JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STEINER

Extraits de deux mémoires sur les propriétés générales et la dépendance mutuelle des courbes algébriques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 309-356.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__309_0>

Extraits de deux Mémoires sur les propriétés générales et la dépendance mutuelle des courbes algébriques;

Par M. STEINER,
Membre de l'Académie royale des Sciences et Professeur à l'Université de Berlin.

(Traduit de l'allemand par M. Woepcke.)

I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES.

Dans la séance des sections réunies de l'Académie de Berlin du 10 août 1848 [*], M. Steiner présenta un Mémoire sur les propriétés générales des courbes algébriques.

Ces courbes sont considérées dans ce Mémoire relativement à leur degré et à leur classe; on y explique la nature des points doubles et de rebroussement, des tangentes doubles et d'inflexion, et l'on fait voir la dépendance mutuelle entre ces éléments d'un côté et le degré et la classe des courbes de l'autre côté. Qu'on désigne par g et k respectivement le degré et la classe d'une courbe $K^g = \mathfrak{K}^k$, par d et r le nombre de ses points doubles et de rebroussement, par t et w le nombre de ses tangentes doubles et d'inflexion, on aura les trois équations suivantes :

$$g(g-1) = k + 2d + 3r, \tag{1}$$

$$k(k-1) = g + 2t + 3w, \tag{2}$$

$$3g(g-1) = 6d + 8r + w. \tag{3}$$

Des six quantités qui figurent dans ces équations, trois étant données, ces équations servent à trouver les trois autres. Cela donne lieu à soixante formules.

Pour la détermination des courbes par des points donnés, le théorème connu suivant se présente comme

Premier théorème fondamental. *Par* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *points* a, *donnés quelconques*

[*] Nous donnons ici cet extrait des *Comptes rendus mensuels des séances de l'Académie des Sciences de Berlin*, principalement parce que dans les morceaux suivants on devra souvent renvoyer aux définitions et aux théorèmes qu'il contient.

il passe un nombre infini de courbes du $n^{ième}$ *degré* A^n, *et toutes ces courbes passent, en outre, nécessairement par* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *autres points déterminés* a_0, *de manière à former un faisceau de courbes* $B(A^n)$ *ayant* n^2 *points en commun.*

Appelons les points a_1 les *points déterminants*, les points a_0 *les points nécessaires*, et tous ces n^2 points a ensemble les *points fondamentaux* du faisceau $B(A^n)$.

Ce théorème est un des plus essentiels et des plus féconds pour l'examen des propriétés des courbes, parce qu'il donne lieu à des développements nombreux. Mentionnons entre autres la génération des courbes par des faisceaux de courbes de degrés inférieurs, absolument analogue à la génération des coniques par des faisceaux de droites projectives; puis un grand nombre de théorèmes sur les contacts des courbes, conduisant en particulier à différentes propriétés remarquables des vingt-huit tangentes doubles des courbes du quatrième degré.

Le Mémoire présenté à l'Académie de Berlin établit relativement aux polaires quelques points de vue nouveaux et plus étendus qui amènent une foule de nouveaux résultats.

Si d'un point donné quelconque P on mène les tangentes à une courbe donnée A^n (que nous appellerons la *base*), les $n(n-1)$ points de contact se trouveront sur une courbe A^{n-1}; et si du même point P on mène les tangentes à cette nouvelle courbe, les $(n-1)(n-2)$ points de contact se trouveront sur une courbe A^{n-2}; en continuant ainsi, on obtient successivement les courbes A^{n-1}, A^{n-2}, A^{n-3},..., A^2, A^1, que nous appellerons respectivement la 1^{re}, 2^e, 3^e, ..., $(n-2)^e$, $(n-1)^e$ des *polaires successives* du point P par rapport à la base A^n, et que nous représenterons par les symboles suivants :

$$(P)_1 : A^n = A^{n-1}, \quad (P)_2 : A^n = A^{n-2},$$
$$(P)_x : A^n = A^{n-x}, \quad (P)_{n-2} : A^n = A^2, \quad (P)_{n-1} : A^n = A^1,$$

où, par exemple, la formule

$$(P)_x : A^n = A^{n-x}$$

exprime que la $x^{ième}$ polaire du point P par rapport à la base A^n est une courbe du degré $(n-x)$, donc A^{n-x}. La $(n-2)^{ième}$ polaire A^2 est une conique, et la $(n-1)^{ième}$ polaire A^1 est une droite.

Si le pôle P se meut sur une ligne quelconque L (directrice), chacune de ses polaires, par exemple la $x^{ième}$, parcourra une série continue de courbes A^{n-x}, que nous désignerons par $S(A^{n-x})$; cette série de courbes enveloppera une courbe que nous appelons *la* $x^{ième}$ *enveloppe polaire* E_x *du pôle mobile* P, ou simplement *la* $x^{ième}$ *polaire de la directrice* L *par rapport à la base* A^n. Nous exprimons cela par les symboles suivants :

$$(4) \qquad (L)_x : A^n = S(A^{n-x}) = E_x.$$

Si la directrice L est une courbe donnée du degré r, donc D^r, le degré de chacune de ses polaires E_1, E_2,..., E_{n-1} sera déterminé; à savoir, on aura généralement

$$(5) \qquad (D^r)_x : A^n = E_x^{r(r+2x-3)(n-x)};$$

c'est-à-dire *la $x^{\text{ième}}$ polaire de la courbe D^r par rapport à la base A^n est une courbe E_x du degré $r(r+2x-3)(n-x)$*; ou *si le pôle P se meut sur la courbe D^r, son $x^{\text{ième}}$ enveloppe polaire E_x est une courbe du degré $r(r+2x-3)(n-x)$.*

Pour la première et la dernière polaire, donc pour $x=1$ et pour $x=n-1$, on a, en particulier,

$$(D^r)_1 : A^n = E_1^{r(r-1)(n-1)}, \tag{6}$$

et

$$(D^r)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{r(r+2n-5)}; \tag{7}$$

si, au contraire, on a

$$r=1,$$

donc, si la directrice est une droite D^1, on aura, d'après l'équation (5),

$$(D^1)_x : A^n = E_x^{2(x-1)(n-x)}, \tag{8}$$

et pour $x=1$ et $x=n-1$, il suit

$$(D^1)_1 : A^n = E_1^0, \tag{9}$$

et

$$(D^1)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{2(n-2)} = \mathfrak{E}^{n-1}; \tag{10}$$

c'est-à-dire, *si le pôle P se meut sur une droite D^1* [équation (9)], *sa première enveloppe polaire est de degré nul, E_1^0, ce qui indique que les courbes de la série $S(A^{n-1})$ se coupent en $(n-1)^2$ points a, auxquels se réduit l'enveloppe, ou que la série des polaires A^{n-1} se transforme dans un faisceau $B(A^{n-1})$*; et puis [équation (10)], *la $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire d'une droite D^1 par rapport à la base A^n est une courbe $\mathfrak{E}^{n-1}$ du degré $2(n-2)$ et de la classe $(n-1)$.*

Pour l'examen des polaires, le théorème suivant, généralement connu, sert comme

Second théorème fondamental. *Si, par rapport à la même base A^n, on prend les premières polaires P^{n-1} et Q^{n-1} de deux points quelconques P et Q, et si l'on prend ensuite la première polaire de P par rapport à la courbe Q^{n-1} et la première polaire de Q par rapport à P^{n-1}, ces deux polaires seront une seule et même courbe R^{n-2}, ce que nous exprimons par*

$$(Q)_1 : [(P)_1 : A^n] = (P)_1 : [(Q)_1 : A^n] = R^{n-2}. \tag{11}$$

Ce théorème est aussi fécond que le précédent; par une application répétée de la loi qu'il exprime, on trouve d'abord que

$$(Q)_y : [(P)_x : A^n] = (P)_x : [(Q)_y : A^n] = R^{n-x-y}, \tag{12}$$

On en conclut aussi que, *si le point* Q *se trouve sur la* $x^{\text{ième}}$ *polaire de* P, *donc sur* P^{n-x}, *la* $(n-x)^{\text{ième}}$ *polaire de* Q, *donc* Q^x, *passera par le point* P.

De même, on en déduit le beau théorème de réciprocité suivant :

Si la $x^{\text{ième}}$ *polaire d'un point* P, *donc* P^{n-x}, *a un point double* Q, *réciproquement la* $(n-x-1)^{\text{ième}}$ *polaire de* Q, *à savoir* Q^{x+1}, *aura le premier point* P *pour point double.*

Les points doubles des polaires jouent un rôle important, ainsi qu'on le voit dans l'exemple suivant :

Le lieu du point P, *dont la première polaire* P^{n-1} *a un point double* Q, *est une courbe du degré* $3(n-2)(n-2)$,

$$= P_0^{3(n-2)^2},$$

et le lieu du point double Q *est une courbe du degré* $3(n-2)$,

$$= Q_0^{3(n-2)};$$

cette dernière courbe Q_0 est donc en même temps le lieu du point Q dont la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire Q^2 a un point double P, et la première courbe P_0 est le lieu de ce point double. Conséquemment, la polaire Q^2 est une conique formée de deux droites qui se coupent en P.

Les courbes P_0 et Q_0, et d'autres semblables, seront appelées *courbes nodales* [*] *conjuguées* de la base A^n. Elles jouissent, entre autres, des propriétés suivantes :

La courbe Q_0 *passe par les* $3n(n-2)$ *points d'inflexion de la base* A^n, *et la courbe* P_0 *touche toutes les tangentes d'inflexion de* A^n. *La courbe* P_0 *est de la classe* $3(n-1)(n-2)$; *et c'est à la même classe qu'appartiendra, en général, la courbe* R_0 *qui est enveloppée de la droite* PQ; *cette courbe* R_0 *touche pareillement les tangentes d'inflexion de la base* A^n, *etc. La* $(n-1)^{\text{ième}}$ *polaire d'une courbe quelconque* D^r, *à savoir* $D^{r(r+2n-5)}$ [équation (7)], *touche la courbe nodale* P_0 *en* $3r(n-2)$ *points, etc. La courbe nodale* P_0 *a*

$3(n-2)(4n-9)$ *tangentes d'inflexion ;*
$\frac{3}{2}(n-2)[(3n^2+1)(n-4)+28]$ *tangentes doubles ;*
$12(n-2)(n-3)$ *points de rebroussement, et*
$\frac{3}{2}(n-2)[3(n-2)^3-14(n-2)+11]$ *points doubles.*

Pour que P_1 *et* P_2 *soient deux points tels que leurs polaires premières* P_1^{n-1} *et* P_2^{n-1} *se touchent en un point* X, *il faut que la droite* P_1P_2 *touche toujours la courbe* P_0 *en un point* P; *le point* X *sera le pôle* Q *réciproque de* P, *et la droite* PQ *sera la tangente commune des susdites polaires au point* X = Q. *Donc toutes les polaires premières* P^{n-1},

[*] La traduction littérale du terme *Kern-Curve* employé par M. Steiner serait *courbe-noyau*

$P_2^{n-1}, \ldots$ *ne peuvent se toucher qu'en des points* Q *qui se trouvent sur la courbe nodale* Q_0, *lesquels points sont, en conséquence, des points doubles des polaires prises séparément. A chaque tangente* PP_1 *de la courbe* P_0 *il correspond un faisceau de polaires premières* [équation (9)], $B(P_1^{n-1})$, *lesquelles se touchent en un seul et même point* Q, *qui est le pôle réciproque du point de contact* P *de la tangente. Si, en particulier,* PP_1 *est une tangente d'inflexion de la courbe nodale* P_0, *ses polaires* $B(P_1^{n-1})$ *auront un contact du deuxième ordre en* Q; *et si* PP_1 *est une tangente double de* P_0, *les polaires* $B(P_1^{n-1})$ *se toucheront en deux points différents* Q. *Si, enfin,* P *est un point double de la courbe* P_0, *sa première polaire* P^{n-1} *aura deux points doubles* Q; *conséquemment, il existe autant de polaires premières ayant deux points doubles qu'il existe de points doubles de la courbe nodale* P_0; *etc.*

La totalité des polaires premières P^{n-1}, P_1^{n-1}, $P_2^{n-1}, \ldots$ forme un réseau qui est déterminé par trois quelconques d'entre elles qui n'appartiennent pas à un même faisceau, et par lequel la base A^n est déterminée ensuite de son côté. Si les trois courbes données ont des points communs [1, 2, 3,..., et tout au plus $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-2$], ces points seront des points doubles de la courbe nodale Q_0.

Donc le lieu des points doubles (ou des points de contact) de toutes les courbes P^x *qui passent par les mêmes* $\frac{1}{2}x(x+3)-2$ *points donnés d, sera une courbe* $Q^{3(x-1)}$ *qui aura les points d pour points doubles. Si les courbes* P^x *sont assujetties à passer par* $\frac{1}{2}x(x+3)-1$ *points d, elles formeront un faisceau* $B(P^x)$ *et auront ensemble* $3(x-1)^2$ *points doubles.*

Au sujet des polaires (enveloppes polaires) mentionnées ci-dessus, nous faisons observer que si l'on en prend une pour directrice, il lui correspondra pareillement une série de courbes polaires, dont une, en particulier, sera appelée sa *polaire réciproque*. Or, si de la $x^{ième}$ polaire d'une courbe D^r, donc [équation (5)] de

$$E_x^{r(r+2x-3)(n-x)},$$

on prend la $(n-x)^{ième}$ polaire, donc la polaire réciproque, celle-ci devrait être la courbe donnée D^r; mais, en vertu de la formule générale (5), en posant

$$r(r+2x-3)(n-x)=s,$$

elle sera une courbe du degré $s[s+2(n-x)-3]x$. Ici la contradiction apparente est plus frappante encore que dans le cas de la polarité ordinaire, où la base est une conique, et pour lequel cas cette contradiction a été éclaircie par M. Poncelet. Dans le cas actuel, nous expliquons le paradoxe comme il suit :

La première polaire de D^r par rapport à la base A^n est

$$E_1^{r(r-1)(n-1)},$$

et pour la $(n-1)^{\text{ième}}$ polaire de cette dernière, on a, d'après la formule (7),

$$E_{n-1}^{r(r-1)(n-1)[r(r-1)(n-1)+2n-5]},$$

tandis que, en vertu de la réciprocité, on devrait obtenir la courbe originale D^r. Ce que ce résultat présente de surprenant s'explique par la considération que la courbe E_{n-1} est formée :

1°. De $(n-1)^2$ fois la courbe D^r conjointement avec ses $3r(r-2)$ tangentes d'inflexion et ses $\frac{1}{2}r(r-2)(r^2-9)$ tangentes doubles, où chaque tangente d'inflexion doit être comptée comme une droite triple, et chaque tangente double comme une droite double; donc de

$$(n-1)^2 \times (D^r + 2d + 3w);$$

2°. Des $3r(r-1)(n-1)(n-2)$ tangentes communes à la courbe D^r et à la courbe nodale P_0.

Une courbe donnée Q^q peut être touchée par les courbes d'un faisceau $B(P^p)$ donné dans le même plan, en $q(q+2p-3)$ points R, lesquels, conjointement avec les $3(p-1)^2$ points doubles du faisceau $B(P^p)$ se trouvent toujours sur une courbe R^{q+2p-3}. Deux faisceaux de courbes quelconques $B(P^p)$ et $B(Q^q)$ étant donnés dans un même plan, le lieu du point R où les courbes des deux faisceaux se touchent deux à deux, est une courbe du degré $(2p+2q-3)$; et le nombre des points R_1, en lesquels deux courbes P^p et Q^q des deux faisceaux ont un contact du deuxième ordre, est

$$= 3[(p+q)(p+q-6)+2pq+5].$$

Trois faisceaux de courbes quelconques $B(P^p)$, $B(Q^q)$ et $B(R^r)$ étant donnés dans un plan, le nombre des points en lesquels ces courbes se touchent trois à trois est, en général,

$$= 4(pq+pr+qr) - 6(p+q+r-1).$$

On voit facilement que ces considérations générales donnent lieu, pour les courbes du troisième et du quatrième degré en particulier, à un grand nombre de relations intéressantes et en partie entièrement nouvelles; notamment on arrive ainsi à des propriétés remarquables des vingt-huit tangentes doubles de la courbe du quatrième degré, matière qui jusqu'à présent a fourni peu de résultats aux géomètres qui en ont entrepris l'examen. La courbe du troisième degré présente encore plus de cas spéciaux; on démontre à cette occasion que l'*involution* est la véritable base d'un grand nombre de ses propriétés.

Différents systèmes de corrélation conduisent soit à des résultats analogues à ceux qu'on obtient par la polarité, soit à des théorèmes nouveaux sur les courbes algébriques.

II.

PRÉSENCE DES COURBES A CENTRE DANS LA DISCUSSION DE COURBES GÉNÉRALES.

Polaires intérieures.

§ I^er^.

Par chaque point P situé dans le plan d'une conique C^2 on peut toujours mener une corde réelle ou imaginaire aa_1 ayant le point P pour point milieu. En général, on ne peut mener par P qu'une seule corde de ce genre. Dès qu'on peut mener deux cordes de ce genre par un même point P, on pourra en mener une infinité, et P sera, en ce cas, le centre de C^2.

Cette considération peut être étendue aux courbes supérieures. Si par un point quelconque P situé dans le plan d'une courbe donnée C^m, on mène une droite S, elle coupera la courbe en m points. On peut demander maintenant que la droite soit menée de telle sorte que deux quelconques des m points d'intersection, soit a et a_1, soient également distants de P et placés de part et d'autre de ce point (non pas réunis dans un point de contact). Pour abréger, appelons toute droite S contenant un tel couple de points d'intersection, *corde* simplement, et les points a et a_1, *extrémités* de la corde; si une droite contient deux de ces couples de points d'intersection, soit a et a_1, b et b_1, nous l'appellerons *corde double*, et nous la désignerons par S_2; donc S_2 aura deux couples d'extrémités. Pareillement, il y aura lieu à des cordes triples, quadruples, etc.

Le nombre de toutes les cordes S passant par un même pôle P, et la position de leurs extrémités a et a_1 sont déterminés par le théorème suivant :

I. *Par chaque point* P *situé dans le plan d'une courbe donnée* C^m *il passe, en général,* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *cordes* S, *dont les* $m(m-1)$ *extrémités* (a *et* a_1) *se trouvent toujours sur une courbe* I^{m-1} *dont le degré est inférieur au degré de la précédente d'une unité, et qui a nécessairement le pôle* P *pour centre* [*].

---

[*] On démontre ce théorème, entre autres, par la considération géométrique suivante : Qu'on fasse décrire à la courbe C^m, dans son plan, autour du pôle fixe P, une demi-révolution de 180 degrés, et qu'on désigne la courbe dans cette nouvelle position par C_1^m, ou, ce qui revient au même, qu'on imagine la courbe C_1^m symétrique à C^m par rapport au point P, de sorte que $C^m + C_1^m$ représentera une seule courbe C^{2m} ayant P pour centre, et dans laquelle chaque point p appartenant à C^m a son correspondant p_1 appartenant à C_1^m, et réciproquement. Les courbes C^m et C_1^m auront des asymptotes parallèles. Conséquemment, m de leurs m^2 points d'intersection se trouvent sur la droite à l'infini G_∞ donc les $m(m-1)$ points d'intersection qui restent se trouveront sur une courbe I^{m-1} du degré

Les extrémités dont il s'agit sont précisément formées par tous les points d'intersection des deux courbes. Si, dans un cas particulier, il passe par un même pôle P plus de $\frac{1}{2}m(m-1)$ cordes S, ne fût-ce qu'une seule corde de plus, il en passera une infinité, de sorte que la courbe donnée C^m aura elle-même le point P pour centre.

Si de toutes les droites passant par P on ne considère que les droites T sur lesquelles deux des m points d'intersection avec la courbe C^m sont encore également distants de P, mais placés du même côté de P, de manière à coïncider dans un point de contact de la droite T, il existe, comme on sait, $m(m-1)$ tangentes de ce genre, dont les $m(m-1)$ points de contact se trouvent sur une courbe A^{m-1}, que nous appelons la *première polaire* du pôle P par rapport à la courbe C^m (*voyez* l'extrait précédent).

Eu égard à l'analogie que présente cette relation avec celle que nous venons d'énoncer, nous appellerons la courbe I^{m-1} la *polaire intérieure* (quoique, sous d'autres points de vue, cette dénomination ne soit pas parfaitement convenable), et la courbe A^{m-1} la *polaire extérieure*, ou simplement la *première polaire* du pôle P par rapport à la base C^m. Les deux polaires sont donc toujours de même degré. En outre, il existe entre elles la relation importante que voici.

II. *Les deux polaires* A^{m-1} *et* I^{m-1} *d'un point quelconque* P *par rapport à la même courbe donnée* C^m *ont* $m-1$ *points d'intersection à l'infini, situés sur la droite à l'infini* G_∞; *conséquemment, leurs asymptotes sont parallèles deux à deux, et les deux asymptotes formant un de ces couples sont à la fois réelles ou imaginaires; en outre, les* $(m-1)(m-2)$ *autres points d'intersection des deux polaires se trouvent sur une courbe* $C^{(m-2)}$ *du degré* $(m-2)$.

§ II.

Discutons d'abord diverses questions particulières relatives à la polaire intérieure et conduisant en partie à des résultats intéressants. On pourra demander qu'est ce qui s'ensuivra pour la polaire I^{m-1} ou pour sa relation avec la base C^m lorsque le pôle P se trouve sur la base même, ou si, en particulier, il en est un point singulier; ou, ce qui aura lieu relativement à la polaire I^{m-1}, si la base prend une forme spéciale, par exemple si elle se décompose en parties; ou, enfin, s'il existe dans le plan de la base des pôles particuliers donnant lieu à une forme particulière de la polaire intérieure, par exemple à une décomposition en parties, etc. Voici un aperçu succinct des cas les plus importants.

$(m-1)$; ils formeront, en outre, deux à deux des couples de points symétriques par rapport à P (car si a est un point d'intersection de C^m avec C_1^m, son correspondant a_1 appartiendra également aux deux courbes à la fois). En conséquence, ces points d'intersection seront les extrémités de $\frac{1}{2}m(m-1)$ cordes aa_1 de la courbe C^m (et de même de C_1^m), et la courbe I^{m-1} aura le pôle P pour centre.

I. *Modifications de la polaire intérieure, si le pôle* P *se trouve sur la base* C^m *même.*

Il faut distinguer les deux cas $m = 2\mu$ et $m = 2\nu - 1$; donc deux espèces de polaire intérieure

$$I^{2\mu-1} \quad \text{et} \quad I^{2\nu-2},$$

dont la première passe toujours par son propre centre, c'est-à-dire par son propre pôle P, et se distingue encore sous d'autres points de vue de la seconde.

1°. *Si le pôle* P *est un point quelconque de la base* C^m.

(α) $I^{2\mu-1}$ aura la tangente de C^m au point P pour tangente d'inflexion.

(β) $I^{2\nu-2}$ aura un point double en P.

2°. *Si* P *est un point d'inflexion de la base* C^m.

(α) $I^{2\mu-1}$ aura, en commun avec la base, la tangente en P pour tangente d'inflexion.

(β) $I^{2\nu-2}$ aura un point double en P avec deux tangentes d'inflexion dont une coïncide avec la tangente d'inflexion de la base.

3°. *Si* P *est un point double de la base.*

(α) $I^{2\mu-1}$ aura en P un point d'inflexion triple, et trois tangentes d'inflexion avec lesquelles elle a des contacts du quatrième ordre.

(β) $I^{2\nu-2}$ aura un point double en P avec deux tangentes d'inflexion qui coïncident avec les deux tangentes de la base.

4°. *Si* P *est un point de rebroussement de la base.*

(α) $I^{2\mu-1}$ aura en P un point d'inflexion triple avec trois tangentes d'inflexion, de sorte qu'elle y a avec chacune de ces tangentes un contact du quatrième ordre comme dans le cas précédent (3°).

(β) $I^{2\nu-2}$ aura en P la tangente de rebroussement de la base pour tangente de rebroussement double et pour tangente d'inflexion double, car elle y touche la tangente de rebroussement de la base doublement, avec deux branches, et conséquemment elle s'y touche aussi elle-même.

Si, par exemple, la base donnée est seulement du quatrième degré, donc C^4, la polaire intérieure I^3 sera formée dans les deux cas (3, α) et (4, α) de trois droites $3I^1$ passant par P, savoir de trois cordes doubles aa_1 ou S_2, ayant un couple d'extrémités b et b_1 coïncidentes en P. En même temps, la polaire extérieure A^3 aura en commun avec la base le point double ou de rebroussement, ainsi que les tangentes correspondantes (deux tangentes réelles au cas 3, une tangente de rebroussement au cas 4). En vertu du théorème, § I^er^, II, il suit : *que les trois droites* $3I^1$ *dont la polaire intérieure est formée, ou les trois cordes doubles* $S_2 = aa_1$ *qui passent par le point* P, *doivent être respectivement parallèles aux trois asymptotes* $3A_1$ *de la polaire extérieure* A^3 ; et réciproquement, que, *si l'on mène par* P *une droite* S *parallèle à une asymptote de* A^3, *cette droite sera rencontrée par la base* C^4 *en deux points* a *et* a_1 *également distants de* P.

5°. *Si* P *est un point* $(m-1)^{tuple}$ *de la base* C^m.

La polaire intérieure I^{m-1}, *aussi bien que la polaire extérieure* A^{m-1}, *sera formée des* $m-1$ *tangentes de la base au point* P.

II. *Modifications de la polaire intérieure si la base est formée de différentes parties.*

La base C^m peut de différentes manières se décomposer en parties, c'est-à-dire elle peut être formée de deux ou de plusieurs courbes de degrés inférieurs, ou même exclusivement de droites, auxquels cas le théorème du § I^{er} reste toujours vrai, ce qui donne lieu, entre autres, aux théorèmes particuliers suivants :

1°. *Si la base* C^m *est formée de* m *droites* G :

Étant données dans un plan m *droites quelconques* G, *si l'on mène par un pôle quelconque* P *entre ces droites prises deux à deux les cordes* S, *ou* aa_1 *ayant* P *pour point milieu du segment compris entre les deux droites respectives, ce qui donne lieu à* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *cordes* aa_1 ; *les* $m(m-1)$ *extrémités* a *et* a_1 *seront toujours sur une courbe* I^{m-1} *du degré* $(m-1)$ *ayant* P *pour centre.*

2°. *Si la base* C^m *est formée de deux courbes* C^α *et* C^β, *où* $\alpha+\beta=m$:

Étant données dans un plan deux courbes quelconques C^α *et* C^β, *si l'on mène par un pôle quelconque* P *les* $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ *cordes* aa_1 *de la courbe* C^α, *ainsi que les* $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ *cordes* bb_1 *de la courbe* C^β, *et, en outre, les* $\alpha\beta$ *cordes* ab *entre les deux courbes (c'est-à-dire des droites ayant leurs extrémités* a *et* b *situées sur* C^α *et sur* C^β *respectivement, et ayant* P *pour point milieu du segment compris entre* a *et* b) ; *les extrémités de toutes ces cordes, au nombre de*

$$\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+2\alpha\beta=m(m-1),$$

seront toujours sur une courbe I^{m-1} *du degré* $(\alpha+\beta-1)$ *ou* $(m-1)$ *ayant* P *pour centre.*

Cet énoncé renferme le théorème particulier :

Que par chaque point P *situé dans le plan de deux courbes quelconques* C^α *et* C^β, *il passe, en général,* $\alpha\beta$ *cordes* ab *ayant leurs extrémités sur les deux courbes respectivement, et leur point milieu en* P.

On en déduit encore sans difficulté le théorème suivant :

Étant données dans un plan deux courbes quelconques C^α *et* C^β *ayant* $\alpha\beta$ *points d'intersection* c, *si l'on mène par un pôle quelconque* P *les* $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ *cordes* aa_1 *de la courbe* C^α, *ainsi que les* $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ *cordes* bb_1 *de la courbe* C^β, *les extrémités des deux systèmes de cordes conjointement avec les points d'intersection* c, *en tout*

$$\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+\alpha\beta=m(m-1)-\alpha\beta \text{ points},$$

seront toujours sur une courbe I^{m-1} *du degré* $(\alpha+\beta-1)$ *ayant le pôle* P *pour centre.*

III. *Position ou lieu du pôle* P *si la polaire intérieure doit se décomposer en différentes parties.*

Ce cas donne déjà lieu à des discussions assez compliquées quand même la base donnée n'est encore que d'un degré peu élevé, par exemple du troisième ou du quatrième degré, ainsi qu'il résultera des recherches suivantes.

§ III.

I. Si la base donnée est seulement du troisième degré C^3, de sorte que la polaire intérieure d'un pôle quelconque P est une section conique I^2, celle-ci ne pourra se décomposer, s'il y a lieu, qu'en deux droites, et l'on peut demander si cette décomposition peut réellement avoir lieu, et où sera situé, en ce cas, le pôle P, ou quel en sera le lieu géométrique. De fait, on trouve que cette décomposition peut se faire de deux manières différentes, et qu'en conséquence il existe aussi deux lieux distincts, à savoir :

Le lieu du pôle, dont la polaire intérieure I^2 *se décompose en deux droites, est formé de deux courbes distinctes :*

A. *La base donnée* C^3 *elle-même, et*

B. *Une courbe déterminée du second degré* E^2, *qui est la seconde polaire de la droite* G_∞ *par rapport à la base* C^3 (*voyez* l'extrait I), *ou qui est l'enveloppe de tous les diamètres de* C^3.

Car, si l'on coupe la courbe C^3 par une transversale quelconque $\mathfrak{D}$, et que l'on détermine ensuite le centre de gravité d des trois points d'intersection, tous les centres de gravité provenant d'un système de transversales parallèles $\mathfrak{D}$ se trouveront sur une même droite D qu'on appelle *diamètre* de la courbe C^3, et par rapport à laquelle nous appelons la direction des transversales la *direction conjuguée* à ce diamètre. Or, tous les diamètres D de la courbe C^3, parmi lesquels il faut compter, en particulier, ses asymptotes A_r, touchent la conique E^2. Si les trois asymptotes sont toutes réelles, E^2 sera l'ellipse inscrite dans le triangle des asymptotes qui touche les côtés de ce triangle dans leurs points milieux. Lorsqu'en particulier les trois asymptotes se coupent en un même point, E^2 se réduit à ce point, de sorte que tous les diamètres passent par ce point. Si, au contraire, il n'existe qu'une seule asymptote réelle, la conique E^2 sera, en général, une hyperbole qui touche cette asymptote en un point qu'il est facile de construire.

Voici maintenant une discussion plus détaillée des deux lieux géométriques (A) et (B).

II. 1. Si le pôle P se trouve sur la base C^3 elle-même (A), des trois cordes S qui passent par P, et que nous appellerons respectivement aa_1, bb_1, cc_1, l'une, soit cc_1, coïncidera avec la tangente en P, et ses deux extrémités c et c_1 coïncideront avec P, de sorte qu'on peut les considérer comme étant situées sur les deux autres cordes, soit c sur aa_1 et c_1 sur bb_1. Ainsi la conique I^2 se décompose dans les deux cordes aca_1 et bc_1b_1, que nous désignerons par S_1, ou, selon les circonstances, par S et S_1. *Donc il correspond à chaque pôle* P *situé sur la base, seulement deux cordes véritables* S_1; *la troisième coïncide avec la tangente, devient infiniment petite, se réduit à son point de contact* P. Si, en même temps, on considère aussi la polaire extérieure A^2 du même pôle P, il suit que (*voyez* § Ier, II) :

Pour chaque pôle P *situé sur la base* C^3, *les deux cordes correspondantes* S *et* S_1 *sont parallèles aux asymptotes de sa polaire extérieure* A^2. *Donc ces deux cordes sont réelles ou imaginaires, selon que la polaire* A^2 *est hyperbole ou ellipse, et réciproquement. Lorsqu'en particulier* A^2 *est une parabole, les deux cordes* S *et* S_1 *coïncident, et réciproquement. Il n'existe en tout que six de ces pôles particuliers pour lesquels les deux cordes* S *et* S_1 *se réunissent en une seule ab ou* S_0, *tandis qu'en même temps la polaire* A^2 *devient une parabole. Nous désignerons ces pôles par* P_0. *Les six pôles* P_0 *sont les intersections des deux courbes* C^3 *et* E^2 [*]. *Chacune des six cordes* S_0 *jouit de la propriété que les tangentes à la base* C^3 *qu'on fait passer par ses extrémités a, b sont parallèles. Lorsque le pôle* P *est, en particulier, un point d'inflexion de la base, une des deux cordes* S *et* S_1, *soit* S, *coïncide avec la tangente d'inflexion, et alors* A^2 *aussi est formé de deux droites, savoir de la tangente d'inflexion et de la droite* H *conjuguée harmonique du point d'inflexion* [**]. *En outre,* H *sera parallèle à* S_1. *Donc, en ce cas, chacune des deux polaires* I^2 *et* A^2 *est formée de deux droites dont deux coïncident avec la tangente d'inflexion, tandis que les deux autres* S_1 *et* H *sont parallèles.*

Les couples de cordes S et S_1 sont tous assujettis à la loi suivante :

Toutes les cordes S_1, *en lesquelles se décompose la polaire intérieure* I^2 *lorsque le pôle* P *se trouve sur la base* C^3 *même, ou, ce qui revient au même, toutes les cordes* aca_1 *dont les points milieux c se trouvent sur la base, touchent une courbe déterminée de la sixième classe,* S_1^6, *et du dix-huitième degré,* G^{18}.

Voici quelques détails sur les propriétés dont cette courbe jouit relativement à la base, et autres.

---

[*] Dans le Mémoire dont nous avons parlé dans l'extrait I, on démontre : *Que la courbe* E^2 *est le lieu de tous les pôles* P *pour lesquels la polaire extérieure* A^2 *devient une parabole, et, qu'en général, la polaire* A^2 *est hyperbole, ellipse ou parabole, selon que le pôle* P *est situé respectivement en dehors de* E^2, *dans l'intérieur de* E^2, *ou sur la circonférence même de* E^2. Les mêmes conséquences s'appliquent aussi à la polaire intérieure I^2, parce que I^2 et A^2 sont toujours semblables et semblablement placées. *Il n'existe, en général, qu'un seul pôle déterminé* P, *dont les polaires* A^2 *et* I^2 *soient des cercles. Si le pôle* P *est situé au centre de la courbe* E^2, *ses polaires* A^2 *et* I^2 *seront semblables, semblablement placées et concentriques à la courbe* E^2 (*voyez* aussi ci-dessous, extrait IV).

[**] M. Steiner désigne par cette expression la droite qui jouit de la propriété de rencontrer chaque transversale S menée par le point d'inflexion, en un point h qui forme avec les trois autres points d'intersection de la transversale et de la courbe un système de quatre points harmoniques, h étant le conjugué harmonique du point d'inflexion.

2. *La courbe S_1^6 touche la base C^3 dans ses neuf points d'inflexion, ainsi que dans ses trois points situés à l'infini a_∞, de sorte qu'elle a en commun avec la base les trois asymptotes A_s; mais la courbe S_1^6 touche chacune de ces trois asymptotes encore dans un autre point déterminé, de sorte qu'elle a ces asymptotes pour tangentes doubles. Comme la base est également de la sixième classe $C^3 = K^6$, les trente-six tangentes communes aux deux courbes ne consistent que dans les neuf tangentes d'inflexion et les trois asymptotes de la courbe C^3, parce que chacune de ces douze droites doit être comptée pour trois tangentes communes aux deux courbes.*

3. *La courbe S_1^6 touche les six cordes particulières S_0, dont il a été question ci-dessus, dans leurs points milieux P_0; donc elle y rencontre la base C^3. En conséquence, nous connaissons déjà trente des $3.18 = 54$ points communs aux deux courbes, savoir les neuf points d'inflexion et les trois points à l'infini, comptés chacun pour deux points, et puis les six points P_0. Les vingt-quatre autres points forment chacun une extrémité a_1 de certaines cordes particulières aca_1, que nous désignerons par $\mathfrak{S}_1$, et qui jouissent : 1° de la propriété que les tangentes à la base qu'on fait passer par l'autre extrémité a et par le point milieu c, sont parallèles; 2° de la propriété de toucher la courbe S_1^6 dans les six points a_1 mêmes. Des courbes du huitième degré peuvent passer par les vingt-quatre points a_1.*

4. *Les douze tangentes communes aux courbes S_1^6 et E^2 consistent : 1° dans les trois asymptotes de la base, comptées chacune pour deux; et 2° en six cordes S_1 qui sont en même temps diamètres de la base; les six points milieux c de ces six cordes se trouvent sur une section conique C^2.*

5. *La droite G_∞ est une tangente triple de la courbe S_1^6 et la touche en trois points g_∞, chacun desquels forme relativement aux trois points a_∞ (2) le quatrième point d'un système harmonique; c'est-à-dire si par un point quelconque on mène trois droites A, B, C parallèles aux trois asymptotes A_s de la courbe C^3, et qu'on détermine ensuite par rapport à ces droites les trois quatrièmes droites harmoniques A_1, B_1, C_1, de sorte que ABA_1C, $ABCB_1$, AC_1BC soient des faisceaux harmoniques, ou bien, si dans le triangle des asymptotes on mène des trois sommets, par les points milieux des côtés opposés, trois droites A_1, B_1, C_1, alors ces droites seront dirigées vers les points de contact g_∞ situés à l'infini.* Les trois droites construites de cette manière sont aussi respectivement parallèles aux axes des trois paraboles asymptotiques qui ont avec la courbe S_1^6 un contact du quatrième ordre aux trois points g_∞. Comme la courbe S_1^6 est du dix-huitième degré, elle doit avoir en commun avec la droite G_∞, outre les neuf points déjà mentionnés (les $3g_\infty$ comptés deux fois et les $3a_\infty$), encore neuf autres points d_∞. *Ces points d_∞ sont déterminés par la relation que les tangentes ou asymptotes $\mathfrak{D}_0$ de la courbe qui leur correspondent, passent par les points d_0 de la base C^3, en chacun desquels cette dernière est touchée par un diamètre D_0, et que les asymptotes en question ont la direction conjuguée à ces diamètres* (I). Il existe neuf diamètres D_0 de ce genre, attendu que ce sont des tangentes communes aux courbes C^3 et E^2, lesquelles sont au nombre de

douze, mais dont trois sont les asymptotes A_1 de C^3. Les neuf asymptotes $\mathfrak{D}_0$ sont en même temps des cordes ad_0a_1 $(= S_1)$ jouissant de la propriété particulière que les trois tangentes A, A_1 et D_0, qu'on mène à la base C^3 par les extrémités a, a_1 et le point milieu d_0, se rencontrent en un même point Q. Donc *il existe, en général, dans une courbe du troisième degré* C^3, *neuf transversales* $\mathfrak{D}_0$, *telles que l'un des trois points d'intersection* d_0 *est le point milieu du segment compris entre les deux autres* a *et* a_1; *que les trois tangentes correspondantes se rencontrent en un même point* Q, *et que la tangente* D_0 *passant par* d_0 *est en même temps un diamètre de la courbe.* On passe ici sous silence les relations que la courbe S_1^4 a avec certaines autres courbes intimement liées à la base C^3, relativement aux neuf droites $\mathfrak{D}_0$ et aux neuf points Q. On les examinera dans une autre occasion.

6. *Par un point quelconque* Q *il passe, en général, six cordes* S_1, *ou* aca_1, *et leurs six points milieux* c *se trouvent toujours sur une conique. Si* Q *se trouve sur la base* C^3 *même, celle-ci aura en ce point un contact avec la conique.* Si l'on fait passer Q à l'infini, trois des six cordes S_1 coïncideront avec G_∞, les trois autres seront parallèles, et leurs points milieux c se trouveront sur le diamètre D conjugué à leur direction, dont ils seront en même temps les points d'intersection avec la base C^3. Conséquemment, *les tangentes à la courbe* S_1^4, *ou les cordes* S_1, *ne sont parallèles que trois à trois, ayant pour points milieux les trois extrémités du diamètre* D *de la base* C^3 *conjugué à leur direction, et réciproquement.*

7. Le point de contact s de toute corde $aca_1 = S_1$ avec la courbe S_1^4, qui est son enveloppe, se détermine par la simple construction suivante : Qu'on fasse passer par ses extrémités a, a_1 et son point milieu c, des tangentes à la base C^3, que nous désignerons par A, A_1, C; que les points d'intersection de A avec A_1, de A avec C et de C avec A_1 soient désignés par p, q, q_1 respectivement; qu'on prenne sur A et A_1 des points $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$, tels que q et q_1 soient les points milieux des segments $p\mathfrak{p}$ et $p\mathfrak{p}_1$; qu'on mène ensuite les droites $a\mathfrak{p}_1$ et $a_1\mathfrak{p}$ et qu'on désigne leur point d'intersection par r : la droite pr passera par le point de contact cherché s de la corde aa_1. Observons encore que la droite C_1, qu'on fait passer par les points $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$ (laquelle est parallèle à C et située avec C du même côté de p, mais à une double distance de p), coupe la corde aa_1 dans un point s_1 qui est le conjugué harmonique de s par rapport à a et a_1, c'est-à-dire asa_1s_1 forment un système de quatre points harmoniques. Lorsque, en particulier, C passe par p, C_1 coïncide avec C, s_1 avec c, et s passe à l'infini.

8. De (2) on déduit, entre autres, le théorème suivant :

Qu'on imagine dans un même plan deux courbes semblables du troisième degré, C^3 *et* C_1^3, *dont les dimensions homologues soient dans le rapport de* $2:1$, *et qu'on fixe la position de l'une, disons de* C^3; *l'autre courbe pourra prendre vingt-quatre positions différentes, telles que les deux courbes (prises directement, non symétriquement) soient semblablement placées et se touchent en un couple de points homologues* m *et* m_1, *et, en outre, en deux points non homologues* n *et* q_1. *Des courbes du huitième degré peuvent* *passer par les vingt-quatre points m de la courbe* C^3, *et de même par les vingt-quatre points* m_1 *de la courbe* C_1^3.

III. Si le pôle P se trouve sur la courbe $E^2(I, B)$, les trois cordes S qui lui correspondent, savoir aa_1, bb_1, cc_1, auront leurs extrémités a, b, c sur une droite I, et, conséquemment, leurs autres extrémités a_1, b_1, c_1 sur une autre droite I_1. Ainsi la polaire intérieure I^2 se décompose en deux droites I et I_1 qui sont parallèles, également distantes du pôle P, et, en outre, projectivement égales, parce que

$$ab = a_1 b_1, \quad ac = a_1 c_1, \quad bc = b_1 c_1.$$

Dans ce cas, la polaire extérieure est toujours une parabole dont l'axe est parallèle aux droites I et I_1 (II, 1). Parmi les pôles situés sur E^2, les suivants se distinguent par des propriétés particulières :

1°. Les six points d'intersection P_0 des deux courbes C^3 et E^2. Pour chacun de ces points, la corde cc_1 est infiniment petite, et, en conséquence, les droites I et I_1 coïncident en même temps que les cordes aa_1 et bb_1 (désignées ci-dessus par S et S_1) avec la corde désignée ci-dessus par S_0.

2°. Il existe trois pôles particuliers, que nous désignerons par X, Y, Z, tels que pour ces pôles, non-seulement la polaire intérieure, mais en même temps aussi la polaire extérieure A^2 (la parabole) se décompose en un couple de droites A et A_1, parallèles entre elles et parallèles, en outre, aux droites correspondantes I et I_1. Outre ces trois points X, Y, Z, il n'existe dans le plan aucun autre pôle dont la polaire extérieure A^2 se décompose en deux droites *parallèles*.

Relativement à toutes les droites I, I_1, on a le théorème suivant :

Tous les couples de droites I *et* I_1, *en lesquels se décompose la polaire intérieure* I^2, *lorsque le pôle* P *se trouve sur la courbe* E^2, *touchent une courbe* I^6 *de la sixième classe et du quatorzième degré, ayant les six cordes* S_0 *pour asymptotes et la droite* G_∞ *pour tangente quadruple. Cependant la courbe* I^6 *touche la droite* G_∞, *non pas en quatre, mais seulement en deux points distincts, mais en chacun de ces deux points doublement, de sorte qu'en chacun de ces points elle se touche elle-même. Ces deux points sont en même temps les points que la courbe* E^2 *a en commun avec la droite* G_∞, *ou les points situés à l'infini sur les asymptotes de* E^2. *Si l'on mène par le pôle* P *une troisième droite* I_0 *parallèle aux droites* I *et* I_1, *elle aura pour enveloppe une courbe* I_0^3 *de la troisième classe et du quatrième degré, qui aura la droite* G_∞ *pour tangente double et la touchera dans les deux points qu'on vient de distinguer. Conséquemment aussi, tout le système des différents couples de droites* I *et* I_1 *jouit de la propriété, que chaque point* $\mathfrak{P}$ *du plan sera, en général, le centre d'une section conique qui touche trois de ces couples, savoir les trois couples correspondant aux trois droites* I_0 *qui passent par le point* $\mathfrak{P}$.

Les trente-six tangentes communes à la courbe I^6 *et à la base* C^3 *consistent en dix-huit couples de droites* I *et* I_1.

Si les droites I et I_1 sont tangentes à la base C^3, deux des trois points a, b, c situés sur I, disons b et c, se réunissent en un point de contact (bc) ou α; de même, les points b_1 et c_1 situés sur I_1 se réunissent en un point de contact $(b_1 c_1)$ ou α_1; en conséquence, les cordes bb_1 et cc_1 forment en coïncidant la corde de contact $\alpha\alpha_1$, que nous désignerons par $\mathfrak{S}_1$, et dont nous désignerons le point milieu ou le pôle correspondant P par P_1. Appelons les segments égaux $a\alpha = a_1\alpha_1$, pris sur I et I_1 respectivement, *tangentes parallèles égales;* mais, comme leurs directions de α vers a et de α_1 vers a_1 sont opposées l'une à l'autre, appelons-les *dissemblablement dirigées.* Ceci posé, le théorème précédent donne lieu au théorème que voici :

Une courbe quelconque du troisième degré C^3 *a, en général, dix-huit couples de tangentes égales et parallèles, mais dissemblablement dirigées,* αa *et* $\alpha_1 a_1$, *et les points milieux* P_1 *des dix-huit cordes de contact* $\mathfrak{S}_1$ $(= \alpha\alpha_1)$ *se trouvent sur la conique* E^2, *déterminée ci-dessus.*

Des trente-six tangentes communes à la courbe I^6 *et à la courbe* S_1^6 (II), *douze coïncident avec la droite* G_∞, *six autres sont les six cordes particulières* S_4 (II, 1), *et les dix-huit qui restent sont formées de neuf couples de droites* I *et* I_1.

Attendu que ces dernières (comme tangentes à la courbe S_1^6) forment en même temps neuf couples de cordes parallèles et projectivement égales S_1 (ou, pour les distinguer les unes des autres, S_1 et S_1'), de sorte que

$$I = S_1 = abc, \quad I_1 = S_1' = a_1 b_1 c_1 \quad \text{et} \quad ab = bc = a_1 b_1 = b_1 c_1,$$

si b et b_1 sont les points moyens, donc les points milieux des cordes S_1 et S_1', on aura, en désignant par P^1 le pôle correspondant ou le point milieu de la droite bb_1, le théorème suivant :

Dans une courbe quelconque C^3, *il existe en tout neuf couples de cordes parallèles et égales* S_1 *et* S_1', *et les neuf points milieux* P^1 *des droites* bb_1 *qui joignent les points milieux de ces cordes, se trouvent sur la conique* E^2.

Observons, relativement aux quarante-deux points communs aux courbes I^6 et C^3, que, si a est un de ces points et I la tangente correspondante de la courbe I^6, et si l'on imagine, en outre, le couple correspondant de droites I et I_1 avec son pôle P situé sur E^2, *qu'alors les tangentes menées par les points* P *et* a_1 *respectivement aux courbes* E^2 *et* C^3 *sont toujours parallèles.* On déduit de là le théorème suivant :

Si l'on fait décrire à la courbe donnée C^3 *dans son plan une demi-révolution* (*de* 180 *degrés*) *autour du centre* E *de la conique* E^2, *si l'on désigne la courbe dans cette nouvelle position par* C_1^3; *si, en outre, on imagine une conique* E_1^2 *semblable et semblablement placée à la conique* E^2, *mais de dimensions doubles, et dont le centre* E_1 *se trouve sur la courbe* C_1^3, *et si l'on fait mouvoir cette conique* E_1^2 *de telle sorte qu'elle reste toujours semblablement placée à* E^2 *ou que ses axes restent toujours parallèles à eux-mêmes pendant que son centre* E_1 *parcourt toute la courbe* C_1^3, *alors la courbe donnée* C^3 *sera, en général, touchée quarante-deux fois par la conique* E_1^2 *mue de cette manière.*

IV. Dans ce qui précède, il a été plusieurs fois question de certaines cordes S_0, $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_1$, pour lesquelles les tangentes menées par leurs extrémités à la base C^3 étaient parallèles. On a considéré six cordes S_0 (II, 1), vingt-quatre cordes $\mathfrak{S}_0$ (II, 3) et dix-huit cordes $\mathfrak{S}_1$ (III). Examinons cette propriété isolément, et désignons par $\mathfrak{S}$ toute corde qui joint les deux points de contact $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_1$ de deux tangentes parallèles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$ de la base C^3. On obtiendra les résultats suivants :

Toutes les cordes $\mathfrak{S}$ *qui joignent les points de contact de deux tangentes parallèles de la base donnée* C^3, *touchent une courbe* $\mathfrak{S}^9$ *qui est de la neuvième classe et (tout au plus) du trente-sixième degré.* Puis : *La courbe* $\mathfrak{S}^9$ *a six tangentes triples* $\mathfrak{S}_3$ *qui se rencontrent deux à deux dans les trois points ci-dessus mentionnés* X, Y, Z (III) *situés sur la courbe* E^2, *et qui passent, en outre, trois à trois par quatre points* q, r, s *et* t, *de manière à former les six côtés d'un quadrilatère complet* $rqst$. *La même courbe touche aussi les trois asymptotes de* C^3. *Son point de contact avec chaque asymptote sera le centre d'une hyperbole qui a avec* C^3 *un contact du quatrième ordre au point de contact* a_∞ (II, 2) *de* C^3 *avec cette asymptote.* En désignant par $\mathfrak{A}_0$ toute tangente de C^3 qui est parallèle à une de ses trois asymptotes, et par $\mathfrak{a}_0$ son point de contact, il existera, en général, 12 $\mathfrak{A}_0$ et 12 $\mathfrak{a}_0$. *Ces douze tangentes* $\mathfrak{A}_0$ *sont en même temps des cordes particulières* $\mathfrak{S}$ *et touchent la courbe* $\mathfrak{S}^9$ *dans les mêmes points* $\mathfrak{a}_0$. Si, en outre, on désigne par $\mathfrak{V}$ toute tangente à la courbe C^3 qui est parallèle à une de ses neuf tangentes d'inflexion, par $\mathfrak{v}$ son point de contact, et par $\mathfrak{w}$ le point d'inflexion correspondant à cette tangente d'inflexion, il existera en tout trente-six points $\mathfrak{v}$, et conséquemment aussi *trente-six cordes* $\mathfrak{wv} = \mathfrak{S}$, *qui jouissent de la propriété particulière de toucher la courbe* $\mathfrak{S}^9$ *précisément aux points* $\mathfrak{v}$. En outre, les neuf tangentes d'inflexion mêmes touchent aussi la courbe $\mathfrak{S}^9$, en qualité de tangentes particulières $\mathfrak{S}$, aux points $\mathfrak{w}$ qui leur correspondent. De ceci et de plusieurs théorèmes précédents, on déduit les relations suivantes entre la courbe $\mathfrak{S}^9$ et les courbes C^3 et S_1^6 :

La courbe $\mathfrak{S}^9$ *touche la base* C^3 *dans ses neuf points d'inflexion et dans les douze points* $\mathfrak{a}_0$. *Les cinquante-quatre tangentes communes aux deux courbes consistent :* 1° *dans les neuf tangentes d'inflexion de* C^3, *comptées chacune pour trois ;* 2° *dans les douze tangentes* $\mathfrak{A}_0$, *comptées chacune pour deux ; et* 3° *dans les trois asymptotes* A_∞ *de* C^3, *ce qui fait en tout cinquante-quatre tangentes.*

Les cinquante-quatre tangentes communes aux deux courbes $\mathfrak{S}^9$ *et* S_1^6 *consistent :* 1° *dans les neuf tangentes d'inflexion et dans les trois asymptotes de la base* C^3, *comptées chacune pour deux ;* 2° *dans les vingt-quatre cordes* $\mathfrak{S}_0$ *mentionnées ci-dessus* (II, 3) ; *et* 3° *dans les six cordes* S_0 (II, 1), *ce qui fait en tout cinquante-quatre tangentes.*

Des points communs aux deux courbes $\mathfrak{S}^9$ et C^3 nous en connaissons déjà soixante-dix-huit, savoir les neuf points d'inflexion et les douze points $\mathfrak{a}_0$ comptés deux fois, et les trente-six points $\mathfrak{v}$. Si maintenant le degré de la courbe $\mathfrak{S}^9$ n'est pas inférieur au trente-sixième (ce que, cependant, je n'ai pas encore suffisamment démontré), il manque encore trente points; chacun de ces trente points sera le troisième point d'intersection d'une des cordes $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ ($= \mathfrak{S}$) avec la base C^3, et en même temps le point de contact de cette corde avec la courbe $\mathfrak{S}^9$. D'après la position des soixante-dix-huit points précédents, on conclut *que des courbes du dixième degré peuvent passer par ces trente derniers points.*

Le point de contact $\mathfrak{s}$ *d'une quelconque des cordes* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$ *avec la courbe* $\mathfrak{S}^9$, *qui en est l'enveloppe, est déterminé par la simple relation suivante : que si l'on prend les centres de courbure* m *et* m_1 *de la base* C^3 *relativement aux deux extrémités* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{a}_1$ *de la corde,* $\mathfrak{s}$ *se trouvera sur la droite qui joint* m *et* m_1, *de sorte que la droite* mm_1 *coupe toujours la corde* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ *au point de contact cherché* $\mathfrak{s}$. De cette relation, on conclut entre autres :

Qu'il existe, en général, trente-six couples de rayons de courbure parallèles, égaux, et semblablement dirigés dans une courbe quelconque C^3 *du troisième degré.*

En désignant par $\mathfrak{M}$ le point milieu de chaque corde $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$, il suit encore que:

Le lieu des points milieux $\mathfrak{M}$ *de toutes les cordes* $\mathfrak{S}$ *qui joignent les points de contact de tangentes parallèles de la base donnée* C^3, *est une courbe* $\mathfrak{M}^{12}$ *du douzième degré et de la quatre-vingt-seizième classe, qui touche la base* C^3 *dans ses neuf points d'inflexion, la rencontre dans les six points* P_0, *et a pour points quadruples ses trois points situés à l'infini* a_∞, *ce qui fait en tout le nombre complet des trente-six points communs aux deux courbes.*

Les trois fois quatre asymptotes de la courbe $\mathfrak{M}^{12}$ qui sont respectivement parallèles aux trois asymptotes de C^3 sont respectivement situées au milieu entre chaque asymptote et les quatre tangentes $\mathfrak{A}_0$ qui lui sont parallèles.

La courbe $\mathfrak{M}^{12}$ *rencontre la courbe* E^2 *dans les mêmes six points* P_0 *et, en outre, dans les dix-huit points* P_1 (III).

Si l'on prend pour pôle P le point milieu $\mathfrak{M}$ d'une quelconque des cordes $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$, sa polaire intérieure I^2 touchera la base C^3 dans les extrémités $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_1$ de la corde. Pour tout autre pôle, I^2 et C^3 ne peuvent se toucher. Donc ces deux courbes ne peuvent pas avoir un seul contact en un seul point; mais dès qu'elles ont un contact simple en un point quelconque $\mathfrak{a}$, elles ont nécessairement encore un second contact dans un autre point $\mathfrak{a}_1$, et alors les tangentes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$ passant par ces points de contact sont parallèles, et la corde de contact $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ passe par le pôle P en l'ayant pour point milieu. Donc :

Le lieu du pôle dont la polaire intérieure I^2 *doit toucher la base* C^3 *est la courbe du douzième degré* $\mathfrak{M}^{12}$ *que nous avons déterminée ci-dessus; les courbes* I^2 *et* C^3 *se touchent toujours en deux points simultanément, et les deux tangentes aux deux points de contact sont parallèles.* De là il suit :

Qu'il ne peut pas exister dans la base donnée C^3 *deux cordes* $\mathfrak{S}$ *qui se coupent dans* *leurs points milieux; et, conséquemment, la courbe* $\mathfrak{M}^{12}$ *ne peut avoir aucun autre point multiple hormis les trois points quadruples* a_∞ *mentionnés ci-dessus.*

§ IV.

Si la base donnée est une courbe générale du quatrième degré C^4, et si, conséquemment, la polaire intérieure d'un pôle quelconque est une courbe du troisième degré I^3, cette dernière ne pourra se décomposer, s'il y a lieu, qu'en une courbe du second degré et une droite, ou en trois droites. Cette décomposition ne pourra avoir lieu que par suite d'une coïncidence de deux d'entre les six cordes aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1 et ff_1 qui passent par le pôle P (lesquelles deux cordes forment alors une corde double S_2). Car, comme en ce cas il ne peut pas passer par les deux couples d'extrémités a et a_1, b et b_1 qui se trouvent sur S_2, une courbe I^3 *proprement dite*, il faut que la courbe se décompose, et que S_2 même en forme une partie. L'autre partie passera alors par les huit extrémités des quatre autres cordes S, et sera, en général, une conique I^2 qui a le pôle P pour centre, et qui pourra, dans des cas particuliers, se décomposer à son tour en deux droites. Cette décomposition peut avoir lieu de deux manières, à savoir : 1° dès qu'il coïncide encore un couple de cordes parmi les quatre cordes qui restent, les deux cordes du troisième couple coïncideront nécessairement aussi, de sorte que I^3 sera formée de trois cordes doubles S_2; 2° il peut arriver que des extrémités des quatre cordes cc_1, dd_1, ee_1, ff_1, quatre extrémités, dont une de chaque corde, soient c, d, e, f, se trouvent sur une droite I; alors les quatre autres extrémités c_1, d_1, e_1, f_1 se trouveront nécessairement sur une autre droite I_1; et, en ce cas, I^3 sera formée de trois droites, S_2, I et I_1, dont les deux dernières sont parallèles et également distantes du pôle P. Conséquemment, la polaire intérieure I^3 peut être formée :

A. De $I^2 + S_2$, c'est-à-dire d'une conique I^2 et d'une droite ou corde double S_2 qui passe par le centre P de la conique;

B. (*a*). De $3S_2$, c'est-à-dire de trois cordes doubles S_2, passant par le pôle P;

(*b*). De $S_2 + I + I_1$, c'est-à-dire d'une corde double S_2 passant par le pôle P et de deux droites I et I_1 parallèles et également distantes du pôle P.

Le cas (A) se présente le plus fréquemment, tandis que les deux cas (B) n'ont lieu que pour certains pôles particuliers. Quant au cas (B, *a*), *il n'existe en tout que neuf pôles, que nous désignerons par* P_3, *pour lesquels la polaire intérieure* I^3 *se décompose en trois cordes doubles* S_2. *Ces pôles sont en même temps les neuf pôles correspondants à la droite* G_∞ *par rapport à la base donnée, c'est-à-dire qu'ils sont les points d'intersection commune de toutes les polaires extérieures premières* A^3 *par rapport à* C^4 *dont les pôles se trouvent sur la droite* G_∞. Les pôles particuliers qui donnent lieu au cas (B, *b*) sont moins faciles à déterminer, ainsi qu'on le verra dans la suite.

Relativement au lieu du pôle dont la polaire intérieure se décompose comme nous venons de le dire, et relativement à l'enveloppe de toutes les cordes doubles qui se présentent en même temps, ainsi qu'à certaines autres circonstances intimement liées à cette discussion, on obtient les théorèmes et les propriétés suivantes :

Le lieu du pôle P, *dont la polaire intérieure se décompose en parties de la manière qu'on vient de dire, est une courbe* P^{10} *du dixième degré et de la trente-sixième classe, ayant les susdits neuf pôles particuliers* P_3 *pour points triples, touchant la base* C^4 *dans ses quatre points* a_∞ *situés à l'infini, et ayant, en conséquence, elle-même pour asymptotes les quatre asymptotes de la base.* Les autres trente-deux points communs aux deux courbes P^{10} et C^4 sont des pôles particuliers P^0 jouissant de la propriété que la corde double correspondante S_2 se change dans une tangente S_2^0 de la base C^4, tandis que l'un des deux couples d'extrémités, soit b et b_1, se réunit dans le point de contact P^0. Donc :

Une courbe quelconque du quatrième degré C^4 *a en tout trente-deux tangentes* S_2^0 *qui jouissent de la propriété d'être coupées par la courbe en deux points* a *et* a_1 *également distants du point de contact* P^0 [*]. *Des courbes du huitième degré peuvent passer par les trente-deux points de contact* P^0.

Nous ne connaissons encore que quatre des dix points communs à la courbe P^{10} et à la droite G_∞, savoir les quatre points situés à l'infini a_∞ ; mais de ces points, et des quatre asymptotes A_i qui leur correspondent, dépendent les six autres points et les

---

[*] Ce théorème concorde avec le théorème donné par M. le professeur Hesse, page 161 du tome XXXVI du Journal de M. Crelle; car, au moyen de la projection, on passe de l'un de ces deux théorèmes à l'autre, ou bien ces deux théorèmes sont contenus l'un et l'autre dans le théorème suivant :

Si sur chaque tangente d'une courbe donnée du quatrième degré C^4, *on prend le quatrième point* Q *conjugué harmonique du point de contact par rapport aux deux points d'intersection de la tangente avec la courbe, le lieu de* Q *sera une courbe* Q^{32} *du trente-deuxième degré, qui a avec la courbe donnée des contacts du deuxième ordre dans ses vingt-quatre points d'inflexion (qui a en commun avec elle les tangentes d'inflexion), et qui la coupe dans les cinquante-six points de contact de ses vingt-huit tangentes doubles, ce qui fait en tout le nombre complet des* $24.3 + 56 = 128$ *points communs aux deux courbes. Les trente-deux tangentes particulières* S_2^0 *dont il a été question ci-dessus, sont parallèles aux trente-deux asymptotes de la courbe* Q^{32}.

Qu'il me soit permis de faire à cette occasion la remarque suivante:

La courbe nodale, désignée dans l'extrait des *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* par $Q_0^{3(n-2)}$, est pour la base C^4 une courbe déterminée du sixième degré Q_0^6, qui passe par les vingt-quatre points d'inflexion de la base C^4. Or, comme il passe par les cent vingt-huit points communs aux courbes Q^{32} et C^4 une infinité d'autres courbes du trente-deuxième degré, et comme, si par $4x$ de ces cent vingt-huit points il passe une courbe Q^x d'un degré inférieur au trente-deuxième, il passera de même par les $128 - 4x = 4(32 - x)$ autres points une infinité de courbes du $(32 - x)^{ième}$ degré, Q^{32-x}, il suit : *Que par les cinquante-six points de contact des vingt huit tangentes doubles de la base* C^4, *il peut passer une infinité de courbes du quatorzième degré* Q^{14}. Car, si l'on imagine la courbe nodale Q, comme triple (ou à la manière du calcul, si l'on élève son équation à la troisième puissance), on pourra la regarder comme une courbe du dix-huitième degré, Q_0^{18}, qui passera comme telle par les 24.3 ou 4.18 points, que Q^{32} et C^4 ont en commun dans les vingt-quatre points d'inflexion ; et conséquemment, il peut passer une infinité de courbes Q^{14} par les cinquante-six points de contact des vingt-huit tangentes doubles. Je montrerai, dans une occasion plus convenable, de combien de manières une telle courbe Q^{14} peut à son tour se décomposer en parties.

directions des asymptotes correspondantes. Désignons pour un instant les quatre points a_∞ par α, β, γ, δ, et les six points inconnus par x et x_1, y et y_1, z et z_1; alors chacun de ces derniers couples sera formé de deux points conjugués harmoniques à la fois par rapport aux deux couples de points qu'on peut former des quatre premiers points, de sorte que, par exemple,

$$x\alpha x_1\beta \text{ et } x\gamma x_1\delta,\quad y\alpha y_1\gamma \text{ et } y\beta y_1\delta,\quad z\alpha z_1\delta \text{ et } z\beta z_1\gamma$$

seront des systèmes harmoniques de quatre points; ou bien, si par un point quelconque on mène quatre droites A, B, C, D parallèles aux quatre asymptotes A_s, si on les arrange des trois manières possibles en deux couples, savoir

$$AB \text{ et } CD,\quad AC \text{ et } BD,\quad AD \text{ et } BC,$$

et si l'on construit trois autres couples de droites

$$X \text{ et } X_1,\quad Y \text{ et } Y_1,\quad Z \text{ et } Z_1,$$

tels que

$$XAX_1B \text{ et } XCX_1D,\quad YAY_1C \text{ et } YBY_1D,\quad ZAZ_1D \text{ et } ZBZ_1C,$$

soient des faisceaux harmoniques; alors ces droites X, X_1, Y, Y_1, Z, Z_1, sont parallèles aux six asymptotes inconnues de la courbe P^{10}, et conséquemment dirigées vers les six points x, x_1, y, y_1, z, z_1 que la courbe a en commun avec G_∞. *De ces trois couples de points, deux sont toujours réels, tandis que le troisième est imaginaire; et d'une manière analogue, des six asymptotes quatre sont réelles et deux imaginaires*, pourvu toutefois que les premières quatre asymptotes A_s soient réelles.

En outre, la courbe P^{10} *passe aussi par les points milieux des vingt-huit tangentes doubles de la base* C^4.

Quant aux cordes doubles S_2, la courbe P^{10} sera le lieu géométrique de leurs points milieux, mais ces cordes elles-mêmes envelopperont une autre courbe, savoir :

Le lieu de toutes les cordes doubles S_2 *qui forment des parties de polaires intérieures* I^3 *décomposées, ou qui peuvent en général exister dans la base donnée, est une courbe* S_9^{34} *de la neuvième classe et du trente-quatrième degré qui a avec la base un contact du troisième ordre dans ses quatre points* a_∞ *situés à l'infini, et qui a conséquemment pour asymptotes les quatre asymptotes de la base; elle touche en même temps chacune de ces asymptotes encore dans un second point déterminé, de sorte qu'elle a ces asymptotes pour tangentes doubles; en outre, elle touche aussi les vingt-huit tangentes doubles de la base et a la droite* G_∞ *pour tangente sextuple, attendu qu'elle la touche dans les six points* x *et* x_1, y *et* y_1, z *et* z_1, *déterminés ci-dessus*. Car, si l'on imagine le pôle P situé dans un de ces six points, soit en x, la corde double correspondante S_2 coïncidera avec G_∞ et touchera la courbe au point conjugué x_1, et réciproquement. Il en est de même pour les deux autres couples de points. Ces contacts sont réels ou imaginaires en même temps que les points auxquels ils correspondent.

Comme la base C^4 est, en général, de la douzième classe, elle aura en commun avec la courbe S_2^9, en tout $12.9 = 108$ tangentes, lesquelles consistent : 1° dans les trente-deux susdites tangentes S_2^9; 2° dans les vingt-huit tangentes doubles de la base, comptées deux fois; 3° dans les quatre asymptotes comptées chacune pour cinq, ce qui fait en tout $32 + 28.2 + 4.5 = 108$.

Des points que la courbe S_2^9 a en commun avec la droite G_∞, nous en connaissons déjà seize, savoir : les six points de contact x, x_1, y, y_1, z, z_1 comptées deux fois, et les quatre points a_∞. La courbe étant du trente-quatrième degré, il manque encore dix-huit points, qu'on détermine par la considération suivante, qui fait connaître en même temps quelques autres propriétés :

Par chaque point donné il passe, en général, neuf cordes doubles S_2. Si ce point, que nous appellerons a, se trouve sur la base C^4 même, il formera l'une des deux extrémités de chacune des neuf cordes doubles S_2, *et alors les neuf autres extrémités conjuguées a_1 se trouvent sur une courbe du troisième degré a_1^3, qui a avec la base un contact du second ordre au point a, et de même les points milieux* P *des neuf cordes doubles se trouvent sur une autre courbe du troisième degré* P^3, *qui a avec la base au point a un contact de premier ordre.* Si, en particulier, le point a est un point d'inflexion de la base, *il sera aussi un point d'inflexion de chacune des deux courbes a_1^3 et* P^3. Et si a est un des susdits trente-deux points d'intersection P^0 des courbes P^{10} et C^4, *la base aura en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe a_1^3, et un contact du second ordre avec la courbe* P^3, *de sorte que ces deux dernières courbes ont en ce point un contact du second ordre.*

Quoique par chaque point il passe neuf cordes doubles, celles-ci ne sont cependant parallèles que trois à trois, de sorte qu'il n'y a que trois cordes doubles S_2 dirigées à la fois vers une direction quelconque donnée; ou, en d'autres termes, par chaque point Q de la droite G_∞ il ne passe que trois cordes doubles S_2 (non situées elles-mêmes à l'infini), tandis que les six autres coïncident avec la droite G_∞ même. Les points milieux P de trois cordes doubles parallèles se trouvent nécessairement sur un diamètre D de la base C^4 (§ III, I) ou, ce qui revient au même, sur la troisième polaire extérieure D, du point Q par rapport à la base, et les trois cordes S_2 ont la *direction conjuguée* au diamètre D. Qu'on imagine, en outre, la première polaire extérieure A^3 du même point Q par rapport à la base; elle passera, comme on l'a déjà observé, par les neuf pôles P_3, qui sont des points triples de la courbe P^{10}; et conséquemment elle ne peut plus rencontrer cette dernière qu'en trois points P, lesquels (en vertu de la position des neuf points P_3), se trouvent nécessairement sur une même droite. Or, cette droite est précisément le susdit diamètre D, et les trois points d'intersection P sont précisément les points milieux des trois cordes doubles dirigées vers Q. Donc :

Si l'on imagine la première et la troisième polaire extérieure A^3 *et* D, *d'un point quelconque* Q *situé sur la droite* G_∞ *par rapport à la base* C^4, *elles se couperont dans les trois pôles* P, *dont les trois cordes doubles correspondantes* S_2 *sont dirigées vers le même point* Q, *ou ont la direction conjuguée au diamètre* D. *Et si le point* Q *se meut sur la droite* G_∞, *le lieu des trois points d'intersection* P *de sa première et de sa troisième po-*

laire extérieure sera la même courbe du dixième degré P^{10}, *qui contient tous les pôles dont les polaires intérieures* $\mathfrak{I}^3$ *se décomposent en parties.* Toutes les polaires A^3 qui se présentent pendant ce mouvement forment un faisceau de courbes $B(A^3)$, ayant pour points fondamentaux les neuf points P_3.

Il peut arriver qu'une des polaires A^3 touche la courbe P^{10}, ce qui fait que deux des trois points d'intersection P se réunissent en un point de contact $\mathfrak{P}_0$ de P^{10}, A^3 et D, et que les deux cordes doubles correspondantes S_2 se réunissent en une seule $\mathfrak{S}_2^0$. Alors cette corde $\mathfrak{S}_2^0$ touche la courbe S_2^9 au point correspondant Q (que, pour ce cas, nous désignerons par Q_0) et sera en conséquence une asymptote de cette courbe, de même que Q_0 sera un de ces points qu'elle a en commun avec la droite G_∞, et qu'on demandait ci-dessus. Or, comme une courbe P^p peut être touchée par les courbes d'un faisceau $B(Q^q)$ en $p(p+2q-3)$ points (*voir* Extrait I), la courbe P^{10} devrait être touchée par le faisceau de polaires $B(A^3)$ en $10(10+2.3-3) = 130$ points. De ces cent trente points, cent huit sont absorbés par les neuf points communs P_3; il n'en reste donc plus que vingt-deux points, parmi lesquels se trouvent encore les quatre points a_∞ que l'on connaît déjà, de sorte qu'il ne reste que dix-huit points de contact $\mathfrak{P}_0$ possibles. A ces dix-huit points $\mathfrak{P}_0$ correspondront donc sur la droite G_∞ les dix-huit points Q_0 qu'on avait demandés ainsi que les dix-huit asymptotes $\mathfrak{S}_2^0$ de la courbe S_2^9; c'est-à-dire *les dix-huit points* Q_0 *que la courbe* S_2^9 *a en commun avec la droite* G_∞ *et dont on n'avait pas encore rendu compte, jouissent de la propriété, ou sont déterminés par la relation que la première et la troisième polaire de chacun d'eux, par rapport à la base, se touchent dans un point* $\mathfrak{P}_0$, *et que l'asymptote* $\mathfrak{S}_2^0$ *correspondant à* Q_0 *passe en même temps par* $\mathfrak{P}_0$. Les quatre points a_∞ jouissent de la même propriété, mais en présentant cette particularité, que chacun d'eux est en même temps Q_0 et $\mathfrak{P}_0$, c'est-à-dire que la première et la troisième polaire de chacun d'eux touchent la courbe P^{10} en ce point même. La troisième polaire de ce point sera l'asymptote correspondante de la base, de sorte que les quatre asymptotes de la base en seront en même temps des diamètres particuliers. Les dix-huit asymptotes $\mathfrak{S}_2^0$ jouissent, comme cordes doubles, de la propriété particulière, *que les couples de tangentes* A *et* A_1, B *et* B_1, *menées à la base* C^4 *par les extrémités* a *et* a_1, b *et* b_1 *des cordes doubles, ont leurs points d'intersection sur le diamètre correspondant* D, *de sorte que ce diamètre est une diagonale du quadrilatère complet* AA_1BB_1 *dont les deux autres diagonales sont parallèles à* $\mathfrak{S}_2^0$.

Chaque diamètre D rencontre la courbe P^{10} premièrement dans les trois points P, situés en même temps sur la polaire correspondante A^3, et, en outre, en sept autres points P; les premiers trois points se distinguent des sept autres points en ceci que les cordes doubles S_2 correspondant aux trois points ont la direction conjuguée au diamètre, tandis que les cordes doubles correspondant aux sept autres points sont conjuguées chacune a un autre diamètre, respectivement. Donc : *Des dix pôles* P *qui se trouvent sur un diamètre quelconque* D, *trois lui appartiennent plus particulièrement en jouissant de la propriété, que les cordes doubles correspondant à ces pôles ont la* *direction conjuguée à ce diamètre, ou sont dirigées vers son pôle Q situé sur la droite* G_∞.

Relativement à la totalité des diamètres, on a le théorème suivant :

Tous les diamètres D de la base donnée C^4 *enveloppent une courbe déterminée* D^3 *de la troisième classe et du quatrième degré, ayant trois points de rebroussement et une tangente double* D_2; *notamment cette courbe touche chacune des quatre asymptotes de la base (en qualité de diamètres particuliers) en un point qui est le centre de gravité de ses trois points d'intersection avec les trois autres asymptotes. Nous appelons aussi la courbe* D^3 *la troisième polaire de la droite* G_∞, *par rapport à la base* C^4 (*voir* Extrait I).

Conséquemment il passe, en général, par chaque point R du plan de la courbe C^4 trois de ses diamètres; donc il passera aussi par chaque point Q de G_∞ trois diamètres parallèles D_q, lesquels ont la direction conjuguée au diamètre D qui est la troisième polaire du point Q. Mais les directions conjuguées aux trois diamètres D_q sont différentes entre elles et différentes aussi, en général, de celle du diamètre D; savoir :

La base C^4 *n'a, en tout, que trois couples de diamètres conjugués (c'est-à-dire des diamètres dont l'un a la direction conjuguée à l'autre), lesquels diamètres sont respectivement dirigés vers les couples de points* x *et* x_1, y *et* y_1, z *et* z_1 *situés sur la droite* G_∞, *et conséquemment parallèles aux couples de rayons* X *et* X_1, Y *et* Y_1, Z *et* Z_1, *construits ci-dessus.* Si l'on imagine le point Q situé en un de ces six points, par exemple en x, le diamètre correspondant D passera par le point conjugué x_1, et réciproquement. En même temps, x_1 sera un des trois points P qui appartiennent plus particulièrement au diamètre D, ou dans lesquels ce diamètre est rencontré par la polaire correspondante A^3.

Les quatre asymptotes A_1 *sont les diamètres particuliers qui sont conjugués à leur propre direction.*

La tangente double D_2 *de la courbe* D^3 *est en quelque sorte un diamètre double, c'est-à-dire conjugué à deux directions différentes, de sorte qu'il lui correspond aussi deux pôles différents sur la droite* G_∞, *soient* Q_2 *et* Q_2^1, *situés dans ces deux directions. De même, il faut que deux fois trois pôles P lui appartiennent plus particulièrement, et que les cordes doubles* S_2 *correspondant à ces pôles aient trois par trois les directions conjuguées, donc soient parallèles ou dirigées vers les points* Q_2 *et* Q_2^1.

Les directions conjuguées aux trois diamètres qui passent par un point donné quelconque R *sont toujours déterminées par les asymptotes des deux polaires premières* A^3 *et* P^3 *de ce même point, et réciproquement.*

En général, chaque pôle P (situé sur P^{10}) n'appartient particulièrement qu'à *un seul* des trois diamètres qui passent par ce pôle, savoir au diamètre conjugué à la corde double correspondante. Seulement des neuf pôles particuliers P_3, chacun appartient en même temps aux trois diamètres, puisqu'il lui correspond aussi trois cordes doubles, conjuguées respectivement à ces diamètres.

Les trois diamètres qui passent par chacun des neuf pôles P_3 *touchent en ce point les trois branches de la courbe* P^{10} *qui passent par ce même point.*

Si le pôle P_x ($= P$) est en particulier un des quarante points communs aux courbes P^{10} et D^3, deux des trois diamètres qui passent par ce point coïncident avec la tangente D_t menée à la courbe D^3 au pôle P_x. Le troisième diamètre touche la courbe D^3 en un autre point que nous désignerons par R_0; désignons ce diamètre par D_r. En cette circonstance, deux cas peuvent se présenter, savoir le pôle P_x peut appartenir particulièrement :

1°. Au diamètre D_t, ou
2°. Au diamètre D_r;

ce qui détermine ensuite les intéressantes relations que voici :

I. *Si le pôle* P_x *appartient au diamètre* D_t, *sa polaire intérieure* I^3 *est composée de* $I^2 + S_2$, *la corde double* S_2 *étant en même temps une asymptote de la conique* I^2.

II. *Si le pôle* P_x *appartient au diamètre* D_r, *sa polaire intérieure est composée de* $S_2 + I + I_1$, *les droites* I *et* I_1 *étant parallèles et également distantes du pôle.*

Il se présente ici la question suivante :

Parmi les quarante pôles P_x, *combien en appartient-il à des diamètres* D_t, *et combien à des diamètres* D_r; *ou combien existe-t-il de polaires intérieures se décomposant en* $I^2 + S_2$ *de manière que* S_2 *soit une asymptote de* I^2, *et combien en existe-t-il qui se décomposent en trois droites* $S_2 + I + I_1$?

Je ne saurais encore répondre d'une façon certaine à cette question, et j'en abandonne la solution au lecteur.

J'ajoute encore, relativement à la courbe D^3, que :

La courbe D^3 *est le lieu géométrique du pôle* R_0, *dont la polaire extérieure* A^3 *touche la droite* G_∞; *et la troisième polaire du point de contact* Q *est précisément le diamètre* D *qui touche la courbe* D^3 *en ce pôle* R_0. Or, comme la polaire intérieure I^3 du même pôle R_0 a toujours en commun avec la droite G_∞ les mêmes trois points que la polaire extérieure A^3 (§ I, II), il s'ensuit qu'elle aussi touche la droite G_∞ en Q. Mais j'ai fait voir que ce contact n'est possible qu'à condition que Q soit un point double de la courbe I^3. Donc, on peut dire aussi :

Le lieu géométrique du pôle R_0, *dont la polaire intérieure* I^3 *n'a qu'un seul point double* Q (*ou, dans un cas particulier, trois points doubles* [*]), *est la courbe* D^3, *et le*

---

[*] Pour que la polaire I^3 puisse avoir deux (ou trois) points doubles, il faut qu'elle se compose de $I^2 + S_2$, donc il faudra que le lieu de son pôle soit la courbe P^{10}, et en ce cas les points doubles sont les points d'intersection de I^2 et S_2, soit $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}_1$. A cette occasion, on peut se demander : *Quelle est la courbe* $\mathfrak{Q}^n$ *sur laquelle se trouvent tous ces points doubles? L'exposant n, qui indique son degré, est-il peut-être égal au nombre des pôles* P_x *qui appartiennent à des diamètres* D_t? *Et les cordes*

lieu géométrique du point double est la droite G_∞. Pour les pôles P_s ($= R_0$), dont les polaires intérieures se composent de $S_2 + I + I_1$, et ont, en conséquence, trois points doubles, il n'y a qu'un seul de ces points doubles (savoir l'intersection de I et I_1) qui se trouve sur la droite G_∞; et pour les pôles P_z, dont les polaires intérieures se composent de $I^2 + S_2$, les deux points doubles se réunissent en un seul, qui se trouve sur G_∞ et doit être considéré comme un point de rebroussement.

Si le pôle R_0 *est, en particulier, un des trois points de rebroussement de la courbe* D^3, *le point correspondant* Q *sera en même temps un point d'inflexion de sa polaire extérieure* A^3, *et un point de rebroussement de sa polaire intérieure* I^3, *et la droite* G_∞ *sera respectivement la tangente d'inflexion et de rebroussement.*

Si un pôle R se trouve sur le diamètre double D_2 (tangente double de D^3), ses deux polaires A^3 et I^3 passeront par les deux points Q_2 et Q'_2 qui correspondent, sur la droite G_∞, au diamètre D_2; et si R se meut sur le diamètre D_2, deux couples d'asymptotes des polaires A^3 et I^3 resteront constamment parallèles à elles-mêmes, attendu qu'elles sont constamment dirigées vers les points Q_2 et Q'_2.

III.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRANSVERSALES RECTILIGNES DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES.

§ Ier.

Une courbe donnée C^m du degré m est rencontrée par chaque droite ou transversale S menée dans le même plan en m points (réels ou imaginaires) a. Le centre de gravité des m points d'intersection soit désigné par A. On aura relativement à ce centre de gravité les théorèmes suivants (dont le premier, I, a, est généralement connu) :

I, a. *Si la transversale* S *se meut parallèlement à elle-même, son centre de gravité (c'est-à-dire le centre de gravité de ses m points d'intersection variables* a*) décrit une droite déterminée* D, *savoir le diamètre de la base* C^m *conjugué à la direction de* S.

b. *Si l'on donne à la transversale* S *successivement toutes les directions possibles, on obtiendra tous les diamètres de la base. Parmi ces diamètres, les m asymptotes* A_s *de la base se présenteront comme les diamètres particuliers qui sont conjugués à leur propre direction. Conséquemment, le centre de gravité de toute transversale parallèle à une asymptote est situé au point à l'infini* a_∞ *de l'asymptote. Le centre de gravité de la*

---

doubles S_2 *qui correspondent à ces pôles sont-elles en même temps des asymptotes de la courbe* $\mathfrak{D}^n$? Au reste, cette courbe inconnue $\mathfrak{D}^n$ aura les neuf pôles P_2 pour points triples, de même que la courbe P^{10}. Le lieu des points doubles de toutes les polaires intérieures I^4 est composé de $\mathfrak{D}^n + G_\infty$.

droite G_∞, *considérée comme transversale, est indéterminé, se trouve sur tout diamètre qu'on voudra, donc dans toute direction qu'on voudra. Tous les diamètres de la base touchent une courbe déterminée de la* $(m-1)^{ième}$ *classe,* D^{m-1}, *et du* $2(m-2)^{ième}$ *degré,* $\mathfrak{D}^{2m-4}$. *Notamment, chaque asymptote* A_s *touche cette courbe en un point* a_0 *qui est le centre de gravité de ses* $m-1$ *points d'intersection avec les* $m-1$ *autres asymptotes. Cette courbe a, en général,* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *tangentes doubles qui sont des diamètres* D_2 *de la base conjugués à la fois à deux directions différentes. Conséquemment il passe, en général, par chaque point* P *du plan* $m-1$ *diamètres de la base; ou chaque point* P *est le centre de gravité* A *de* $m-1$ *transversales* S *passant par ce point et conjuguées respectivement à ces* $m-1$ *diamètres. Si le point* P *se trouve sur une asymptote, cette asymptote elle-même sera un des* $m-1$ *diamètres, et coïncidera, en conséquence, avec la transversale* S *qui lui est conjuguée; et puisque cette transversale, de même que les autres, doit avoir comme auparavant son centre de gravité en* P, *on peut considérer chaque point* P *d'une asymptote* A_s *comme centre de gravité d'une transversale* S *qui coïncide avec cette asymptote. Si l'on transporte* P *au point à l'infini* a_∞ *de l'asymptote, les autres* $m-2$ *diamètres seront tous parallèles à* A_s, *les* $m-2$ *transversales conjuguées à ces diamètres coïncideront toutes avec* G_∞, *et la transversale conjuguée à* A_s *coïncidera avec* A_s, *comme auparavant. Enfin, si* P *se trouve sur la droite* G_∞ *dans une direction quelconque, tous les* $m-1$ *diamètres seront parallèles à cette direction, et toutes les transversales conjuguées à ces diamètres coïncideront avec* G_∞.

c. Comme la base C^m est de la $m(m-1)^{ième}$ classe, elle a en commun avec la courbe D^{m-1} en tout $m(m-1)(m-1)$ tangentes; donc *la base a, en général,* $m(m-1)(m-1)$ *de ses diamètres pour tangentes.* Parmi ces diamètres particuliers, il faut compter notamment les m asymptotes A_s dont les points de contact a_∞ se trouvent sur G_∞. Nous désignerons les $m^2(m-2)$ autres diamètres par D_0 et leurs points de contact avec la base par d_0.

II, *a. Si l'on fait pivoter une transversale quelconque* S *autour d'un pôle* P *situé sur cette transversale, le centre de gravité* A *décrira une courbe* A^m *du* $m^{ième}$ *degré et de la* $2(m-1)^{ième}$ *classe, qui a le pôle* P *pour point* $(m-1)^{tuple}$, *qui est touchée en ce point par les* $(m-1)$ *transversales ayant* P *pour centre de gravité* (I, *b*), *et dont les m asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *sont respectivement parallèles aux m asymptotes* A_s *de la base. Les deux polygones formés des m droites* $\mathfrak{A}_s$ *et des m droites* A_s *sont semblables et semblablement placés; ils ont le pôle* P *pour centre de similitude, et leurs dimensions homologues sont dans le rapport de* $1:m$. *Conséquemment, tous les polygones m* $\mathfrak{A}_s$ *formés des m asymptotes des courbes* A^m *correspondant à des pôles* P *quelconques sont égaux et semblables. Si l'on imagine, outre la base donnée* C^m, *d'autres courbes* C_1^m, C_2^m,... *ayant en commun avec la base les m asymptotes* A_s, *il correspondra à chaque pôle* P, *par rapport à toutes ces courbes, une seule et même courbe* A^m, *et, de même, ces courbes auront en commun tous les diamètres* D, *ainsi que leur enveloppe* D^{m-1}. *Parmi les courbes* C_1^m,... *qui ont en commun avec* C^m *les m asymptotes* A_s, *il en existe une, soit* C_p^m, *qui a le pôle* P *pour* *point* $(m-1)^{uple}$, *et qui a en commun avec la courbe* A^m *les* $m-1$ *tangentes qui la touchent en ce point, de sorte que les branches respectives des deux courbes se touchent en ce même point. En d'autres termes, les deux courbes* C_p^m *et* A^m *sont semblables et semblablement placées, elles ont* P *pour centre de similitude, et leurs dimensions homologues sont dans le rapport de* $m:1$. Si l'on fait passer le pôle P à l'infini dans une direction déterminée, la courbe A^m se décompose dans le diamètre D conjugué à cette direction, et dans une autre partie située tout entière à l'infini.

b. Attendu que la courbe A^m passe (en vertu du parallélisme des asymptotes) par les m points a_∞ de la base C^m situés à l'infini sur G_∞, il faut que les $m(m-1)$ autres points communs aux deux courbes, que nous désignerons par A_1, se trouvent sur une courbe du $(m-1)^{ième}$ degré A_1^{m-1}. *Ou, par chaque pôle* P *il passe* $m(m-1)$ *transversales particulières* $S_1 (= S)$ *dont les centres de gravité* A_1 *se trouvent sur la base même, et sont en même temps les points d'intersection de la base avec une courbe du* $(m-1)^{ième}$ *degré* A_1^{m-1}. *Si le pôle* P *se trouve sur la base même, celle-ci aura en* P *un contact du* $(m-2)^{ième}$ *ordre avec* A_1^{m-1}. *Le contact sera du* $(m-1)^{ième}$ *ordre, si une des* $m-1$ *transversales, qui ont* P *pour centre de gravité, coïncide avec la tangente de la base au point* P. *Mais cela ne peut avoir lieu que pour un nombre déterminé de pôles, savoir pour* $m(m-1)^2$ *pôles. Si l'on fait passer le pôle* P *à l'infini dans une direction quelconque, des* $m(m-1)$ *transversales* S_1 m *seulement resteront présentes dans la figure; elles seront parallèles à cette même direction, et leurs* m *centres de gravité* A_1 *se trouveront sur le diamètre* D *conjugué à cette direction dont ils seront en même temps les points d'intersection avec la base. Les* $m(m-2)$ *autres transversales* S_1 *coïncideront avec la droite* G_∞, *et leurs centres de gravité seront réunis par groupes de* $m-2$, *dans les* m *points* a_∞ *de la base, de sorte qu'en ce cas la courbe* A_1^{m-1} *sera formée de* $D+(m-2)G_\infty$. Dans le cas particulier où l'on considère les deux courbes C_p^m et A^m (*a*), les $m(m-1)$ points A_1 communs à ces deux courbes sont tous réunis au pôle P, et la courbe A_1^{m-1} se décompose dans les $m-1$ tangentes de contact [*] en ce point.

Si, en particulier, la courbe A^m *touche la base* C^m *en un point quelconque, la courbe correspondante* A_1^{m-1} *touchera la base en ce même point.*

c. Si le pôle P se meut sur une droite fixe quelconque G, les courbes A^m, qui lui correspondent, par rapport à C^m, de la manière que nous venons de dire (*a*), formeront une série de courbes S (A^m) ayant en commun, outre les m points a_∞ de la base, le centre de gravité de la droite G, que nous désignerons par A_g. En outre, ces courbes sont disposées dans le plan, de telle sorte que par chaque point 𝔓 il passe en général $m-1$ de ces courbes, que la base a dans chacun de ses m points a_∞ avec une de ces courbes un contact du premier ordre, et dans chacun de ses m points d'intersection avec la droite G avec une de ces courbes un contact du $(m-2)^e$ ordre, et qu'elle est touchée encore par $m(m^2-3)$ de ces courbes en autant d'autres points.

[*] C'est-à-dire les tangentes communes au point de contact des deux courbes.

Les courbes de la série $S(A^m)$ *sont toutes enveloppées par la courbe* D^{m-1} (I, b) *qui est touchée, en général, par chaque courbe* A^m *en* $2m - 3$ *points différents. Mais parmi ces courbes* A^m *il en existe* $4(m-2)$ *qui ont, avec la courbe* D^{m-1} *dans un de ses points, un contact du troisième ordre, de sorte qu'elles ne la touchent en outre qu'en* $2m-5$ *points. Enfin la série de courbes* $S(A^m)$ *jouit de la propriété, qu'une courbe donnée quelconque du degré q est touchée par* $q(q+1)(m-1)$ *des courbes de ladite série;* conséquemment toute droite donnée est touchée par $2(m-1)$ de ces courbes [*].

Les $m-1$ transversales qui ont le pôle P pour centre de gravité (I, b) donneront lieu, pendant que P se meut sur la droite G, à des systèmes de transversales constituant ensemble la totalité des transversales dont le centre de gravité se trouve sur G. Désignant chacune de ces transversales par S_g, on aura le théorème suivant :

Le lieu [**] *de toutes les transversales* S_g *dont les centres de gravité* A *se trouvent sur une droite donnée quelconque* G, *est une courbe,* S_g^m, *de la* $m^{\text{ième}}$ *classe et du* $2(m-1)^e$ *degré, qui a la droite* G_∞ *pour tangente* $(m-1)^{\text{tuple}}$, *qui touche les asymptotes* A_s *de la base, et qui touche la droite* G *dans son centre de gravité* A_g.

Ce théorème fait en quelque sorte pendant au théorème (a). Au moyen de ces deux théorèmes, on obtient facilement tous les théorèmes suivants :

III, *a. Pour que la transversale* S, *menée dans le plan de la base fixe* C^m, *puisse toucher une autre courbe donnée quelconque de* $n^{\text{ième}}$ *classe,* K^n, *il faut que son centre de gravité* A *soit sur une courbe du* $mn^{\text{ième}}$ *degré* A^{mn}, *qui a les m points* a_∞ *de la base pour points* n^{tuples}, *et dont les asymptotes sont conséquemment parallèles par groupes de n à chaque asymptote* A_s *de la base, respectivement. Les n asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *d'un groupe correspondent aux n tangentes* T *de la base qui ont la même direction, de telle sorte que*

---

[*] *Si le pôle* P, *au lieu de se mouvoir sur la droite* G, *se meut sur une courbe du* $n^{\text{ième}}$ *degré* G^n, *la série correspondante* $S(A^m)$ *jouira des propriétés suivantes :* 1° *Les courbes de cette série ont en commun les m points* a_∞ *de la base.* 2° *Par chaque point* P *du plan il passe, en général,* $n(m-1)$ *courbes* A^m. 3° *La base* C^m *a dans chacun des m points* a_∞ *avec n de ces courbes un contact du premier ordre, puis dans chacun de ses mn points d'intersection avec la courbe* G^n, *avec une de ces courbes un contact de l'ordre* $(m-2)$, *et enfin avec* $nm(m^2-3)$ *de ces courbes en d'autres points déterminés un contact du premier ordre.* 4° *Une courbe donnée quelconque du* $q^{\text{ième}}$ *degré* Q^q *est touchée, en général, par* $nq(q+1)(m-1)$ *courbes* A^m. 5° *L'enveloppe de la série* $S(A^m)$ *est composée :* (α) *des m points* a_∞; (β) *de la courbe* D^{m-1} *touchée, en général, par chaque courbe* A^m *en* $2m-3$ *points, tandis qu'il existe* $4n(m-2)$ *de ces courbes* A^m *qui ont avec* D^{m-1} *en un de ses points un contact du troisième ordre;* (γ) *de* $(m-1)(m-2)$ *fois la courbe donnée* G^n; (δ) *d'une courbe déterminée du degré mn, laquelle cependant n'est touchée, en général, par chaque courbe* A^m *qu'en un seul point.*

Si le pôle P *se meut sur la base* C^m *même, celle-ci* aura non-seulement dans chacun des points occupés successivement par P un contact du $(m-2)^{\text{ième}}$ ordre avec les courbes correspondantes A^m et $A_1^{m-1}(b)$, mais elle *touchera, en outre,* $m(m^3-m^2-m-1)$ *courbes* A^m (*ainsi que les courbes correspondantes* A_1^{m-1}); *elle en touchera* $m(m-1)^2$ *au point même occupé respectivement par le pôle* [*contact du* $(m-1)^{\text{ième}}$ *ordre*], *tandis qu'elle en touchera* $m(m-2)(m^2+1)$ *en d'autres points déterminés.*

[**] C'est-à-dire l'enveloppe.

la distance d'une de ces asymptotes $\mathfrak{A}_s$ à l'asymptote A_s est à la distance de la tangente correspondante T à A_s, comme $(m-1):m$.

b. Pour que le centre de gravité A de la transversale S puisse se trouver sur une courbe donnée du $n^{ième}$ degré G^n, il faut que la transversale touche une courbe S^{mn} de la $mn^{ième}$ classe et du degré $n(n-1)(m-1)+2n(m-1)=(m-1)n(n+1)$, laquelle courbe a les m asymptotes A_s de la base pour tangentes n^{tuples} et la droite G_∞ pour tangente $n(m-1)^{tuple}$. Les $n(m-1)$ points de contact de cette courbe avec G_∞ sont déterminés par les directions conjuguées aux n fois $(m-1)$ diamètres de la base qui sont respectivement parallèles aux n asymptotes de la courbe donnée G^n. Les $n(n-1)(m-1)$ asymptotes rectilignes $\mathfrak{A}_s$ de la courbe S^{mn} ont les directions conjuguées aux diamètres de la base qui touchent la courbe G^n, et ces asymptotes passent respectivement par les points de contact de ces diamètres, et sont ainsi complétement déterminées.

IV. *Le lieu de la transversale S_1 dont le centre de gravité A_1 se trouve sur la base C^m même (II, b) et coïncide conséquemment avec un des m points d'intersection a, que nous désignerons par a_1, est une courbe $S_1^{m(m-1)}$, de la $m(m-1)^{ième}$ classe et du $m(m^2-3)^{ième}$ degré, qui a la droite G_∞ pour tangente $m(m-2)^{tuple}$, qui a en commun avec la base ses m asymptotes A_s ayant en même temps ces asymptotes pour tangentes $(m-1)^{tuples}$, et qui touche, en outre, la base en $m^2(m-2)$ autres points déterminés. Les $m(m-2)$ points de contact de la courbe $S^{m(m-1)}$ avec la droite G_∞ sont déterminés par les directions conjuguées aux diamètres de la base qui sont parallèles, par groupes de $m-2$, aux m asymptotes A_s(I, b). Les $m(m-1)^2$ asymptotes rectilignes de la courbe $S^{m(m-1)}$ (parmi lesquelles sont comprises les m asymptotes A_s) passent par les points d_0 de la base, en chacun desquels la base est touchée par un de ses diamètres D_0 (I, c). Chacune de ces asymptotes a la direction conjuguée au diamètre correspondant, donc elle est déterminée.*

La courbe $S_1^{m(m-1)}$ a en commun avec la base C^m en tout

$$m(m-1)\times m(m-1)$$

tangentes. D'après cela, on pourrait conclure que la base a un nombre égal de tangentes S_1^0 dont les centres de gravité A_1 se trouveraient sur la base même. Mais ce n'est pas précisément ce qui a lieu en réalité. Mettons à part d'abord les m asymptotes A_s de la base, comptées chacune pour m, donc toutes pour m^2 tangentes communes; il restera encore

$$(m-2)m^3$$

tangentes communes S_1^0 dont les points de contact a_2 avec la base ne sont pas situés à l'infini. Relativement à ces tangentes, on doit se poser la question : *Pour combien d'entre elles le centre de gravité A_1 coïncide-t-il avec le point de contact a_2, et pour combien d'elles coïncide-t-il avec un des $m-2$ points d'intersection a, soit avec a_1?* Attendu que deux des m points d'intersection a sont réunis au point de contact a_2, j'ai supposé [*] que les probabilités des deux cas sont dans le rapport de

$$2 : (m-2),$$

d'où il suit que *le centre de gravité* A_1 *des* $(m-2)m^3$ *tangentes* S_1^0 *se trouve*

(1) $$2(m-2)m^2 \text{ fois en } a_2,$$

et

(2) $$(m-2)^2 m^2 \text{ fois dans un des points } a_1.$$

Mais si le centre de gravité A_1 se trouve au point de contact a_2, *la courbe* $S^{m(m-1)}$ *touchera nécessairement en ce point la tangente* S_1^0, *donc aussi la base* C^m; ainsi S_1^0 doit être comptée en ce cas (comme tangente au point de contact des deux courbes) pour deux tangentes communes, et doit être considérée comme une des tangentes particulières S_2^0, définies au § IV, de l'Extrait II. *Conséquemment, le centre de gravité* A_1 *ne se trouvera en* a_2 *que la moitié du nombre de fois qu'on vient de déterminer dans la formule* (1); *donc seulement*

(1*) $$(m-2)m^2 \text{ fois.}$$

D'après cela, le nombre des $(m-2)m^3$ tangentes S_1^0 se réduit à

$$(m-2)(m-1)m^2,$$

et il résulte, en définitive, que :

La base donnée C^m *a, en général, outre les asymptotes,*

a. $(m-2)\ m^2$ *tangentes dont le centre de gravité* A_1 *coïncide avec le point de contact* a_2; *et*

b. $(m-2)^2 m^2$ *tangentes dont le centre de gravité* A_1 *se trouve dans un des* $m-2$ *points d'intersection a, soit en* a_1 [**].

Au reste, la même chose a lieu pour les m asymptotes A_s. Attendu que chaque asymptote A_s doit être comptée pour m tangentes communes, il faut aussi que m centres de gravité A_1 se trouvent en même temps sur A_s et sur la base C^m. Ils se grouperont suivant le rapport de $2 : (m-2)$; savoir, deux de ces centres de gravité seront réunis au point de contact $a_2 (= a_\infty)$ où les deux courbes ont en même temps un contact, et les $m-2$ autres centres de gravité coïncideront avec les $m-2$ points d'intersection a de A_s avec C^m.

Ainsi toutes les $m(m-1).m(m-1)$ *tangentes communes* S_1^0 *se groupent et se ré-*

---

[*] J'abandonne à d'autres une démonstration rigoureuse de la justesse ou de la fausseté de cette supposition. Pour $m=3$ et $m=4$, c'est-à-dire pour les bases C^3 et C^4, la supposition est vraie.

[**] Probablement des courbes du $m(m-2)^{ième}$ degré peuvent passer par les $m^2(m-2)$ points a_2; et alors des courbes du $(m-2)^2 m^{ième}$ degré passeront aussi par les $(m-2)^2 m^2$ points a_1. Du moins, c'est ce qui a lieu pour les bases du troisième et du quatrième degré.

duisent de la meme manière; savoir, leur nombre se réduit à

$$m(m-1)^3,$$

et le centre de gravité A_1 *de ces tangentes se trouve*

$$(\alpha) \qquad m(m-1)^2 \text{ fois en } a_2,$$

et

$$(\beta) \qquad m(m-2)(m-1)^2 \text{ fois en } a_1.$$

Ici, et plus encore ci-dessus (I, b), il se présente la circonstance remarquable, que le centre de gravité de l'asymptote A_s, c'est-à-dire le centre de gravité des m points a qu'elle a en commun avec la base, est *indéterminé*, et peut se trouver sur elle partout où l'on veut; tandis que le centre de gravité de toute transversale S parallèle à A_s a une position *déterminée*, étant situé à l'infini en a_∞. Cela s'explique, parce qu'on peut imaginer les deux points a_∞ et a'_∞ qui sont réunis dans le point de contact a_2 de A_s, comme étant situés à l'infini dans des directions opposées; car en ce cas tout point quelconque de A_s peut être considéré comme étant leur point milieu, donc leur centre de gravité, ce qui rend indéterminé le centre de gravité des m points a pris ensemble. De même le centre de gravité de l'asymptote A_s est *déterminé* ou *indéterminé*, selon qu'elle a, avec la base au point a_∞, un contact *du deuxième* ou *du troisième ordre*, respectivement.

V. *Le lieu des centres de gravité* A_0 *des tangentes* S_0 *de la base* C^m, *considérées comme des transversales* S, *est une courbe* $A_0^{m(m^2-m-1)}$ *du degré* $m(m^2-m-1)$; *cette courbe a les m points* a_∞ *de la base pour points* $(m^2-m-1)^{\text{uples}}$, *y touche la base avec une de ses branches, et la coupe, au contraire, avec les* m^2-m-2 *autres branches; elle touche encore la base aux* $(m-2)m^2$ *points* a_2, *ci-dessus indiqués, et la coupe aux* $(m-2)^2m^2$ *points* a_1 (IV). *Conséquemment elle a, en commun avec la base, les m asymptotes* A_s *de cette dernière; mais elle a, en outre, pour chaque asymptote* A_s, m^2-m-2 *autres asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *parallèles à* A_s. *Les asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *correspondent aux* m^2-m-2 *tangentes* T *de la base qui sont parallèles à la même* A_s, *de telle sorte que les distances d'une asymptote* $\mathfrak{A}_s$ *et de la tangente correspondante* T *à* A_s *sont dans le rapport de* $(m-1):m$.

VI. *Le lieu des centres de gravité* A_d *de tous les diamètres* D *de la base donnée* C^m *considérés comme des transversales* S, *est (hormis les asymptotes de la base) une courbe* $A_d^{m(m-2)}$ *du degré* $m(m-2)$. *Cette courbe a les m points* a_∞ *de la base pour points* $(m-2)^{\text{uples}}$; *conséquemment elle a pour chaque asymptote* A_s *de la base* $m-2$ *asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *parallèles à* A_s, *et correspondant aux* $m-2$ *diamètres* D (I, b), *parallèles à la même* A_s, *de telle sorte que les distances d'une asymptote* $\mathfrak{A}_s$ *et du diamètre correspondant* D *à* A_s *sont dans le rapport de* $(m-1):m$. *Enfin la courbe* $A_d^{m(m-2)}$ *touche la courbe* D^{m-1}, *enveloppe de tous les diamètres, aux mêmes points* a_∞ *où cette dernière courbe est touchée par les m asymptotes* A_s *de la base* (I, b). Les $m(m-2)\times m$

points communs aux courbes $A_d^{m(m-2)}$ et C^m sont les centres de gravité A_d d'un nombre égal de diamètres de C^m; et comme $m(m-2)$ de ces centres de gravité coïncident avec les m points a_∞, les $m(m-1)(m-2)$ autres points indiquent le nombre des diamètres dont les centres de gravité se trouvent sur la base, mais pas à l'infini. On arrive au même résultat en considérant les $m(m-1)^2$ tangentes communes aux courbes $S_1^{m(m-1)}$ (IV) et D^{m-1}. Car, si l'on en retranche les asymptotes A, comptées chacune pour $(m-1)$, les $m(m-1)(m-2)$ autres tangentes doubles sont précisément les diamètres dont il s'agit. Donc :

La base donnée C^m a, en général, $m(m-1)(m-2)$ diamètres dont les centres de gravité se trouvent sur la base même, mais pas à l'infini, et des courbes du $(m-1)(m-2)^e$ degré peuvent passer par ces centres de gravité.

Relativement aux diamètres D et à leur enveloppe D^{m-1}, nous ajoutons encore le théorème suivant :

Si par le point de contact a_0 de chaque diamètre D de la base C^m avec l'enveloppe D^{m-1}, on fait passer la transversale $\mathfrak{S}$ $(=S)$ conjuguée au diamètre, le lieu de cette transversale sera une courbe $\mathfrak{S}^{2m-3}$ de la $(2m-3)^e$ classe et du $4(m-2)^e$ degré ayant la droite G_∞ pour tangente $2(m-2)^{tuple}$, et touchant notamment aussi les m asymptotes de la base.

VII. Les théorèmes précédents, appliqués aux bases les plus simples C^3 et C^4, donnent lieu à des corollaires nombreux, tels que les suivants :

a. La plupart des propositions relatives à la base C^3 ont été déjà présentées ci-dessus (Extrait II, § III) sous un autre point de vue. D'après (IV), la courbe S_1^6 toucherait la base en $(3-2)3^2 = 9$ points a_2 qui sont en même temps les centres de gravité A_1 des tangentes correspondantes S_1^0; en outre, le centre de gravité A_1 de $(3-2)^2.3^2 = 9$ autres tangentes S_1^0 coïnciderait avec l'unique point d'intersection a_1 de ces tangentes. Mais ces deux fois neuf tangentes S_1^0 se réduisent aux neuf tangentes d'inflexion de C^3, de sorte que dans chaque point d'inflexion un point a_2 et un point a_1 sont réunis (*voir* Extrait II, § III, II, 2). D'après (V), le lieu géométrique des centres de gravité A_0 de toutes les tangentes S_0 est une courbe du quinzième degré A_0^{15}, qui a les trois points a_∞ de la base C^3 pour points quintuples, et touche celle-ci en chacun de ces points avec une de ses branches respectivement, de sorte qu'elle y a dix-huit points communs avec la base; en outre, elle a avec la base dans ses neuf points d'inflexion un contact du deuxième ordre, et conséquemment a en commun avec elle les neuf tangentes d'inflexion. Le centre de gravité A_0 de chaque tangente S_0 est situé au point de trisection le plus voisin du point de contact. Désignant par M le point milieu de chaque tangente S_0, *le lieu géométrique des M sera pareillement une courbe du quinzième degré M^{15}, qui a les trois points a_∞ pour points quintuples, y touche la base C^3 avec une de ses branches, et, en outre, a en commun avec la base ses neuf points d'inflexion ainsi que les neuf tangentes d'inflexion correspondantes.* Conséquemment : *il existe, en général, dans le plan d'une courbe du troisième degré C^3 (outre les trois points a_∞ et les neuf points* *d'inflexion) cent vingt points* P *jouissant de la propriété d'être en même temps* A_0 *et* M, *c'est-à-dire d'être en même temps point de trisection ou centre de gravité d'une tangente, et point milieu d'une seconde tangente.* D'après (VI), le lieu des centres de gravité A_d de tous les diamètres D est une courbe du troisième degré A_d^3 ayant des asymptotes parallèles à celles de C^3. Conséquemment les triangles des asymptotes des deux courbes sont semblables et semblablement placés; ils ont le même centre de gravité, lequel en conséquence sera en même temps leur centre de similitude; leurs côtés homologues sont dans le rapport de $1:3$; enfin la courbe A_d^3 touche les côtés du triangle des asymptotes de la base dans leurs points milieux a_0 et a ses propres asymptotes en même temps pour tangentes d'inflexion, etc.

b. Relativement à la base C^4, nous signalons entre autres les relations suivantes :

D'après (IV), le lieu de toutes les transversales S_1 dont les centres de gravité A se trouvent sur la courbe C^4 elle-même, est une courbe S_1^{12} de la douzième classe et du cinquante-deuxième degré, qui a en commun avec la base, outre les asymptotes, $(4-2)4^3 = 128$ tangentes S_1^0. Parmi ces tangentes, soixante-quatre coïncident deux à deux, de manière à ne former que trente-deux tangentes S_1^0 dont le centre de gravité A_1 se trouve au point de contact a_2, et que nous avons discutées d'une manière plus détaillée ci-dessus (Extrait II, § IV); le centre de gravité A_1 des $(4-2)^2 \cdot 4^2 = 64$ autres tangentes S_1^0 se trouve dans un des deux points d'intersection a ou a_1. Si l'on désigne le point de contact de chacune de ces dernières tangentes par α, et les deux points d'intersection par β et γ, et si l'on suppose que le centre de gravité A_1 se trouve en β, β devra être situé entre α et γ, de telle sorte que $\beta\gamma = 2\beta\alpha$. Donc : *Une courbe quelconque du quatrième degré* C^4 *a, en général, soixante-quatre tangentes dont les deux points d'intersection* β *et* γ *se trouvent du même côté du point de contact* α, *la distance de l'un des deux points d'intersection au point de contact étant triple de celle de l'autre,* $\alpha\gamma = 3\alpha\beta$. *Des courbes du seizième degré peuvent passer par les soixante-quatre points* a_1 *(ou* β*)*. Les centres de gravité A_0 de toutes les tangentes S_0 de la courbe C^4 se trouvent sur une courbe du quarante-quatrième degré (V). Le lieu des centres de gravité A_d de tous les diamètres D est une courbe du huitième degré A_d^8, qui a les quatre points a_∞ et les trois points d'intersection des trois couples de diamètres conjugués de la base (Extrait II, § IV) pour points doubles. Il existe, outre les quatre asymptotes A_s, vingt-quatre diamètres D dont les centres de gravité A_d se trouvent sur la courbe C^4 elle-même, et des courbes du sixième degré peuvent passer par les vingt-quatre points A_d (VI).

Note. Au moyen de la projection, on donnera aux théorèmes précédents une forme plus générale. Les centres de gravité seront alors remplacés par des centres de moyennes harmoniques, qu'on déterminera de la manière indiquée par M. Poncelet dans son intéressant Mémoire *sur les centres de moyennes harmoniques* (Journal de M. Crelle, tome III, page 213).

§ II.

I. Les m points d'intersection a, b, c, d,... de la base C^m avec une transversale quelconque déterminent sur cette dernière $\frac{1}{2}m(m-1)$ segments ab, ac, ad,..., bc, bd,..., cd,... ; désignons par Q le point milieu de chaque segment. Chaque segment est, relativement à son point milieu, une corde simple que nous désignerons par s (au lieu de S, *voir* l'Extrait II, § I); et, conséquemment, il se trouvera sur chaque transversale S, en général, $\frac{1}{2}m(m-1)$ cordes simples s et autant de points milieux Q. Si, en particulier, la transversale S touche la base, un des points milieux Q se trouvera au point de contact, soit en (ab), et deux fois $(m-2)$ points milieux coïncideront par couples en $m-2$ points. Si S est parallèle à l'une des asymptotes A_s de la base, $m-1$ points Q doivent être considérés comme se trouvant en a_∞; et si S coïncide avec A_s, $2(m-2)$ points Q se trouveront en a_∞, tandis qu'un autre point Q, savoir le point milieu des deux points a et b réunis au point de contact a_∞, reste indéterminé et pourra être tout point de A_s qu'on voudra (*voir* § I, IV); les autres $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ points Q seront déterminés comme auparavant. Si l'on fait passer S à l'infini, de sorte que $S = G_\infty$, les points Q seront indéterminés, parce que la direction de G_∞ est indéterminée; mais dès qu'on fixe la direction de G_∞, tous les $\frac{1}{2}m(m-1)$ points Q sont déterminés, savoir, au moyen des m asymptotes A_s de la base. Cette indétermination de la direction G_∞ fait que tout point Q_∞ situé sur G_∞ dans une direction donnée quelconque, peut être considéré, à volonté, comme point milieu de chacun des $\frac{1}{2}m(m-1)$ segments déterminés par les points a_∞, b_∞, c_∞, d_∞,....

Ces relations donnent lieu aux théorèmes suivants :

II, *a*. *Si l'on fait mouvoir une transversale quelconque* S *parallèlement à elle-même, ses* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points milieux* Q *décriront conjointement une courbe* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ *du* $\frac{1}{2}m(m-1)^{\text{ième}}$ *degré et de la* $m(m-1)(m-2)^{\text{ième}}$ *classe. Cette courbe aura* $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *points doubles* Q_2 *et* $m(m-1)$ *tangentes* $(m-2)^{\text{tuples}}$ *qui touchent en même temps la base. Ses asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *passeront respectivement par les* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points d'intersection des m asymptotes* A_s *de la base et formeront par rapport à celles-ci les conjuguées harmoniques à la direction de* S, *de sorte que si* A_s *et* B_s *sont deux asymptotes de la base qui la touchent respectivement en* a_∞ *et en* b_∞ *et coupent une quelconque des transversales parallèles* S *en* a_1 *et* b_1 *respectivement, la droite* $\mathfrak{A}_s$, *menée du point d'intersection* A_sB_s *par le point milieu* Q_1 *du segment* a_1b_1, *sera une asymptote de la courbe* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ *qu'elle touchera au point milieu* Q_∞ *du segment* $a_\infty b_\infty$. Au reste, on obtient toutes les autres tangentes de la courbe $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ par une construction pareille. *Si l'on imagine les tangentes* A *et* B *menées à la courbe* C^m *par deux de ses points d'intersection a et b, avec* S, *la droite* $\mathfrak{A}$, *menée du point d'intersection* AB *par le point milieu* Q *du segment ab, touchera la courbe* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ *au point* Q.

Si la transversale S *se meut, en particulier, parallèlement à une asymptote* A_s *de la* *base, le degré de la courbe-lieu des* Q *sera abaissé d'une unité, ou plutôt ce lieu sera formé de l'asymptote* A_1 *et d'une courbe du degré*

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)-1=\tfrac{1}{2}(m+1)(m-2).$$

Cette courbe aura A_1 *pour asymptote* $(m-2)^{tuple}$ *et la touchera au point* a_∞ *avec* $m-2$ *de ses branches, lesquelles, en conséquence, s'y touchent aussi les unes les autres.*

b. Si l'on donne à la transversale S *successivement toutes les directions possibles, on obtiendra une série de courbes* $S\left[Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}\right]$ *qui couvrent le plan entier, de telle sorte, qu'en général, par chaque point* P *il en passe* $\frac{1}{2}m(m-1)$ [*].

Pendant que la transversale S change de position, les $\frac{1}{2}m(m-1)$ asymptotes $\mathfrak{A}_1$ de la courbe variable $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ pivotent autour des points fixes d'intersection mutuelle des m asymptotes A_1 de la base, et forment un nombre égal de faisceaux de rayons projectifs, placés en partie en perspective et en partie obliquement; conséquemment, ces faisceaux auront en partie leurs points d'intersection G en perspective, et, en partie, engendreront des sections coniques K^2; savoir : chaque faisceau de rayons est en perspective avec $2(m-2)$ faisceaux, et obliquement placé par rapport à $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ autres faisceaux. Les points G et les coniques K^2 sont liés les uns aux autres par des relations nombreuses que cependant nous passerons ici sous silence.

III, *a. Si l'on fait pivoter la transversale* S *autour d'un pôle* P *pris sur elle à volonté, les* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points milieux* Q *décriront une courbe* $Q^{m(m-1)}$ *du degré* $m(m-1)$ *et de la classe* $(m-1)^2m$. *Cette courbe aura le pôle* P *pour point* $\frac{1}{2}m(m-1)^{tuple}$, *et*

---

[*] Les points P par lesquels il passe un nombre de courbes moindre d'une unité, se trouvent sur l'enveloppe E^x de cette série de courbes, laquelle enveloppe est touchée par chacune de ces dernières en $\frac{1}{4}m^2(m-1)^2$ points. *De quelles parties cette enveloppe* E^x *est-elle formée, ou quelles sont ses propriétés?* Ne serait-elle pas formée de deux parties distinctes, savoir : 1° du lieu géométrique de tous les points doubles Q_2 de la série de courbes, donc de deux fois une courbe du $x^{ième}$ degré Q_2^x; et 2° du lieu géométrique des points milieux Q_0 de toutes les cordes simples $\mathfrak{S}$ de la base qui joignent les points de contact de tangentes parallèles de la base (*voir* Extrait II, § III, IV)?

J'ai trouvé que ce dernier lieu est du $m(m+1)(m-2)^{ième}$ degré, donc $Q_0^{m(m+1)(m-2)}$. D'après cela, l'enveloppe E^x serait formée de $2Q_2^x+Q_0^{m(m+1)(m-2)}$, chaque courbe $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ de la susdite série de courbes aurait $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ points doubles situés sur Q_2^x, ce qui compterait pour $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ contacts, et, conséquemment, l'autre partie $Q_0^{m(m+1)(m-2)}$ serait touchée par chaque courbe $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ en $\frac{1}{2}m(m-1)(2m-3)$ points.

Pour la base C^3, l'enveloppe E^x serait formée seulement de Q_0^{12} (Extrait II, § III, IV), laquelle courbe serait touchée par chaque courbe Q^3 en neuf points Q_0.

Pour la base C^4, où $Q_2^x=Q_2^{16}$ (Extrait II, § IV), on aurait

$$E^x=2Q_2^{16}+Q_0^{40};$$

chaque courbe Q^6 aurait trois points doubles Q_2 situés sur Q_2^{16}, et toucherait la courbe Q_0^{40} en trente points Q_0.

aura, en outre, $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *points doubles* Q_2. *Elle se touchera elle-même* $(m-1)$ *fois en chacun des m points* a_∞ *de la base* C^m, *de sorte qu'elle n'aura que m asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *dont cependant chacune doit être comptée pour* $m-1$. *Ces asymptotes seront respectivement parallèles aux asymptotes* A_s *de la base et seront à des distances moitié moindres du pôle, de sorte que les deux polygones à m côtés, formés par les asymptotes* $m\mathfrak{A}_s$ *et* mA_s, *seront semblables, ayant le pôle* P *pour centre de similitude et leurs dimensions homologues dans le rapport de* 1 : 2. *Lorsque le pôle est situé, en particulier, sur la base même, le lieu géométrique dont il s'agit se décompose en deux parties* $Q^m + Q^{m(m-2)}$. *La courbe* Q^m *est semblable à la base et semblablement placée ; elle touche celle-ci au point* P *qui est le centre de similitude des deux courbes, et leurs dimensions homologues sont dans le rapport de* 1 : 2 ; *conséquemment, leurs asymptotes sont parallèles et les distances respectives de ces asymptotes au pôle sont dans le même rapport de* 1 : 2. *L'autre courbe* $Q^{m(m-2)}$ *a le pôle pour point* $\frac{1}{2}(m+1)(m-2)^{\text{tuple}}$ *et les m asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *de la première courbe* Q^m *pour asymptotes* $(m-2)^{\text{tuples}}$; *elle a, en outre,*

$$\frac{1}{8}(3m+1)(m-2)(m-3)(m-4) \text{ points doubles } Q_2.$$

b. Si la courbe $Q^{m(m-1)}$ *doit passer par un point donné quelconque* $\mathfrak{P}$ *et avoir son pôle* P *sur une droite donnée* G, *il existera* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *solutions.* Ou : *Si le pôle* P *se meut sur une droite fixe* G, *la série de courbes correspondantes* $S(Q^{m(m-1)})$ *jouit de la propriété, que par chaque point* $\mathfrak{P}$ *du plan il en passe, en général,* $\frac{1}{2}m(m-1)$, *et que toute droite donnée est touchée par* $m(m^2-3)$ *de ces courbes.* L'enveloppe de cette série de courbes est formée des mêmes parties que la précédente (*voir* II, *b*, la note), mais, en outre, de différentes autres parties.

IV. Les points doubles Q_2, mentionnés dans les théorèmes précédents (II, *a*, et III, *a*), indiquent celles parmi les transversales S sur lesquelles deux des $\frac{1}{2}m(m-1)$ segments, soit *ad* et *bc*, ont le même point milieu Q_2; une telle transversale forme, d'après la définition et la notation ci-dessus données, une corde double S_2 qui passe par le point où se trouve respectivement le pôle P. Donc :

a. Le lieu de toutes les cordes doubles S_2 *d'une courbe donnée* C^m *du degré m, est une courbe de la* $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)^e$ *classe,*

$$S_2^{\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)},$$

qui a la droite G_∞ *pour tangente* $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)^{\text{tuple}}$ *et chaque asymptote de la base pour tangente multiple* [*], *et qui touche notamment aussi les* $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$ *tangentes doubles de la base.* On obtient les directions déter-

[*] Combien de tangentes chaque asymptote de la base représente-t-elle ? Est-ce qu'elle en représente $(m-2)(m-3)$, et la courbe dont il s'agit touche-t-elle chacune des asymptotes de la base $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ fois au point a_∞, de manière à l'avoir en même temps pour asymptote $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)^{\text{tuple}}$, et à la toucher, en outre, en autant de points non situés à l'infini ?

minées par les $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)$ points de contact de la courbe-lieu des cordes doubles avec la droite G_∞, en arrangeant les m asymptotes A_s de la base par groupes de quatre, et en construisant pour chaque groupe trois couples de rayons harmoniques X et X_1, Y et Y_1, Z et Z_1 d'une manière analogue, comme on l'a fait ci-dessus pour les quatre asymptotes de la base C^4 (Extrait II, § IV, page 329). Par tout pôle P quelconque il passe, en général, $\frac{3}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ cordes doubles S_2; si le pôle se trouve sur G_∞, il n'en reste présentes dans la figure qu'un tiers de ce nombre, tandis que les autres coïncident avec G_∞. *Si le pôle* P *se trouve en un point quelconque de la base, il sera lui-même une extrémité, soit a, de* $\frac{1}{2}(2m+1)(m-2)(m-3)$ *cordes doubles, dont les points milieux* Q_2 *se trouveront sur le lieu géométrique* Q^m, *discuté ci-dessus* (III, *a*), *ainsi que sur une autre courbe du* $(m-1)(m-3)^e$ *degré qui a, avec* Q^m *au pôle, un contact de l'ordre* $\frac{1}{2}(m+2)(m-3)-1$.

b. Le lieu des points milieux Q_2 *de toutes les cordes doubles* S_2 *de la base donnée* C^m *est une courbe du* $\frac{1}{4}m(m+1)(m-2)(m-3)^e$ *degré,*

$$Q_2^{\frac{1}{4}m(m+1)(m-2)(m-3)}.$$

Cette courbe a les asymptotes de la base pour asymptotes multiples $[\frac{1}{2}(m-2)(m-3)^{\text{tuples}}?]$; *elle coupe la droite* G_∞ *aux mêmes points où celle-ci est touchée par la courbe-lieu des cordes doubles* S_2; *enfin elle passe par les points milieux des tangentes doubles de la base.*

Si un des $\frac{1}{2}m(m-1)$ points milieux Q d'une transversale, soit Q_1, se trouve sur la base même (sans que le segment correspondant soit $=0$), par exemple si le point milieu Q_1 du segment *ac* se trouve au point d'intersection *b*, et si l'on désigne, comme ci-dessus (Extrait II, § III, II), la transversale ou la corde simple *ac* par S_1, on obtiendra facilement, au moyen des théorèmes précédents, la proposition suivante :

c. Le lieu de toutes les cordes simples S_1 *de la base donnée* C^m *dont les points milieux* Q_1 *se trouvent sur la base même, est une courbe de la* $m(m-1)(m-2)^e$ *classe,*

$$S_1^{m(m-1)(m-2)}.$$

Cette courbe a la droite G_∞ *pour tangente* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)^{\text{tuple}}$; *elle a les m asymptotes* A_s *de la base pour tangentes* $2(m-2)^{\text{tuples}}$ *et pour asymptotes* $(m-2)^{\text{tuples}}$, *et elle touche la base dans ses* $3m(m-2)$ *points d'inflexion.* Les directions déterminées par les points de contact de cette courbe et de la droite G_∞ peuvent être obtenues d'une manière analogue comme pour la base C^3 (Extrait II, § III, II, 5), au moyen des asymptotes de la base, savoir : les trois droites qu'on mène, dans chacun des triangles formés par trois quelconques des asymptotes de la base C^m, des sommets aux points milieux des côtés opposés, sont dirigées vers trois de ces points de contact. De même le point de contact *s* de chaque corde S_1 avec la courbe-lieu de ces cordes, pourra être déterminé par la construction très-simple, donnée au même endroit (Extrait II, § III, II, 7). Par tout pôle quelconque P il passe $m(m-1)(m-2)$

cordes S_1 *dont les* $m(m-1)(m-2)$ *points milieux* Q_1 *se trouvent toujours sur une courbe du* $(m-1)(m-2)^e$ *degré* $Q_1^{(m-1)(m-2)}$. Si le pôle P se trouve sur la base même, *il sera d'un côté le point milieu* $b = Q_1$ *de* $\frac{1}{2}(m+1)(m-2)$ *cordes* $ac = S_1$, *et de l'autre côté une extrémité a de* $(m+1)(m-2)$ *autres cordes* S_1. *Les* $(m+1)(m-2)$ *points milieux de ces dernières cordes se trouvent sur la courbe* Q^m, *discutée ci-dessus* (III, *a*), laquelle touche la base au point P. Si le pôle P se trouve à l'infini sur G_∞, il ne reste plus présentes dans la figure que $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ cordes S_1 (attendu qu'un nombre égal de ces cordes coïncide avec G_∞), *et des courbes* $Q_1^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}$ *peuvent passer par leurs points milieux* Q_1. Si le pôle se meut sur la droite G_∞, on obtient une série de courbes $S\left[Q_1^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}\right]$. *Toutes les fois qu'une de ces courbes touche la base, auquel cas deux des cordes* S_1 *se réunissent dans une seule* S_1^0, *cette dernière sera une asymptote de la courbe* $S_1^{m(m-1)(m-2)}$ *et la touchera au pôle correspondant* P. *En outre, chaque corde* S_1^0 *de ce genre jouit de la propriété, que les tangentes* A, C *et* B, *menées à la base par les extrémités a, c et par le point milieu b de la corde, se rencontrent en un même point* $\mathfrak{P}$. 1° *Quelle est l'enveloppe de la série de courbes* $S\left[Q_1^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}\right]$? 2° *Quel est le degré de la courbe* $S_1^{m(m-1)(m-2)}$?

V. On obtient encore les propositions suivantes :

a. Le lieu de toutes les transversales S *de la base donnée* C^m, *qui ont un de leurs points milieux* Q *sur une droite donnée* G, *ou simplement le lieu de toutes les cordes simples* $ab = S$, *dont les points milieux se trouvent sur la droite donnée* G, *est une courbe de la* $m(m-1)^e$ *classe et du* $m(m^2-3)^e$ *degré*,

$$S^{m(m-1)}.$$

Cette courbe a les droites G *et* G_∞ *pour tangentes* $\frac{1}{2}m(m-1)^{\text{tuples}}$; *elle a, en outre,* $\frac{1}{4}m(m+1)(m-2)(m-3)$ *tangentes doubles; enfin elle touche :* 1° *les m asymptotes de la base;* 2° *les m tangentes qui touchent la base dans ses points d'intersection avec* G, *et* 3° *la base même, en* $m(m+2)(m-2)$ *points déterminés. Les tangentes doubles, qu'on vient de mentionner, sont formées par les cordes doubles* S_2 *de la base dont les points milieux* Q_2 *se trouvent sur* G, *et le lieu en question touche la base aux points de contact* a_0 *de toutes les cordes tangentes* ba_0 [*], *dont les points milieux se trouvent pareillement sur* G. *Le lieu dont il s'agit touche la droite* G *en* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points et la coupe conséquemment encore en* $m(m+1)(m-2)$ *autres points* Q_0. *Ses tangentes aux points* Q_0 *sont des cordes particulières* $ab = \mathfrak{S}\ (= S)$ *telles, que les tangentes* A, B *menées par les extrémités a, b à la base sont parallèles et se rencontrent au même point de* G_∞. *Pareillement, les tangentes qui touchent ce lieu dans ses* $m(m+1)(m-2)$ *points d'intersection avec la droite* G_∞, *donc ses asymptotes rectilignes, sont des cordes ab telles, que les tangentes menées à la base par leurs extrémités*

[*] Cordes qui, dans l'une de leurs extrémités a_0, touchent la courbe au lieu de la couper.

se rencontrent sur la droite G, *de sorte que, sous ce point de vue, il y a réciprocité entre* G *et* G_∞.

b. Le lieu de toutes les transversales particulières S *de la base donnée* C^m, *qui ont un de leurs points milieux* Q *sur une courbe donnée du* $n^{\text{ième}}$ *degré* G^n, *est une courbe de la* $nm(m-1)^e$ *classe qui a la droite* G_∞ *pour tangente* $\frac{1}{2}nm(m-1)^{\text{tuple}}$, *et dont on peut déterminer le nombre des tangentes doubles, des contacts avec les courbes* C^m *et* G^n, *etc.*

c. Le lieu des $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points milieux* Q *de la transversale particulière* S *de la base* C^m, *qui touche une courbe donnée de* $n^{\text{ième}}$ *classe* K^n, *est une courbe du degré* $nm(m-1)$, *qui a pour chacune des m asymptotes de la base n asymptotes* $(m-1)^{\text{tuples}}$ *et parallèles à cette asymptote de la base, etc.*

d. Le lieu des points milieux Q_0 *de toutes les cordes simples* $ab = \mathfrak{S}$ *de la base* C^m *qui jouissent de la propriété, que les tangentes* A, B *menées par leurs extrémités* a, b *sont parallèles, ou le lieu du pôle* P_0 *dont la polaire intérieure* I^{m-1} *touche la base en deux points* a, b, *est une courbe du* $m(m+1)(m-2)^e$ *degré,*

$$Q_0^{m(m+1)(m-2)}.$$

Cette courbe touche la base dans ses $3m(m-2)$ *points d'inflexion et a ses m points* a_∞ *pour points* $(m+1)(m-2)^{\text{tuples}}$; *conséquemment elle a pour chaque asymptote* A_s *de la base,* $(m+1)(m-2)$ *asymptotes parallèles à* A_s, *et situées respectivement au milieu entre* A_s *et les tangentes de la base parallèles à* A_s. Conséquemment il existe, en général, $m(m-2)(m^2-7)$ cordes $\mathfrak{S}$ dont le point milieu Q_0 se trouve sur la base même, mais n'est situé ni dans un des points a_∞, ni dans un point d'inflexion de la base. (Pour $m = 3$, on obtient $6\mathfrak{S}$ ou $6Q_0$, comme Extrait II, § III, IV). On peut demander ici *quel sera le lieu* $\mathfrak{S}^x$ *de toutes les cordes* $\mathfrak{S}$ [*]. Au reste, le point de contact de chaque corde $\mathfrak{S}$ avec la courbe $\mathfrak{S}^x$ est déterminé par la même relation simple, comme ci-dessus (Extrait II, § III, IV) pour la base C^3.

VI. Le lieu des points milieux Q de toutes les transversales S qui touchent la base C^m, donc de toutes les tangentes de cette dernière, se décompose en trois parties, dont une est la base même et ne contient qu'un seul point milieu qui se trouve au point de contact a_0; une autre partie contient les points milieux T_0 (au lieu de Q) des $m-2$ segments compris entre le point de contact a_0 d'un côté, et les $m-2$ points d'intersection $b, c, d, \ldots$ de l'autre [chaque point T_0 représentant au fait un couple de points Q réunis (I)]; enfin la troisième partie contient les points milieux T ($=$ Q) des segments terminés par ces $m-2$ points d'intersection. Conséquemment il se trouve sur chaque tangente $m-2$ points milieux T_0 et $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ points milieux T, dont on détermine respectivement le lieu comme il suit :

---

[*] En essayant de déterminer ce lieu, j'ai trouvé

$$x = \tfrac{1}{2}m(m-1)(2m-3).$$

α. *Le lieu des points milieux* T_0 *relativement à toutes les tangentes de la base donnée* C^m *est une courbe du* $m(m+2)(m-2)^e$ *degré,*

$$T_0^{m(m^2-4)}.$$

Cette courbe a les m points a_∞ *de la base pour points* $m(m-1)^{tuples}$, *et chaque asymptote* A_i *de la base pour asymptote* $(m-2)^{tuple}$, *c'est-à-dire elle touche chaque asymptote de la base dans son point* a_∞ *avec* $(m-2)$ *de ses branches, et l'y coupe avec* $(m+1)(m-2)$ *autres branches; enfin elle a en commun avec la base ses* $3m(m-2)$ *points d'inflexion et tangentes d'inflexion et touche chaque tangente double de la base dans son point milieu.* De là il suit que : *Une courbe quelconque* C^m *a, en général,* $m(m+4)(m-2)(m-3)$ *tangentes telles, que l'un des points d'intersection b est le point milieu du segment compris entre le point de contact* a_0 *et un autre point d'intersection c.*

β. *Le lieu des points milieux* T *de toutes les tangentes de la base* C^m *est une courbe du* $m(m+1)(m-2)(m-3)^e$ *degré,*

$$T^{m(m+1)(m-2)(m-3)}.$$

Cette courbe a les m points a_∞ *de la base pour points* $(m+1)(m-2)(m-3)^{tuples}$, *elle passe par les points de contact des* $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$ *tangentes doubles de la base, et, en outre, elle touche chacune de ces tangentes doubles en* $2(m-4)$ *points.* De là il suit que : *Une courbe quelconque* C^m *a, en général,* $m(m-2)(m-3)(m^2-m-4)$ *tangentes telles, que deux quelconques de leurs* $(m-2)$ *points d'intersection avec la courbe, soient c et d, sont également distants d'un troisième point d'intersection b, ou du point de contact* a_0, *ce dernier cas devant être compté pour deux combinaisons.*

Pour la base C^3, le lieu des points milieux T_0 de toutes les tangentes sera une courbe $T_0^{12}(=12)$, comme ci-dessus (Extrait II, § III, IV).

Pour la base C^4, le premier et le second lieu seront respectivement T_0^{48} et T^{40}, et l'on aura les propositions que voici :

(α^0). *Une courbe quelconque du quatrième degré a, en général, soixante-quatre tangentes telles, que l'un des deux points d'intersection b est le point milieu du segment compris entre l'autre point d'intersection c et le point de contact* a_0.

(β^0). *La même courbe doit avoir* $64:2=32$ *tangentes telles, que les deux points d'intersection b et c sont également distants du point de contact* a_0 *(comme* Extrait II, § IV). *Donc le lieu* T^{40} *a les quatre points* a_∞ *de la base* C^4 *pour points décuples, passe par les cinquante-six points de contact de ses vingt-huit tangentes doubles, et la touche aux trente-deux points* P^0 *spécifiés ci-dessus* (Extrait II, § IV).

Si $m>4$, la base C^m est touchée par la courbe-lieu des T en x points et coupée en y points (outre les points spécifiés dans le théorème β), x et y étant liés entre eux par la relation suivante :

$$2x + y = m(m-2)(m-3)(m^2 - m - 4).$$

Il s'agirait de déterminer ces deux nombres x et y [*].

VII. Pour la base donnée C^m il existe aussi des transversales particulières telles, que le centre de gravité A de leurs m points d'intersection (§ I) coïncide avec un de leurs $\frac{1}{2}m(m-1)$ points milieux Q. Désignons chaque transversale qui jouit de cette propriété par S_a, et son centre de gravité par Q_a; le lieu de la transversale et celui de son centre de gravité seront respectivement

$$S_a^{\frac{1}{2}m(m-1)^2} \quad \text{et} \quad Q_a^{\frac{1}{2}m(m+1)(m-2)};$$

c'est-à-dire : *Pour une courbe quelconque C^m le lieu de la transversale S_a dont le centre de gravité Q_a est le point milieu d'un segment compris entre deux de ses points d'intersection, est une courbe de la $\frac{1}{2}m(m-1)(m-1)^e$ classe, et le lieu de ce centre de gravité est une courbe du $\frac{1}{2}m(m+1)(m-2)^e$ degré.*

Pour la base C^3, les deux courbes seront respectivement S_a^6 et Q_a^6; la première est identique avec la courbe S_1^6, discutée ci-dessus (Extrait II, § III, II); la seconde représente la base C^3 prise deux fois, chaque point de C^3 étant en effet le point milieu ($= Q_a$) de deux cordes S_1 (Extrait II, § III).

Pour la base C^4, les deux courbes sont respectivement S_a^{18} et Q_a^{20}; mais chacune de ces courbes est double, attendu qu'ici chaque transversale S_a est une corde double S_2 et que par conséquent deux points milieux Q sont réunis au centre de gravité Q_a; conséquemment, les deux lieux simples sont seulement S_a^9 et Q_a^{10}, comme nous les connaissons déjà d'après Extrait II, § IV. Pour $m > 4$, cette réductibilité des courbes en question cesse d'avoir lieu.

Pour la base C^5, on a S_a^{40} et Q_a^{45}. La base a, en commun avec la première de ces deux courbes, huit cents tangentes $S_a^0 (= S_a)$, et, avec la seconde, deux cent vingt-cinq points $Q_a^0 (= Q_a)$. En supposant que Q_a soit le point milieu des deux points d'intersection a et b, il sera en même temps le centre de gravité des trois autres points d'intersection c, d et e; et si l'on désigne le point de contact de chaque tangente S_a^0 avec C^5 par B_0, les différentes combinaisons suivantes pourront avoir lieu :

---

[*] N'aurait-on pas

$$y = (m-4)x,$$

ainsi que le semble exiger une certaine raison de probabilité? En ce cas, il s'ensuivrait

$$x = m(m-3)(m^2 - m - 4) \quad \text{et} \quad y = m(m-3)(m-4)(m^2 - m - 4),$$

et la base C^m aurait $m(m-3)(m^2-m-4)$ tangentes telles, que deux de leurs points d'intersection, c et d, fussent également distants du point de contact a_0, et $m(m-3)(m-4)(m^2-m-4)$ tangentes telles, qu'un de leurs points d'intersection, b, fût le point milieu du segment compris entre deux autres points d'intersection c et d.

A. Relativement aux huit cents tangentes S_a^0, il y a trois cas possibles :

(α). c et d (ou ce, ou de) sont réunis au point B_0; ou

(β). a et e (ou ac, ad, bc, bd, be) sont réunis au point B_0; ou

(γ). a et b sont réunis au point B_0, et conséquemment Q_a^0 coïncide également avec B_0.

B. Relativement aux deux cent vingt-cinq points Q_a^0, deux cas sont possibles, ou bien :

(δ). Q_a^0 se trouve en e (ou c, d) et est non-seulement le point milieu de ab, mais aussi celui de cd, de sorte que la transversale correspondante S_a sera une corde double S_2; ou bien :

(ε). Q_a^0 coïncide avec les points a et b réunis, et conséquemment aussi avec B_0, comme au cas (γ), de sorte que la transversale correspondante S_a sera S_a^0, c'est-à-dire touchera la base C^5 en $(ab) = Q_a^0$.

On pose ici la question : *Combien de fois chacun de ces cas se présentera-t-il?* et notamment : *Parmi les deux cent vingt-cinq points* Q_a^0, *combien en appartient-il au cas* δ, *et combien au cas* ε? On peut poser des questions analogues relativement à la base générale C^m.

§ III.

Au moyen de la projection, les théorèmes du paragraphe précédent se transforment dans d'autres théorèmes, où les points milieux Q sont remplacés par certains points harmoniques N; à savoir, il sera donné, outre la base C^m, une droite G (en place de G_∞), et l'on prendra les quatrièmes points harmoniques N conjugués au point d'intersection R de la transversale S et de la droite G, par rapport à tous les couples de deux points qu'on peut former des m points d'intersection a, b, c, d,..., de S avec C^m.

Mais on peut déterminer encore de diverses autres manières des points harmoniques sur la transversale. Par exemple, on arrangera par groupes de trois les m points d'intersection a, b, c, d,..., de S avec C^m, et pour chaque groupe de trois points on déterminera les trois quatrièmes points harmoniques N, ce qui donne lieu en tout sur chaque transversale à $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ points N. Si ensuite on assujettit la transversale à des conditions convenables, on obtiendra des courbes nouvelles, et de nouvelles propriétés de la base C^m. Toutefois je dois me borner ici à indiquer sommairement quelques résultats parmi les moins difficiles.

I. On peut demander que des m points d'intersection a, b, c, d,..., quatre soient en rapport harmonique. Cette condition donne lieu au théorème suivant :

Le lieu de la transversale S *qui coupe une courbe donnée du* m^e *degré* C^m *en quatre points harmoniques est une courbe de la* $\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)^e$ *classe*,

$$S^{\frac{1}{4}m(m-1)(m-2)(m-3)},$$

qui touche la base en chacun de ses points d'inflexion avec $m - 3$ *de ses branches, et en outre (si* $m > 4$*) en beaucoup d'autres points.* Au moyen des quatre tangentes menées à la base par les quatre points d'intersection qui sont en rapport harmonique, on construit facilement le point de contact de chaque transversale S avec la courbe qui est le lieu de ces transversales. Problème : *Déterminer le degré de ce lieu.*

Conséquemment pour la base C^4, *le lieu de la droite* S *qui coupe* C^4 *en quatre points harmoniques abcd sera une courbe de sixième classe* S^6, *qui touche la base dans ses vingt-quatre points d'inflexion.*

Les $12.6 = 72$ tangentes communes aux deux courbes ne sont formées en conséquence que des vingt-quatre tangentes d'inflexion de la base, dont chacune est comptée trois fois. *La courbe* S^6 *est du trentième degré, conséquemment elle a en commun avec la base, outre les susdits vingt-quatre points de contact, soixante-douze autres points qui sont des points d'intersection* $a_0 (= a)$, *et sa tangente* S *en chacun de ces points* a_0 *coupe la base, outre en* a_0, *en trois points* b, c, d *(harmoniques par rapport à* a_0, *et) tels, que les tangentes correspondantes* B, C, D *se rencontrent en un même point* p. *Des courbes du dix-huitième degré peuvent passer par les soixante-douze points* a_0 *: quelle sera la position des soixante-douze points* p*?* Lorsque en particulier la base C^4 est formée de quatre droites A, B, C, D, la courbe S^6 se décompose dans les trois coniques harmoniques inscrites au quadrilatère ABCD. (Voyez *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques*, § XLIII.) On obtient pareillement des résultats particuliers si la base C^4 est composée de $C^2 + 2C^1$, ou de $C^2 + C^2_1$, ou de $C^3 + C^1$.

Pour la base C^5, *le lieu dont il s'agit sera* $= S^{30}$; *cette courbe touche la base en chacun de ses quarante-cinq points d'inflexion avec deux de ses branches, et la touche, en outre, en cent soixante-cinq autres points* a. Donc :

Une courbe quelconque du cinquième degré a, en général, cent soixante-cinq tangentes harmoniques telles, que le point de contact a *et les trois points d'intersection* b, c, d *sont quatre points en rapport harmonique.*

Pour la base C^m, on trouve de cette manière, outre les tangentes d'inflexion,

$$\tfrac{1}{4} m (m-2)(m-3)[m(m-1)^2 - 36]$$

tangentes telles, que parmi les $m - 1$ points formés par le point de contact a, et les $m - 2$ points d'intersection b, c, d,..., quatre sont en rapport harmonique; le cas où a serait un des quatre points harmoniques sera compté pour deux, de sorte que si l'on désigne par x le nombre des cas où a est un des quatre points harmoniques, et par y le nombre des cas où a n'en est pas, $2x + y$ sera égal au nombre qu'on vient de proposer. La base sera touchée par le lieu dont il s'agit, aux x points a. *Déterminer les nombres* x *et* y.

II. Si la base donnée C^4 est touchée par une tangente S au point a, et coupée par cette tangente aux points b et c, et si l'on prend les trois quatrièmes points harmoniques par rapport aux trois points a, b, c, soient

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,$$

de sorte que

$$ab\alpha c,\quad abc\beta,\quad a\gamma bc$$

soient des systèmes harmoniques, alors :

Le lieu du point α sera une courbe du trente-deuxième degré qui a avec la base dans ses points d'inflexion des contacts du deuxième ordre et passe par les points de contact de ses tangentes doubles (*voir* la note de la page 328); et

Le lieu commun des deux points β et γ sera une courbe du soixante-quatrième degré, qui a avec la base en chacun de ses vingt-quatre points d'inflexion des contacts du deuxième ordre sur deux branches, et en chacun des cinquante-six points de contact de ses vingt-huit tangentes doubles un contact du premier ordre.

De là il suit que :

La courbe du quatrième degré C^4 a, en général, soixante-quatre tangentes telles, que l'un des deux points d'intersection b est le point milieu du segment compris entre l'autre point d'intersection c et le point de contact a (comme dans le paragraphe précédent, VI, *1°), et que ces tangentes particulières sont parallèles aux asymptotes de ladite courbe du soixante-quatrième degré.*

Si la base donnée C^5 est touchée par une tangente S au point a, et coupée par cette tangente aux points b, c, d, et si l'on détermine les trois points δ, γ, β, de telle sorte que

$$ab\delta c,\quad ab\gamma d,\quad ac\beta d$$

soient des systèmes harmoniques, alors :

Le lieu commun des trois points β, γ, δ sera une courbe du degré x, qui a avec la base en chacun de ses quarante-cinq points d'inflexion des contacts du deuxième ordre sur deux branches, qui coupe la base dans les $165.3 = 495$ *points d'intersection* (b, c, d) *des susdites cent soixante-cinq tangentes harmoniques* (I) *et dans les deux cent quarante points de contact de ces cent vingt tangentes doubles, et qui, en outre, a avec ces tangentes doubles des contacts doubles. Chaque tangente de la base sur laquelle deux des trois points d'intersection b, c, d sont également distants du point de contact a, est parallèle à une asymptote du lieu dont il s'agit. Déterminer le degré x.*

III. Quatre points quelconques situés sur une droite a, b, c, d déterminent trois systèmes différents de quatre points, suivant les trois manières dont on peut les conjuguer deux à deux, savoir :

1°. ab et cd; 2°. ad et bc; 3°. ac et bd.

J'ai appelé *points asymptotiques* les points qui sont harmoniques par rapport aux deux couples de chaque système; soient

$$x \text{ et } x_1,\quad y \text{ et } y_1,\quad z \text{ et } z_1.$$

de sorte que

$$a\,x\,b\,x_1 \quad \text{et} \quad c\,x\,d\,x_1, \quad a\,y\,d\,y_1 \quad \text{et} \quad b\,y\,c\,y_1, \quad a\,z\,c\,z_1 \quad \text{et} \quad b\,z\,d\,z_1$$

sont des systèmes harmoniques (*voir* Extrait II, § IV). J'ai appelé *hyperboliques* les deux premiers systèmes où les points asymptotiques sont réels, et *elliptique* le troisième où ils sont imaginaires.

Si l'on arrange par groupes de quatre les m points $a, b, c, d, \ldots$ que la base donnée C^m a en commun avec une transversale quelconque S, et si l'on détermine pour chaque groupe les trois couples de points asymptotiques

$$x \text{ et } x_1, \quad y \text{ et } y_1, \quad z \text{ et } z_1,$$

ou aura en tout

$$\tfrac{1}{8} m(m-1)(m-2)(m-3) = \mu \text{ couples},$$

ou

$$\tfrac{1}{4} m(m-1)(m-2)(m-3) = 2\mu \text{ points asymptotiques individuels};$$

chacun desquels soit désigné par X.

Si l'on fait pivoter la transversale S *autour d'un pôle* P *pris sur elle à volonté, les* 2μ *points* X *décriront conjointement une courbe du* $3\mu^{\text{ième}}$ *degré,*

$$X^{\frac{3}{8} m(m-1)(m-2)(m-3)},$$

qui a le pôle P *pour point* μ^{uple}*, etc.*

Il peut exister des transversales particulières $S_x (= S)$, telles qu'un point asymptotique coïncide avec un des m points d'intersection ; par exemple, x pourra coïncider avec le point d'intersection e, de sorte que $aebx_1$ et $cedx_1$ soient des systèmes harmoniques, et que le système de quatre points déterminé par les deux couples ab et cd ait le point d'intersection e pour point asymptotique, ou que ces cinq points d'intersection soient en involution.

Le lieu de la transversale S_x *pour laquelle un des points asymptotiques* X *se trouve sur la base* C^m, *ou parmi les m points d'intersection de laquelle il y en a cinq qui sont en involution, est une courbe*

$$S_x^{\frac{3}{4} m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}.$$

Relativement à toutes ces transversales S_x dont un point asymptotique x coïncide avec un point d'intersection e (mais non pas avec un point de contact) de la base, on peut poser la question : *Quel sera le lieu du point asymptotique* x_1 *conjugué au point* $x (= e)$? Ce lieu sera une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré X_1^n ; ses intersections avec la base détermineront les transversales *individuelles* S_{xx_1} qui ont sur la base un couple de points asymptotiques conjugués x et x_1. La résolution de ce problème sera facilitée par la résolution préalable du problème suivant :

Déterminer le lieu de tous les quatrièmes points harmoniques α *conjugués sur chaque tangente* S *de la base* C^m *au point de contact a par rapport à tous les couples de deux points qu'on peut former des m* — 2 *points d'intersection b, c, d,....*

Note. J'observerai encore que je n'ai pas suffisamment démontré quelques-uns des théorèmes proposés dans ce Mémoire, de sorte qu'ils peuvent contenir des assertions erronées. Si cela était le cas, j'espère que la nouveauté et la difficulté des matières traitées me serviront d'excuse, eu égard surtout à la méthode synthétique que j'ai suivie. Notamment dans les trois derniers paragraphes, je me suis permis quelques conclusions hasardées, par exemple, pour obtenir le théorème (V, *d* du § II, Extrait III). Si ce théorème n'est pas généralement vrai, quelques-uns des théorèmes qui le précèdent ne seront pas non plus exacts dans toutes leurs parties.

IV.

ADDITION.

1. Nous avons observé ci-dessus (Extrait II, § III, II, note de la page 12) que les deux polaires A^2 et I^2 d'un même pôle P par rapport à la base donnée C^3 peuvent être des sections coniques de toute espèce selon la position du pôle relativement à la section conique E^2 spécifiée à l'endroit cité. En effet, ces sections coniques peuvent non-seulement être des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, mais elles peuvent aussi prendre toutes les formes possibles de ces différentes espèces de sections coniques. Voici un examen plus détaillé de ces formes.

a) *Pour que les polaires* A^2 *et* I^2 *puissent être des paraboles, il faut que le pôle* P *soit sur la courbe* E^2. (*b*) *Pour que* A^2 *et* I^2 *soient des hyperboles équilatères, il faut que le pôle soit sur une droite déterminée* H. (*c*) *Pour que* A^2 *et* I^2 *soient des cercles, il n'y a qu'un seul pôle* $P_0 (= P)$ *qui satisfasse, lequel sera en même temps le pôle de la droite* H *relativement à la section conique* E^2. (*d*) *Pour que* A^2 *et* I^2 *soient semblables à une section conique donnée quelconque* C^2, *il faut que le pôle* P *soit sur une conique* P^2 *qui a avec la conique* E^2 *un double contact (imaginaire), la droite* H *étant la corde de contact (idéale). Donc, si l'on donne à la section conique* C^2 *successivement toutes les formes différentes possibles, on obtiendra une série de lieux géométriques* P^2 *du pôle* P, *ou plutôt un faisceau* $B(P^2)$ *de coniques qui se touchent toutes aux mêmes deux points, qui ont la droite* H *pour corde de contact, et qui ont cette droite* H *et le pôle* P_0 *pour pôle et polaire. A ce faisceau appartiendront aussi, en particulier, la courbe* E^2, *la droite* H *et le pôle* P_0, *savoir* E^2 *comme correspondant à la transition des polaires* A^2 *et* I^2 *de l'hyperbole à l'ellipse, et* H *et* P_0 *comme déterminant respectivement la limite des hyperboles et des ellipses.*

Si la courbe donnée C^3 a trois asymptotes réelles A, B, C, on déterminera la droite H et le pôle P_0 comme il suit : Soient α, β, γ les pieds des perpendiculaires abaissées des trois sommets *a*, *b*, *c* du triangle ABC sur les côtés opposés A, B, C; les intersections des trois couples de droites $\alpha\beta$ et C, $\alpha\gamma$ et B, $\beta\gamma$ et A se trouveront sur la droite demandée H, ou bien cette droite sera aussi la ligne des puissances égales [*] des deux

[*] C'est le terme adopté par M. Steiner pour désigner l'axe radical.

cercles circonscrits aux triangles abc et $\alpha\beta\gamma$. Et si par les sommets du triangle abc on mène des tangentes au cercle circonscrit à ce triangle qui formeront un second triangle $a_1 b_1 c_1$, les trois droites aa_1, bb_1, cc_1 se rencontreront dans le pôle demandé P_0. Si, en particulier, le triangle des asymptotes ABC $= abc$ est *équilatéral*, donc si E^2 est le cercle inscrit à ce triangle, toutes les courbes du faisceau B (P^2) seront des cercles concentriques au cercle E^2 et ayant P_0 pour centre commun, tandis que la droite H sera G_∞.

Donc : *Dans une courbe du troisième degré dont les asymptotes forment un triangle équilatéral abc, les points de contact de chaque groupe de six tangentes parallèles se trouvent sur une hyperbole équilatère. Si d'un point du cercle circonscrit au triangle abc, on mène six tangentes à la courbe, les points de contact seront sur une hyperbole dont l'angle des asymptotes est égal à* 60 *degrés; et si, du centre* P_0 *de ce cercle, on mène les six tangentes à la courbe, les points de contact seront sur un cercle.*

Quel doit être le triangle des asymptotes abc pour que le pôle P_0 soit un foyer de la conique E^2 (et, par conséquent, de toutes les coniques P^2)?

Pour toutes les courbes du troisième degré ayant avec la courbe donnée les asymptotes communes (soit réelles, soit imaginaires), les courbes du faisceau B (P^2) resteront les mêmes. Cette propriété donne lieu à des conséquences ultérieures si l'on considère des formes particulières de courbes du troisième degré.

2. *Toutes les courbes du troisième degré qui passent par les sept points suivants d'un triangle donné, savoir :* 1° *le centre de gravité;* 2° *les sommets;* 3° *les points situés à l'infini sur les trois côtés, ont les triangles des asymptotes égaux et semblables entre eux, et semblables et semblablement placés au triangle donné, les côtés homologues étant dans le rapport de* 2 : 3.

Il existe un théorème analogue pour le polygone formé de m droites et les courbes du $m^{ième}$ degré. Par exemple, dans le quadrilatère complet, les courbes du quatrième degré devront passer par treize points donnés, savoir par les six sommets, par les points situés à l'infini sur les quatre côtés, et par trois points p déterminés de la manière suivante : En considérant les quatre côtés comme formant ensemble une base du quatrième degré $C^4 = 4C^1$, la courbe P^{10} (Extrait II, § IV) se décompose en trois sections coniques P^2 et les quatre droites données; ces trois coniques passeront chacune par un des trois couples de sommets du quadrilatère, et se couperont deux à deux dans les points milieux des trois diagonales. Les trois points où se rencontrent, en outre, deux quelconques des trois coniques et par lesquels passe nécessairement aussi la troisième conique, sont les points p dont il s'agit, et représentent dans ce cas particulier, avec les six sommets du quadrilatère, les neuf pôles P_3 (Extrait II, § IV).