissance. Car, comme le sens de θ change toujours en même temps que celui de G, et que l'expression ne renferme que le produit $\mathrm{G}\theta$, il en résulte que le couple K, toutes choses d'ailleurs égales, reste toujours de même sens, quel que soit le sens du couple d'impulsion. Il en est de ce couple comme de celui qui provient des forces centrifuges, et dont le sens est toujours le même, dans quelque sens que le corps tourne.

Corollaire II.

10. On voit ensuite que ce couple K (*fig.* 4) est *nul* lorsque l'angle o est *nul*. En effet, si o est nul, l'axe OI se confond avec l'axe OA, le cône roulant se réduit à son axe, et un tel cône, qui n'est plus qu'une droite, peut rouler à l'infini sur la surface du cône fixe sans y avancer d'un pas, et, par conséquent, en restant immobile dans l'espace absolu. Or, c'est ce qui doit naturellement arriver dans le cas dont il s'agit; car, o étant supposé nul, u est nul aussi, et, par conséquent, l'axe OG du couple d'impulsion se confond avec OA, qui est un axe *principal* du corps, et le seul couple G suffit pour faire tourner le corps à l'infini sur cet axe : d'où il suit que le couple accélérateur étranger K doit être *nul*.

11. Le couple K est encore nul quand on a $\alpha = u$, et c'est ce qui doit être; car si $\alpha = u$, l'axe fixe OV se confond avec OG (*fig.* 5 et 6), et le cône (IOA) roule alors *de lui-même* sur le cône fixe (IOG), sans avoir besoin d'aucun couple étranger K qui l'y oblige.

Corollaire III.

12. Si l'angle α est égal à l'angle o (*fig.* 7), le couple K se réduit à

$$K = G\theta \sin(o - u),$$

ou bien (à cause de $u = o - i$), à

$$K = G\theta \sin i,$$

ce qui est précisément l'expression d'un couple égal et contraire à celui qui provient des forces centrifuges; et c'est, en effet, ce qui doit être. Car supposez qu'un tel couple accélérateur agisse sans cesse sur le corps autour de la ligne des nœuds, il est clair que ce corps tournera perpétuellement sur la même droite OI, comme si cette droite était un *axe fixe*. Or, dans notre hypothèse de l'angle α égal à l'angle o, l'axe OI se confond avec l'axe OV, et le cône mobile (IOA) peut rouler à l'infini sur un cône fixe qui se réduit à son axe OV, sans que la ligne de contact OI se déplace, ni dans le corps, ni dans l'espace absolu.

Corollaire IV.

D'un cône qui roule sur un plan.

13. Lorsque l'angle $(\alpha - o)$ est égal à un angle droit (*fig.* 9), on a

$$\sin \alpha = \cos o$$

et

$$\sin(\alpha - u) = \sin(\alpha - o + i) = \sin(1^{\mathrm{dr}} + i) = \cos i,$$

et K devient

$$K = G\theta \operatorname{tang} o \cos i = I\theta^2 \operatorname{tang} o.$$

Ce cas particulier de $\alpha - o = 1^{dr}$ est celui où la surface du cône fixe se réduit à un plan. Ainsi, quand le mouvement du corps est le même que si le cône (IOA) roulait sur un plan, le couple accélérateur qui l'anime est égal à la *force vive* $I\theta^2$ du corps, multipliée par la tangente de la demi-ouverture o du cône roulant.

Corollaire V.

D'un plan qui roule sur un cône.

14. Si cette demi-ouverture o du cône roulant est égale à un angle droit (*fig.* 10), ce cône se réduit au plan de son équateur, et c'est le cas particulier d'un *plan qui roule sur la surface d'un cône fixe* IOV.

Dans ce cas, où l'angle o est un droit, l'angle u est aussi un droit, comme on le voit par la relation

$$B \operatorname{tang} o = A \operatorname{tang} u,$$

et l'expression du couple accélérateur K devient

$$K = - G\theta \cot \alpha.$$

Corollaire VI.

Si α est égal à un droit (*fig.* 11), K devient $G\theta \sin o . \cos u$, qui peut se ramener à l'expression

$$K = A\theta^2 \sin o \cos o.$$

C'est le cas d'un cône qui roule sur le cône *complémentaire.*

Corollaire VII.

Cas singulier, où le cône roulant se confond avec le cône fixe.

15. Si α est *nul* (*fig.* 8), on trouve $K = -\infty$: et en effet, dans ce cas singulier, le cône mobile se confond avec le cône fixe, et ne peut y rouler sans l'accession d'un couple accélérateur infini; et il en est de même dans le cas de α égal à deux droits, lequel donne

$$K = +\infty.$$

Pour bien entendre ceci, concevez que α ne soit pas tout à fait nul, mais positif et très-près de zéro; le cône mobile sera presque confondu avec le cône fixe sur lequel il roule, et la ligne de contact OI aura un mouvement angulaire très-rapide autour de OV. L'axe du couple G tournera donc avec la même rapidité autour du même axe fixe OV; et, par conséquent, il faudra que le couple accélérateur K soit très-grand, afin que le couple $K\,dt$, qu'il produit à chaque instant, étant composé avec G, donne au pôle (G) cette même vitesse angulaire très-rapide que doit avoir le pôle instantané (I), aussi bien que le pôle (A) de la figure. On voit donc qu'en supposant α tout à fait nul, c'est-à-dire les deux cônes confondus, on doit trouver la valeur de K *infinie*.

Et la même chose doit avoir lieu dans le cas de $\alpha = 2$ *droits*, où les deux surfaces coniques se trouvent encore confondues; ce qui donne également pour K une valeur *infinie*.

La seule différence qu'on puisse ici remarquer, c'est que, dans le cas de $\alpha = 0$, on trouve $K = -\infty$; et que, dans le cas de $\alpha = 2$ *droits*, on trouve $K = +\infty$. Cette différence de signe tient à ce que le premier cas de $\alpha = 0$ étant ici considéré comme la limite de ceux où l'axe fixe OV tend à se confondre avec l'axe OA du cône roulant, le pôle fixe (V) est toujours supposé tomber entre les deux pôles (G) et (A): d'où il résulte que les mouvements de ces deux pôles, estimés parallèlement à la ligne des nœuds, doivent être de sens contraires, et qu'ainsi $K\,dt$ doit être de signe contraire à $\vartheta \sin o\,dt$, et, partant, avoir le signe $-$, si l'on regarde $\vartheta \sin o\,dt$ comme positif. Mais le cas de $\alpha = 2$ *droits* étant considéré comme la limite de ceux où l'axe OV tend à se confondre avec le *prolongement* de OA, cet axe fixe OV est supposé laisser toujours le pôle (G) et le pôle (A) tous deux d'un même côté, et, partant, les mouvements de ces deux pôles, parallèlement à la ligne des nœuds, se font dans le même sens, et le couple $K\,dt$ doit présenter le même signe que $\vartheta \sin o\,dt$.

Remarque I.

16. Ce que l'on vient de dire, à l'occasion du cas singulier qui précède, donne en général la raison des changements de signe que subit le couple K dans l'étendue de toutes les valeurs qu'on peut donner à l'inclinaison mutuelle α des axes OV et OA de nos deux cônes; car les angles o et u, étant considérés comme positifs et moindres qu'un droit, on voit par la formule générale

$$K = G\theta \frac{\sin o}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha - u),$$

que K a le signe $-$ depuis $\alpha = o$ jusqu'à $\alpha = u$, et le signe $+$ depuis $\alpha = u$ jusqu'à $\alpha = 2$ droits $= \pi$; qu'au delà de cette valeur il reprend le signe $-$ jusqu'à l'angle $\pi + u$, et ensuite le signe $+$ jusqu'à la fin de la circonférence 2π. Or c'est ce qui doit être, puisque dans ces intervalles où K a le signe $-$, l'axe fixe OV tombe évidemment entre les deux pôles (A) et (G), tandis que dans les autres intervalles où K a le signe $+$, cet axe fixe laisse les pôles (A) et (G) tous deux d'un même côté.

Remarque II.

17. On vient de voir pourquoi le couple K présente tel ou tel signe, selon que l'axe du cône fixe a telle ou telle position par rapport aux deux axes OA et OG. Mais il est bon de remarquer encore trois autres cas relatifs à la position que peut avoir l'axe instantané OI ou la ligne de contact de nos deux cônes, à l'égard des axes OA et OV de ces deux cônes.

1°. Si OI tombe entre les deux axes OA et OV (*fig.* 1), les deux surfaces coniques se touchent *extérieurement;* de sorte que le cône mobile roule en touchant par sa surface *convexe* la surface *convexe* du cône fixe. Et si l'on regarde cette première figure, on voit que le mouvement angulaire du pôle autour de l'axe fixe OV se fait dans le *même sens* que la rotation du corps estimée autour du même axe OV, sens de mouvement qu'on prend pour terme de comparaison, et qu'on appelle le sens *direct :* de sorte que, dans ce premier cas, on peut dire que la ligne des nœuds a, sur le plan fixe, un *mouvement direct.*

2°. Si OI laisse les deux axes OA et OV tous deux d'un même côté, et dans cet ordre (I), (A), (V) (*fig.* 2), le cône mobile (IOA) tombe alors dans l'intérieur du cône fixe (IOV); de sorte qu'il roule en touchant par sa surface *convexe* la surface *concave* de ce cône fixe; et, dans ce cas, il est visible que le mouvement de la ligne des nœuds se fait dans un sens contraire à celui de la rotation θ, ou qu'il est ce qu'on appelle *rétrograde.*

3°. Si l'axe OI laisse encore d'un même côté les deux axes OA et OV, mais dans l'ordre (I), (V), (A) (*fig.* 3), c'est alors le cône fixe qui tombe dans l'intérieur du cône mobile : de sorte que celui-ci l'enveloppe, et roule en touchant par sa surface *concave* la surface *convexe* du cône fixe dont il s'agit; et, dans ce cas, le mouvement des nœuds se fait dans le même sens que la rotation du corps, c'est-à-dire qu'il est encore *direct*, comme dans le premier cas.

Remarque III.

Où l'on reconnaît le sens suivant lequel agit toujours le couple accélérateur K.

18. Mais il y a encore une chose importante à remarquer; c'est que, dans tous les cas, c'est-à-dire, soit que le cône roulant tombe en *dehors*, ou en *dedans* du cône fixe, soit qu'il *l'enveloppe*, le sens du couple accélérateur K est toujours tel, que si ce couple agissait sur le corps en repos, il tendrait toujours à *détacher* le cône roulant de la surface du cône fixe avec lequel il est en contact, et jamais à l'appuyer contre cette surface. C'est ce qu'il est très-aisé de reconnaître dans les trois cas que l'on vient de parcourir ci-dessus; et de là résulte une conséquence toute nouvelle que nous allons développer dans l'article suivant.

Théorème.

19. Supposons que les surfaces de nos deux cônes, qui ne sont ici que des surfaces fictives, deviennent des surfaces réelles et *résistantes*, de sorte que le cône mobile puisse réellement s'appuyer sur le cône fixe. Je dis que, si l'on vient à supprimer tout à coup le couple accélérateur K, le mouvement du corps restera exactement le même qu'auparavant, mais qu'alors le cône mobile *pressera* continuellement la surface du cône fixe avec la même force que si le corps était animé par un couple accélérateur — K, qui tendît sans cesse à l'appuyer ou à le presser contre cette surface.

Soit, en effet, le corps devenu libre de toute action étrangère, et abandonné à la seule impulsion du couple G : si l'on applique, autour de la ligne des nœuds, les deux couples égaux et contraires $K\,dt$ et $-K\,dt$, il est clair que l'état du corps ne sera pas changé. Mais alors, au lieu de voir le corps comme abandonné à la seule impulsion du couple G, je puis le voir comme animé par l'ensemble des trois couples G, $K\,dt$, $-K\,dt$. Or, de ces trois couples, le dernier $-K\,dt$, tendant à presser le cône mobile sur la surface du cône fixe, peut être considéré comme détruit par la résistance de cette surface. Restent donc les deux couples G et $K\,dt$ dont l'ensemble est capable de faire rouler le cône mobile sur le cône fixe, et cela d'une manière libre, je veux dire comme si ce cône fixe n'existait pas, et, par conséquent, sans exercer la moindre pression sur sa surface. Ainsi la surface fixe ne peut ressentir d'autre pression que celle qui provient du couple $-K\,dt$ dont elle détruit l'effort à chaque instant.

On a donc ce théorème :

Si le cône droit et circulaire (IOA) *est posé sur le cône fixe* (IOV) *de même sommet* O, *et qu'on lui imprime tout à coup une rotation* θ *autour de la ligne de contact* OI, *ce cône abandonné à lui-même roulera uniformément sur le cône fixe, et il en pressera à chaque instant la surface avec la même force que si, étant en repos dans cet instant, il se trouvait sollicité par un couple accélérateur étranger* — K *déterminé par l'équation précédente,*

$$K = G\theta\,\frac{\sin o}{\sin \alpha}\cdot\sin(\alpha - u).$$

REMARQUE.

20. Comme le couple G est proportionnel à la rotation θ qu'il imprime, on voit que cette pression du cône roulant sur le cône fixe est en raison du carré de la rotation θ du corps; en sorte que si la rotation devient double, la pression du cône roulant devient quadruple, etc. Tout ceci est analogue à la pression qu'exerce un point sur le contour d'une courbe fixe où il est forcé de se mouvoir. Le mouvement naturel d'un point libre est d'aller en ligne droite; de manière que, si on l'enferme dans un canal rectiligne, il n'en pressera la surface d'aucun côté. De même, pour le cône IOA, qui tourne actuellement sur sa génératrice OI, son mouvement naturel est de rouler uniformément sur le cône (IOG) décrit autour de l'axe du couple G qui a imprimé cette rotation θ; de sorte que le cône roulant n'exerce aucune pression sur le cône (IOG). Mais si, au lieu de ce cône particulier (IOG), on en présente un autre (IOV) sur lequel le cône mobile trouve un appui, il y roulera encore sans rien perdre de sa rotation imprimée θ, mais il pressera continuellement la surface de ce cône fixe, comme s'il était doué à chaque instant vers ce cône d'une certaine pesanteur proportionnelle au carré de θ.

Lorsqu'un point se meut en ligne courbe, soit en vertu d'une force centrale, soit à cause de la résistance d'un canal curviligne où il est enfermé, si l'on vient à supprimer tout à coup cette force ou cette résistance, le point devenu libre s'échappe par la *tangente* à la courbe, avec la vitesse dont il était animé au moment de la suppression de toutes les forces étrangères. De même ici, quand le cône roulant (IOA) devient libre de toute action étrangère, il s'échappe, pour ainsi dire, de la surface conique sur laquelle il roulait, pour prendre son mouvement sur celle du cône (IOG), qui est comme la tangente de la première.

Solution du cas singulier où l'on trouve $K = \infty$.

21. Dans le cas singulier de $\alpha = o$, où les surfaces des deux cônes se confondent, on trouve K *infini*, comme on l'a déjà remarqué à l'art. **15**. Il en résulterait donc ici que la pression continuelle $-K\,dt$ du cône mobile sur la surface du cône fixe serait infiniment grande, ce qui pourrait être regardé comme une véritable percussion finie qui se renouvellerait à chaque instant contre cette surface. Cette hypothèse d'un cône mobile qui, en vertu d'une rotation primitive θ, autour d'une de ses génératrices OI, pourrait *rouler* continuellement sur la surface fixe d'un autre cône de même centre, de même axe et de même rayon, n'est donc ici qu'une hypothèse purement mathématique ; car, dans la réalité, il est évident que la chose se passerait d'une autre manière. Et, en effet, on pourrait toujours voir la rotation θ comme décomposée en deux : l'une, $\theta \cos o$, autour de l'axe même OA du cône mobile ; l'autre, $\theta \sin o$, autour de la perpendiculaire à cet axe. Or il est visible que celle-ci serait détruite par la résistance de la surface fixe, qui recevrait ainsi, au premier instant, une *percussion* mesurée par le couple $B\theta \sin o$; mais la première rotation $\theta \cos o$, autour de l'axe OA, obtiendrait manifestement son effet, et le cône mobile tournerait librement sur son axe sans exercer la moindre action sur la surface du cône fixe. D'où l'on voit que, dans le cas singulier dont il s'agit, le cône ne *roule* plus, mais ne fait que *glisser* sur la surface du cône fixe : mouvement qui ne répond plus à la question proposée, mais à une autre, comme on aurait pu d'ailleurs en être averti par la valeur *infinie* que le calcul donne alors pour la grandeur du couple K.

Transformations diverses de l'équation de condition

$$(1) \qquad K = G\theta \frac{\sin o}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha - u).$$

22. J'ai laissé jusqu'ici à cette équation la forme simple sous laquelle elle s'est présentée dans notre analyse ; mais on peut la transformer de plusieurs manières, en éliminant, au moyen des relations données au commencement de ce Mémoire, quelques-unes des quantités G, θ, o, α, u qui entrent dans cette équation, pour y introduire celles qu'on voudra considérer comme les *données immédiates* du problème.

Ainsi, en chassant par exemple θ au moyen de la relation

$$\theta\sqrt{A^2 \cos^2 o + B^2 \sin^2 o} = G,$$

et ensuite l'angle o au moyen de la relation

$$B \tang o = A \tang u,$$

on trouvera

$$(2) \qquad K = \frac{G^2}{B} \cdot \frac{\sin u}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha - u),$$

où il n'y a plus d'autres données que G, u, α et B, dont les deux premières G et u répondent à la grandeur du couple d'impulsion et à sa position dans le corps; la troisième α, à l'inclinaison de l'axe OA de ce corps sur l'axe fixe OV; et enfin la dernière B, à la nature du corps dont il s'agit.

23. D'après cette équation, qui ne contient plus le moment d'inertie A du corps autour de son axe, on voit que le couple accélérateur K sera le même pour tout autre corps qui aurait le même moment d'inertie B autour des diamètres de l'équateur. Ainsi dans tous ces corps, qui ne diffèrent que par la valeur A de leur moment d'inertie autour de leur axe de figure, le mouvement angulaire du pôle, ou le mouvement de *précession*, sera le même. Mais il n'en faut pas conclure que tous ces corps se mouvront de la même manière; car, comme dans ces corps le moment A varie de l'un à l'autre, l'angle o, et par conséquent l'angle $(\alpha - o)$, varient en même temps, d'après la relation nécessaire $B \tang o = A \tang u$; et, par conséquent, ce sera pour chaque corps le mouvement d'un cône particulier à la demi-ouverture o qui roulera sur un cône particulier à la demi-ouverture $(\alpha - o)$. La seule chose qui sera commune aux mouvements de tous ces corps, sera la *précession* des pôles (A) et (G).

24. Si, de la formule précédente, on élimine l'angle u, par la relation ci-dessus entre o et u, on trouvera l'équation

$$(3) \qquad K = G^2 \operatorname{tang} o \frac{(A - B \operatorname{tang} o . \cot \alpha)}{A^2 + B^2 \operatorname{tang}^2 o},$$

qui ne contient d'autres angles que o et α.

25. Si, au lieu de α qui marque la distance angulaire des axes OA et OV de nos deux cônes, on veut introduire la demi-ouverture ω du cône fixe, on n'aura qu'à substituer $\omega + o$ au lieu de α; et alors on aura

$$(4) \qquad K = G^2 \operatorname{tang} o \frac{[A - B \operatorname{tang} o \cot(\omega + o)]}{A^2 + B^2 \operatorname{tang}^2 o}.$$

26. Si, au lieu du couple donné G, on veut prendre comme donnée la rotation imprimée θ autour de la ligne de contact OI des deux cônes, on aura $G^2 = \theta^2 \cos^2 o (A^2 + B^2 \operatorname{tang}^2 o)$; et, substituant cette valeur, il viendra

$$(5) \qquad K = \theta^2 \sin o \cos o [A - B \operatorname{tang} o \cot(\omega + o)].$$

C'est une expression très-simple du couple accélérateur K, par la rotation θ qu'on suppose imprimée au cône mobile autour de sa ligne de contact avec le cône fixe, et par les angles o et ω qui marquent les demi-ouvertures de ces deux cônes.

Exemples de ces mouvements, pris dans la nature.

27. Supposons que l'axe OV du cône fixe soit *vertical*, et que le corps mobile soit, comme dans la nature, un corps qui pèse de haut en bas suivant VO, en vertu de la gravité g.

Si l'on désigne par m la masse du corps, et par l la distance au point O, de son centre de gravité C que je suppose tomber sur l'axe même de figure OA, on aura évidemment $m\,.\,gl \sin\alpha\,.\,dt$ pour le moment du couple $K\,dt$ que la gravité fait naître en un instant dt autour de la ligne ON *des nœuds*. Si donc, dans l'une ou l'autre des formules qui précèdent, on substitue au lieu de K l'expression $mgl\sin\alpha$, on aura une équation qui déterminera le couple G qu'on doit appliquer au corps, ou bien la rotation θ qu'il faudra lui imprimer autour de OI, pour que le mouvement de ce corps *pesant* soit le même que si le cône (IOA) roulait uniformément sur le cône fixe (ION) : et la condition d'un tel mouvement sera exprimée par l'équation

$$mgl\sin\alpha = \theta^2 \sin o\,.\,\cos o\,(A - B\tang o\,.\,\cot\alpha),$$

ou par toute autre transformée équivalente (**22** ... **26**).

28. On voit donc qu'un cône *pesant* (IOA), ayant reçu autour de sa génératrice OI une rotation primitive θ déterminée par cette équation, roulera librement sur la surface du cône vertical (IOV), ne tendant ni à presser cette surface, ni à s'en détacher, et demeurant ainsi comme suspendu par sa rotation actuelle θ, qui fera sans cesse équilibre au poids du corps, et empêchera ce corps de tomber vers le plan horizontal.

29. Si la gravité cessait d'agir, mais que la surface du cône fixe devînt une surface résistante, le cône mobile continuerait de rouler avec la même vitesse θ; mais il *presserait* alors la surface du cône fixe avec la même force que s'il était doué d'une pesanteur $-g$, égale et contraire à la pesanteur naturelle.

30. Dans cette hypothèse du cône mobile dépourvu de pesanteur, mais pouvant s'appuyer contre le cône fixe, si l'on suppose imprimée à ce cône mobile une rotation *quelconque* θ' autour de la ligne de contact OI, il roulera uniformément sur le cône fixe, et le pressera à chaque instant comme s'il était doué de bas en haut d'une pesanteur $-g'$ déterminée par l'équation

$$mg' l \sin\alpha = \theta'^2 \sin o \,.\, \cos o\,(\mathrm{A} - \mathrm{B} \operatorname{tang} o \,.\, \cot\alpha).$$

Si donc, θ' étant $> \theta$, et, par conséquent, $g' > g$, on rend au corps sa pesanteur naturelle $+g$, il continuera de rouler de la même manière, mais il ne pressera plus le cône fixe qu'en vertu d'une force égale à la *différence* de g' à g.

Si le cône pesant, au lieu de rouler au dehors, roulait dans l'intérieur de la surface du cône fixe, de manière que son poids tendît à l'appuyer sur cette surface, il la presserait alors comme s'il était doué d'une pesanteur $g' + g$ [g' étant ici donné par l'équation $mg' l \sin\alpha = \theta'^2 \sin o \cos o\,(\mathrm{A} + \mathrm{B} \operatorname{tang} o \,.\, \cot\alpha)$].

31. Si l'ouverture du cône fixe est égale à un angle droit, la surface de ce cône devient un plan, et l'on a le cas particulier d'un cône pesant (IOA) qui roule sur un plan horizontal. L'équation de condition se réduit alors (à cause de $\cot\alpha = -\operatorname{tang} o$), à

$$mgl \cos o = \mathrm{I}\,\theta^2 \operatorname{tang} o.$$

Si donc le cône pesant (IOA) tangent au plan horizontal, et posé *en dessous*, reçoit tout à coup, autour de la ligne de contact, une vitesse angulaire θ déterminée par cette équation, ce cône roulera en liberté sur la face *inférieure* de ce plan, sans la presser, ni s'en détacher, et comme si ce plan n'existait pas.

Si on lui imprime une vitesse plus grande θ', il roulera de même avec cette nouvelle vitesse; mais alors il pressera le plan de bas en haut, comme si, étant supposé en repos dans l'instant que l'on considère, il était doué d'une pesanteur $g' - g$ de sens contraire à la pesanteur naturelle, g' étant déterminée par l'équation

$$mg' l \cos o = \mathrm{I}\,\theta'^2 \operatorname{tang} o.$$

Si le cône, au lieu d'être au-dessous du plan horizontal, était posé *au-dessus*, on pourrait lui imprimer une rotation θ' de *grandeur quelconque;* il roulerait uniformément avec cette vitesse imprimée θ', et il presserait alors le plan, de haut en bas, avec la même force que s'il était doué d'une pesanteur $g'+g$ de même sens que sa pesanteur naturelle.

Il est facile de multiplier ces exemples : je me contenterai d'en ajouter un nouveau, tiré du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

32. Considérons la Terre comme un sphéroïde, ou, en général, comme un corps doué de deux moments égaux d'inertie; et soient toujours désignés par A le moment d'inertie autour de l'axe de ce corps, et par B le moment d'inertie autour d'un diamètre quelconque de l'équateur. Si l'on observe le mouvement de la Terre par rapport aux étoiles regardées comme fixes, on trouve que ce sphéroïde tourne en un jour sur son axe OA, tandis que cet axe tourne lui-même en sens contraire autour de l'axe OV de l'écliptique, et avec une moyenne vitesse angulaire φ, qui est d'environ $0'',136795$ sexagésimales par jour, ce qui fait la *précession diurne* des équinoxes.

Si donc, à partir du centre O, on porte sur l'axe OA une ligne $\rho = 360^\circ$ qui marque la rotation *diurne* de la Terre, et sur le prolongement de VO, une ligne $\varphi = 0'',136795$ qui marque sa rotation autour de l'axe de l'écliptique, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux lignes représentera l'axe et la grandeur de la rotation réelle θ dont la Terre est animée dans l'instant que l'on considère. On aura donc, pour déterminer cette rotation θ et l'inclinaison o de son axe OI à l'axe de figure OA, cette suite de rapports égaux :

$$\varphi : \theta : \rho :: \sin o : \sin \alpha : \sin(\alpha + o),$$

α étant l'inclinaison de OA à OV, ou, ce qui revient au même, l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique.

Ainsi, de ces trois seules quantités, qui sont données par l'observation, savoir : la *rotation diurne*, la *précession* des équinoxes et l'*obliquité* de l'écliptique, on peut conclure la rotation réelle θ de la Terre sur son axe instantané OI, et la distance angulaire o de cet axe à l'axe OA de la figure. Cet angle o est, comme on le voit, très-petit; car de la proportion précédente

$$\varphi : \rho :: \sin\alpha : \sin(\alpha + o),$$

en y mettant, au lieu de φ et ρ leurs valeurs ci-dessus, et au lieu de α, $23°27'32''$, on tire

$$\tang o = \frac{0'',136795 . \sin 23°27'32''}{360° - 0'',136795 . \cos 23°27'32''},$$

ce qui donne un angle o très-petit, et qui, mesuré à la surface de la Terre, répondrait à peine à un arc de 27 centimètres de longueur.

Le pôle instantané I de la rotation est donc très-voisin du pôle A de la figure : et si l'on suppose $A > B$, le pôle G du couple actuel qui anime la Terre, en est encore plus proche; car, en nommant u l'inclinaison de OG sur OA, la relation $B \tang o = A \tang u$ nous donne u plus petit que l'angle o, et, par conséquent, l'axe OG plus voisin que OI de l'axe OA.

Quant à la rotation réelle et instantanée θ, on voit aussi qu'elle diffère extrêmement peu de la rotation apparente ρ sur l'axe de figure OA, puisqu'on a la proportion

$$\theta : \rho :: \sin\alpha : \sin(\alpha + o),$$

et que l'angle o est très-petit par rapport à l'angle α.

33. Tel est donc, d'après l'observation, le mouvement *moyen* du sphéroïde terrestre autour de son centre de gravité : je dis le mouvement *moyen*, parce que, indépendamment de ce petit mouvement *rétrograde* φ, par lequel l'axe terrestre tourne autour des pôles de l'écliptique, et qui fait la *précession* des équinoxes, on en observe encore un autre par lequel cet axe s'abaisse et se relève alternativement sur le plan de l'écliptique, et fait ce qu'on appelle la *nutation* de l'axe terrestre. Mais ce second mouvement étant *périodique*, et comme une simple oscillation de l'axe dans un arc d'une très-petite étendue, s'efface, pour ainsi dire, dans la considération du mouvement général de la Terre, pour ne laisser voir, avec la rotation diurne, que le mouvement de précession, qui est très-petit, mais qui a toujours lieu dans un même sens.

En ne considérant donc que ces deux mouvements, et les supposant tous les deux uniformes, on peut dire que le mouvement de la Terre, autour de son centre de gravité O, est exactement le même que si le cône (IOA), décrit sous l'angle o autour de l'axe OA du sphéroïde, roulait uniformément, sans glisser, sur la surface intérieure du cône fixe (IOV), décrit sous l'angle $(\alpha + o)$ autour de l'axe OV de l'écliptique.

Or on a vu que, pour l'existence d'un tel mouvement, il faut : 1° que la Terre reçoive à chaque instant l'action d'un couple étranger perpendiculaire à la ligne des nœuds; 2° que ce couple agisse toujours dans le *sens* où il tendrait à détacher le cône roulant de la surface du cône fixe, et, par conséquent, à rapprocher l'axe de la Terre de l'axe de l'écliptique, ou, ce qui revient au même, à *coucher* l'équateur sur le plan de l'écliptique; et 3° enfin il faut qu'on ait, pour la grandeur de ce couple accélérateur K, l'équation

$$K = \theta^2 \sin o \cos o (A + B \tang o \cot \alpha).$$

Ainsi, pour que la Terre suive le mouvement actuel qu'on y observe, il faut nécessairement que de l'attraction des corps étrangers, tels que la Lune et le Soleil, il vienne à chaque instant sur elle un couple accélérateur qui, étant *estimé* autour de la ligne des nœuds, remplisse les conditions qu'on vient de dire. Si cette action étrangère n'existait pas, ou venait tout à coup à cesser, le mouvement de la Terre serait changé, et le cône (IOA), au lieu de rouler sur le cône (IOV) décrit autour de l'axe de l'écliptique, roulerait sur le petit cône (IOG) décrit autour de l'axe OG du couple d'impulsion, axe qui deviendrait fixe dans l'espace absolu. L'axe de la Terre projeté sur le plan de l'écliptique, et par conséquent la ligne des nœuds, qui n'est que la perpendiculaire à cette projection, n'aurait donc plus ce mouvement rétrograde qui fait la précession des équinoxes, mais seulement une oscillation très-rapide, à peu près d'un jour, dans un angle très-petit $2u'$ tel qu'on aurait $\sin u' = \frac{\sin u}{\sin \alpha}$, α étant l'inclinaison moyenne de OA à OV; et pendant ce temps le même axe OA aurait, vers le plan de l'écliptique, une nutation ou balancement alternatif d'une amplitude $2u$. Mais poursuivons notre objet.

34. Nous avons trouvé ailleurs que le *couple moyen* N qui vient du *Soleil* pour faire tourner la Terre sur la ligne des nœuds, est exprimé par

$$N = \frac{3S(A-B)\sin\alpha\cos\alpha}{2r^3},$$

S étant la masse du Soleil, r sa moyenne distance à la Terre, et α l'obliquité de l'écliptique.

Nous avons trouvé ensuite que le couple moyen N', qui vient de la Lune pour faire tourner la Terre sur la même ligne des nœuds, est exprimé par

$$N' = \frac{3L(A-B)\sin\alpha\cos\alpha}{2r'^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\gamma\right),$$

L désignant la masse de la Lune, r' sa moyenne distance à la Terre, et γ l'inclinaison de l'orbe lunaire au plan de l'écliptique.

On a donc, pour le couple moyen K qui provient de l'action de ces deux astres, estimée autour de la ligne des nœuds,

$$K = \frac{3(A-B)\sin\alpha\cos\alpha}{2}\left[\frac{S}{r^3}+\frac{L}{r'^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\gamma\right)\right].$$

Si donc la précession observée des équinoxes est uniquement due à l'action de ce couple K, il faut d'abord que ce couple agisse dans le sens où il tend à *coucher* l'équateur sur le plan de l'écliptique, et que, par conséquent, on ait, dans le sphéroïde terrestre, $A > B$: sans quoi le mouvement des équinoxes serait *direct*, au lieu d'être *rétrograde*. Cette première condition de $A > B$ est naturellement remplie si la Terre est un sphéroïde homogène *aplati* aux pôles ou *renflé* vers l'équateur, et elle peut encore avoir lieu dans une infinité d'autres cas où ce sphéroïde aplati serait composé de couches de différentes densités, comme tout nous porte à le croire.

Il faut ensuite que la *grandeur* de ce couple K satisfasse à l'équation précédente (nº **33**), et que, par conséquent, on ait l'équation

$$3\left(1-\frac{B}{A}\right)\sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{S}{r^3}+\frac{L}{r'^3}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\gamma\right)\right]$$
$$= 2\theta^2\sin o\cos o\left(1+\frac{B}{A}\operatorname{tang} o\cot\alpha\right),$$

où θ désigne la rotation réelle de la Terre sur son axe instantané OI, laquelle est exprimée par $\theta = \frac{2\pi \sin \alpha}{\sin(\alpha + o)}$.

35. Voilà donc une relation par laquelle on peut vérifier quelque quantité dont la valeur serait encore incertaine, comme la masse de la Lune, ou le rapport des deux moments d'inertie de la Terre, en supposant que toutes les autres nous soient connues par des mesures directes ou par la théorie de la pesanteur universelle.

Les angles α, γ, o, et les distances r, r' de la Terre au Soleil et à la Lune, peuvent se tirer de l'observation, et la loi de l'attraction donne le rapport de la masse du Soleil à celle de la Terre, rapport qui est environ celui de 354 936 à l'unité. Il ne reste donc d'indéterminés que la masse de la Lune et le rapport des moments d'inertie du sphéroïde terrestre; car la masse de la Lune n'est guère connue que par la partie de la force qu'on lui attribue pour soulever, conjointement avec le Soleil, les eaux de l'Océan; et le rapport B : A ne peut l'être par la seule connaissance de la figure de la Terre, à moins de faire quelque hypothèse sur la constitution intérieure de cette planète. Si l'on suppose la Terre homogène, et l'aplatissement de ce sphéroïde égal à $\frac{1}{308,65}$, tel que les mesures géodésiques paraissent l'indiquer, on trouvera facilement ce rapport de B à A; et mettant cette valeur dans l'équation précédente, on pourra voir quelle est la masse L de la Lune, qui doit répondre à cette hypothèse. La théorie du flux et reflux de la mer, et plusieurs phénomènes astronomiques, tels que la *nutation* de l'axe terrestre, etc., donnent, pour cette masse, $L = \frac{1}{88}T$ environ; et de cette valeur supposée exacte on pourrait tirer réciproquement le rapport B : A et voir s'il peut s'accorder avec quelque hypothèse sur la constitution intérieure de la Terre, l'aplatissement étant toujours supposé de $\frac{1}{308,65}$.

Au reste, ce rapport des deux moments d'inertie de la Terre me paraît devoir être presque indépendant de la variation de densité qui peut avoir lieu dans notre planète. Car, en la considérant comme un sphéroïde composé d'une infinité de couches homogènes terminées par des surfaces semblables, on pourrait supposer que la densité variât de l'une à l'autre d'une manière arbitraire, sans que le rapport B : A des moments d'inertie du corps en fût changé. Voilà donc une infinité de sphéroïdes hétérogènes où les moments d'inertie B et A seront toujours dans le même rapport. Or, en concevant la Terre ainsi partagée en une infinité de couches semblables, il est assez naturel de supposer que la densité est à peu près uniforme dans chaque couche, et ne varie qu'en passant de l'une à l'autre : d'où il suit que, dans toutes les hypothèses qu'on peut faire sur la loi de cette variation, le rapport des moments d'inertie du sphéroïde demeure à très-peu près constant. Ce rapport nous paraît donc dépendre presque uniquement de la figure de la Terre, et très-peu de sa constitution intérieure, et c'est ce que confirme très-bien le calcul que nous avons fait ailleurs pour trouver la précession des équinoxes dans la simple hypothèse de l'homogénéité du sphéroïde terrestre, avec un aplatissement de $\frac{1}{308,65}$ tel que le donnent les mesures géodésiques. L'accord de ce calcul avec l'observation nous prouve que la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre n'a aucune influence sensible sur la quantité de cette précession, et que, par conséquent, le rapport des deux moments d'inertie de la Terre est à très-peu près le même que si elle était homogène, ou composée de couches semblables dont chacune serait d'une densité uniforme.

Mais il y a plus : car si l'on cherche par le calcul le couple accélérateur qui vient d'un centre attirant S sur un corps quelconque T dont les dimensions soient très-petites en comparaison de sa distance au point S, on trouve que la valeur de ce couple est, à très-peu près, la même que si le corps T était un simple ellipsoïde homogène qui aurait les mêmes moments d'inertie. D'où l'on peut conclure que la précession et la nutation dépendent très-peu de la figure et de la constitution de la Terre, mais presque uniquement du rapport qu'il y a entre les deux moments d'inertie de cette planète. Si donc, ce rapport étant conservé, la Terre venait à changer de masse, de figure et de constitution intérieure, la précession et la nutation seraient encore très-sensiblement les mêmes qu'aujourd'hui. Ainsi toutes ces considérations ou hypothèses de figure, de densité, etc., de notre globe n'entrent presque pour rien dans la mesure des phénomènes dont il s'agit; ce qui est assurément très-digne d'être remarqué.

36. Mais, pour en revenir à notre théorie des cônes roulants, laquelle nous a donné l'équation très-simple

$$K = \theta^2 \sin o \cos o \left[A - B \operatorname{tang} o \cot(\omega + o)\right],$$

où les lettres o et ω sont les demi-ouvertures de nos deux cônes, je veux montrer qu'on pouvait parvenir à cette équation par une autre analyse assez délicate, et qui me paraît très-propre à éclaircir et à confirmer la première.

Seconde manière de parvenir à l'expression du couple accélérateur K *dont le cône roulant est animé.*

Soit, en conservant toutes les dénominations précédentes, le cône mobile (IOA), à la demi-ouverture o, qui roule actuellement sans glisser sur le cône fixe (IOV), à la demi-ouverture ω, en tournant sur la ligne de contact OI avec la vitesse angulaire θ.

Supposons que, du centre O et d'un rayon $OI = 1$, on décrive la surface de la sphère qui coupe celles des deux cônes suivant les deux circonférences s et σ. Soit ds l'arc décrit en un instant dt par le pôle I, et qui viendra se coucher au bout de cet instant sur l'arc égal $d\sigma$ de l'orbe fixe σ. Si l'on nomme de et $d\varepsilon$ les angles de contingence des deux surfaces coniques (IOA), (IOV) avec leur commun plan tangent suivant OI, on aura

$$de = \frac{ds}{r}, \quad d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\rho},$$

r et ρ étant les rayons de courbure de ces deux surfaces au point I.

Or, θ étant la rotation autour de OI, il est visible qu'on a

$$\theta\, dt = de + d\varepsilon,$$

ce qui donne, en mettant pour de et $d\varepsilon$ leurs valeurs, et observant qu'on a toujours $ds = d\sigma$,

$$\theta\, dt = d\sigma\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Mais il est clair qu'on a ici

$$r = \operatorname{tang} o \quad \text{et} \quad \rho = \operatorname{tang} \omega.$$

On a donc

$$\theta\, dt = d\sigma \frac{\tang o + \tang \omega}{\tang o . \tang \omega},$$

d'où l'on tire

$$d\sigma = \theta\, dt . \frac{\tang o . \tang \omega}{\tang o + \tang \omega}.$$

Telle est donc, par la rotation actuelle θ, l'expression du mouvement $d\sigma$ du pôle instantané I le long du cercle σ qui sert de base à la surface du cône fixe.

Mais, d'un autre côté, si vous nommez π la rotation accélératrice qui a lieu autour de la ligne des nœuds, de sorte que $\pi\, dt$ marque la rotation infiniment petite que le corps tend à prendre en un instant autour de cette ligne, il est visible que l'axe de la rotation θ doit, au bout d'un instant, passer de sa position actuelle OI à celle de la diagonale du parallélogramme rectangle construit sur les deux lignes θ et $\pi\, dt$. On doit donc avoir aussi, pour le mouvement $d\sigma$ du pôle I,

$$d\sigma = \frac{\pi\, dt}{\theta},$$

d'où, en égalant cette expression à la précédente, on tire

$$\pi = \theta^2 . \frac{\tang o . \tang \omega}{\tang o + \tang \omega};$$

c'est l'expression de la rotation accélératrice π qu'il faut supposer autour de la ligne des nœuds, pour que le mouvement du corps soit le même que si le cône (IOA) roulait sur le cône fixe (IOV) avec la vitesse angulaire θ.

Or cette rotation π est évidemment composée de deux autres : l'une γ due aux forces centrifuges, l'autre $\varkappa$ due aux forces étrangères. Et comme γ a son axe dans la ligne des nœuds, ainsi que π, il s'ensuit que la rotation $\varkappa$, due aux forces étrangères, a aussi son axe dans la même ligne, et que, par conséquent, on a

$$\pi = \varkappa + \gamma.$$

Or la rotation γ, due au couple $g = G\theta \sin i$, qui vient des forces centrifuges, est exprimée par

$$\gamma = \frac{G\theta \sin i}{B},$$

B étant le moment d'inertie du corps autour du diamètre qui fait actuellement la ligne des nœuds. On aura donc, pour la rotation $\varkappa$ due au couple accélérateur K qui vient des forces étrangères,

$$\varkappa = \theta^2 \cdot \frac{\operatorname{tang} o . \operatorname{tang} \omega}{\operatorname{tang} o + \operatorname{tang} \omega} - \frac{G\theta \sin i}{B}:$$

mais, d'après les relations précédentes, on a

$$G\theta \sin i = \theta^2 (B - A) \sin o \cos o.$$

Substituant donc cette valeur à la place de $G\theta \sin i$, et réduisant ensuite toute l'expression, on trouvera

$$\varkappa = \theta^2 \sin o \cos o \left[\frac{A}{B} - \operatorname{tang} o \cot(\omega + o)\right]:$$

d'où, en multipliant de part et d'autre par B, afin d'avoir dans le premier membre le produit $B\varkappa$ qui fait la mesure du couple cherché K, on tire, pour l'expression de ce couple accélérateur,

$$K = \theta^2 \sin o \cos [A - B \operatorname{tang} o \cot o (\omega + o)],$$

ce qui s'accorde parfaitement avec l'expression trouvée (8) par notre première analyse.

37. On peut remarquer que celle-ci est applicable au mouvement d'un cône à base quelconque s, qui roulerait sur un cône fixe à base quelconque σ.

Considérez, en effet, suivant la ligne de contact OI, les deux cônes circulaires *osculateurs* des deux proposés, et nommez r et ρ les deux rayons de courbure de leurs surfaces au pôle I. Vous trouverez de même, en nommant π la rotation accélératrice qui doit avoir lieu autour de $O\pi$, menée perpendiculaire à OI dans le plan tangent des deux cônes,

$$\pi = \theta^2 \frac{r\rho}{r + \rho},$$

θ désignant de même la rotation actuelle du corps autour de la ligne OI.

Cette rotation accélératrice π, qui doit donner à chaque instant au corps la rotation infiniment petite πdt, est la composée de deux autres : l'une γ, qui vient des forces centrifuges; l'autre $\varkappa$, qui vient des forces étrangères. Mais ici γ et $\varkappa$ ne seront point des rotations autour de la même droite $O\pi$, et la composition ne s'en fera point par une simple addition comme dans le cas précédent.

Si l'on conçoit, décrit autour du point O comme centre, l'*ellipsoïde central* du corps mobile, la rotation γ, due aux forces centrifuges, se fera autour du diamètre conjugué au plan GOI de l'axe du couple d'impulsion et de l'axe instantané de la rotation θ, à laquelle ce couple donne naissance.

La rotation π se fait autour d'un axe $O\pi$ parallèle à l'élément ds de l'orbe sphérique s, actuellement décrit par le pôle I : de sorte qu'en prenant deux lignes $O\pi$ et $O\gamma$, qui représentent ces deux rotations, et achevant le parallélogramme, la diagonale représentera l'axe et la grandeur de la rotation $\varkappa$ qui doit venir des forces étrangères. On aura donc, en nommant φ l'inclinaison de γ à π,

$$\varkappa = \sqrt{\gamma^2 + \pi^2 - 2\gamma\pi\cos\varphi}.$$

On pourrait tirer de là l'expression du couple accélérateur K, dont le corps mobile doit être animé pour l'existence du mouvement que l'on suppose; car ce couple K doit être tel, que si on le compose avec le couple $G\theta\sin i$, qui vient des forces centrifuges, le couple résultant soit capable de faire tourner sur $O\pi$, parallèle à l'arc ds, et avec une vitesse angulaire,

$$\pi = \theta^2 \frac{r\rho}{r+\rho}.$$

Par l'accession continuelle d'un tel couple variable K, le cône mobile roulera sur le cône fixe en tournant sur la ligne de contact OI avec la vitesse angulaire θ.

38. Mais, pour nous borner ici à un cas plus simple, ne considérons, comme dans ce qui précède, qu'un corps dont l'ellipsoïde central, relatif au point fixe O, soit de révolution. Supposons que le cône mobile soit droit et circulaire autour de l'axe OA de ce sphéroïde, et que la surface du cône fixe reste d'ailleurs à base quelconque σ. Il est clair que les axes des rotations γ et π tomberont dans une même droite parallèle à l'arc ds ou $d\sigma$, et qu'on aura simplement

$$\varkappa = \pi + \gamma,$$

comme dans les cas déjà traités, où les deux cônes sont également droits et circulaires.

Si donc on nomme de même o la demi-ouverture *constante* du cône circulaire (IOA), et ω la demi-ouverture *variable* du cône osculateur de la surface conique à base quelconque σ, on aura

$$r = \tang o \quad \text{et} \quad \rho = \tang \omega;$$

et, par les mêmes calculs que ci-dessus, on arrivera à l'expression

$$B\varkappa = K = \theta^2 \sin o \cos o \left[A - B \tang o . \cot(\omega + o)\right],$$

toute semblable à la précédente, mais où l'angle ω, au lieu d'être constant, sera une variable dépendante de l'orbe sphérique donné σ.

39. Concevez que, du centre O, on mène l'infinité des droites parallèles aux tangentes successives de cet orbe σ; toutes ces droites formeront une surface conique qui pourra tenir lieu du plan fixe auquel on rapportait plus haut le mouvement du corps; et l'on pourra nommer de même *ligne des nœuds*, la droite suivant laquelle l'équateur vient couper à chaque instant cette surface conique. C'est autour de cette ligne que le couple variable K doit agir sans cesse pour que le mouvement du corps soit le même que si le cône (IOA) roulait sans glisser sur le cône fixe donné, en tournant sur la ligne de contact OI avec une vitesse angulaire constante θ.

40. Supposons maintenant, comme dans les art. **19** et suivants, qu'on supprime tout à coup ce couple accélérateur K, mais que, d'un autre côté, les surfaces de nos deux cônes, qui n'étaient que fictives, deviennent des surfaces réelles et capables de résistance. Je dis que le mouvement continuera exactement de la même manière, c'est-à-dire que le cône mobile roulera perpétuellement sur le cône fixe avec la même vitesse angulaire θ, mais qu'il exercera sur la surface de ce cône une pression continuelle, comme s'il ressentait à chaque instant dt l'action $-\mathrm{K}dt$ d'un couple accélérateur $-\mathrm{K}$ qui tendît à l'appuyer contre cette surface, et dont la valeur variable K serait exprimée par l'équation précédente.

Et, en effet, soit G le couple capable de la rotation θ autour de OI; si vous concevez qu'on applique à chaque instant sur la ligne des nœuds, les deux couples égaux et contraires $\mathrm{K}dt$ et $-\mathrm{K}dt$, ce qui ne change rien à l'état du mouvement, vous pourrez considérer que les deux couples G et $\mathrm{K}dt$ combinés ensemble font rouler le cône mobile sur le cône fixe d'une manière libre, je veux dire sans qu'il y ait la moindre action de l'un sur l'autre. Reste donc le couple $-\mathrm{K}dt$, qui tend à rapprocher le cône mobile du cône fixe, et d'où résulte la pression dont il s'agit.

41. Désignons par m la masse du corps, et regardons le couple K comme composé de deux forces mp et $-mp$: l'une mp, appliquée au centre de gravité C de ce corps, et perpendiculaire au plan tangent des deux cônes; l'autre $-mp$, égale, parallèle et de sens contraire, et appliquée au point O. Si l'on fait $\mathrm{CO} = l$, on aura $l\cos o$ pour le bras de levier de ce couple, et $mpl\cos o$ pour l'expression de son moment K. On aura donc

$$mpl\cos o = \mathrm{K},$$

et, partant,

$$p = \frac{\theta^2}{ml}\sin o\,[\mathrm{A} - \mathrm{B}\tang o.\cot(\omega + o)],$$

pour l'expression de la force accélératrice p, qui donnerait lieu au mouvement proposé si elle agissait sans cesse sur toutes les molécules suivant la perpendiculaire au plan de contact des deux cônes, et dans le *sens* qui tend, non pas à presser le cône mobile sur le cône fixe, mais bien à l'en détacher. Par une telle force accélératrice p, combinée avec le couple d'impulsion G, le corps prendra de lui-même le mouvement qu'on suppose, et le point fixe O sera seul chargé d'une pression continuelle $-mp\,dt$, variable de grandeur et de direction suivant les lois que l'on vient de dire.

Si l'on supprime tout à coup cette force accélératrice p, et que le corps reste abandonné à son inertie, le mouvement continuera exactement de la même manière; mais alors le cône mobile *pressera* le cône fixe comme si le corps était doué d'une pesanteur $-p$ dirigée vers le plan tangent; et le point fixe O sera chargé d'une pression continuelle $+ mp\,dt$, etc., etc.

Mais je reviendrai ailleurs sur quelques-uns de ces théorèmes dynamiques, et j'en développerai d'autres qui se présentent naturellement comme autant de corollaires de notre *Théorie nouvelle de la Rotation des corps*.