

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

QUET

**Des mouvements relatifs en général, et spécialement des
mouvements relatifs sur la terre**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 18 (1853), p. 213-298.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18_213_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

*Des mouvements relatifs en général, et spécialement des
mouvements relatifs sur la Terre;*

PAR M. QUET,

Professeur de Physique au Lycée Saint-Louis.

La déviation orientale qu'éprouvent les corps dans leur chute libre, le déplacement continu du vertical dans lequel oscille le pendule abandonné à lui-même, les diverses évolutions qu'effectuent les corps tournants dans le gyroscope de M. Foucault, sont les principaux phénomènes par lesquels on rend sensible aux yeux et d'une manière purement expérimentale le mouvement de la Terre autour de son axe. Les problèmes de Mécanique auxquels donnent lieu ces divers phénomènes, généralement tous ceux qui concernent les mouvements relatifs terrestres, ou même les mouvements qu'on rapporte à trois axes mobiles quelconques, peuvent être analysés par une méthode uniforme de calcul. Je me propose d'exposer d'abord cette méthode et de l'appliquer ensuite à divers cas particuliers.

PREMIÈRE SECTION.

Méthode générale pour former les équations différentielles des mouvements relatifs, lorsqu'on rapporte ces mouvements à trois axes rectangulaires qui se déplacent suivant une loi quelconque.

§ 1^{er}.

Preliminaires.

Je considère trois axes rectangulaires $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$, et je désigne par ξ , η , ζ , m_x , m_y , m_z , $\partial\xi$, $\partial\eta$, $\partial\zeta$ les coordonnées d'un point mobile m , les projections sur les axes fixes de la résultante des forces

appliquées à ce point et celles d'un déplacement virtuel donné au mobile. On a, par les principes généraux de la Dynamique,

$$(1) \quad \sum m \left(\frac{d^2\xi}{dt^2} \delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2} \delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2} \delta\zeta \right) = \sum m (x \delta\xi + y \delta\eta + z \delta\zeta),$$

la somme \sum s'étendant à tous les points matériels du système que l'on considère.

ox, oy, oz sont trois axes rectangulaires mobiles; $a, a', a''; b, b', b''; c, c', c''$ sont les cosinus des angles que ces axes font respectivement avec chacun des axes fixes $c\xi, c\eta, c\zeta$.

Je pose

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = a \frac{d^2\xi}{dt^2} + b \frac{d^2\eta}{dt^2} + c \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \\ v = a' \frac{d^2\xi}{dt^2} + b' \frac{d^2\eta}{dt^2} + c' \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \\ w = a'' \frac{d^2\xi}{dt^2} + b'' \frac{d^2\eta}{dt^2} + c'' \frac{d^2\zeta}{dt^2}, \\ X = a x + b y + c z, \\ Y = a' x + b' y + c' z, \\ Z = a'' x + b'' y + c'' z, \\ \delta x = a \delta\xi + b \delta\eta + c \delta\zeta, \\ \delta y = a' \delta\xi + b' \delta\eta + c' \delta\zeta, \\ \delta z = a'' \delta\xi + b'' \delta\eta + c'' \delta\zeta. \end{array} \right.$$

On voit par ces équations que $mX, mY, mZ, \delta x, \delta y, \delta z$, sont les projections sur les axes mobiles de la force appliquée au point m et du déplacement virtuel donné à ce point. Les quantités u, v, w sont les projections sur les mêmes axes des trois accélérations absolues $\frac{d^2\xi}{dt^2}, \frac{d^2\eta}{dt^2}, \frac{d^2\zeta}{dt^2}$; elles sont les projections sur les axes mobiles de l'accélération absolue du point m .

Au moyen des équations connues qui lient les neuf cosinus entre

eux, on tire des équations (2),

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = au + a'\nu + a''w,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = bu + b'\nu + b''w,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = cu + c'\nu + c''w,$$

$$x = aX + a'Y + a''Z,$$

$$y = bX + b'Y + b''Z,$$

$$z = cX + c'Y + c''Z,$$

$$\partial\xi = a\partial x + a'\partial y + a''\partial z,$$

$$\partial\eta = b\partial x + b'\partial y + b''\partial z,$$

$$\partial\zeta = c\partial x + c'\partial y + c''\partial z.$$

En portant ces valeurs dans la formule générale (1), on a

$$(3) \quad \sum m(u\partial x + \nu\partial y + w\partial z) = \sum m(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z).$$

Cette formule donnera les équations différentielles des mouvements relatifs lorsqu'on connaîtra les valeurs de u , ν , w en fonction de x , y , z ; il suffira de la traiter alors d'après les méthodes de la Mécanique analytique. Ainsi, tout le problème revient à déterminer l'accélération absolue en fonction des coordonnées de la position relative.

Lorsque le système mobile se réduit à un point matériel entièrement libre, la formule précédente donne immédiatement les trois équations suivantes :

$$(4) \quad u = X, \quad \nu = Y, \quad w = Z.$$

Les projections sur les axes mobiles de la force perdue par le point m dans l'instant dt étant $m(X - u)$, $m(Y - \nu)$, $m(Z - w)$, la formule (3) exprime que ces forces perdues se font équilibre; d'après cela, on voit qu'on peut conclure immédiatement la formule générale (3) du principe de d'Alembert, combiné avec le principe des vitesses virtuelles.

§ II.

Exprimer la vitesse absolue en fonction de la vitesse relative.

Par les règles de la transformation des coordonnées, on a

$$(5) \quad \begin{cases} \xi = \xi' + ax + a'y + a''z, \\ \eta = \eta' + bx + b'y + b''z, \\ \zeta = \zeta' + cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

On a désigné par ξ', η', ζ' les coordonnées de l'origine mobile rapportées aux axes $c\xi, c\eta, c\zeta$. On tire des équations (5) :

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi'}{dt} + \frac{a dx + a' dy + a'' dz}{dt} + \frac{x da + y da' + z da''}{dt}, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta'}{dt} + \frac{b dx + b' dy + b'' dz}{dt} + \frac{x db + y db' + z db''}{dt}, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta'}{dt} + \frac{c dx + c' dy + c'' dz}{dt} + \frac{x dc + y dc' + z dc''}{dt}. \end{cases}$$

Les premiers membres de ces équations sont respectivement égaux aux projections sur les axes fixes de la vitesse absolue du point m ; les dérivées de x, y, z qui entrent dans les seconds membres sont les projections sur les axes mobiles de la vitesse relative du point considéré. Ces équations donnent, par conséquent, la vitesse absolue en fonction de la vitesse relative. On peut leur faire subir une transformation utile; je pose, pour cela,

$$(7) \quad \begin{cases} U = \frac{a d\xi + b d\eta + c d\zeta}{dt}, \\ V = \frac{a' d\xi + b' d\eta + c' d\zeta}{dt}, \\ W = \frac{a'' d\xi + b'' d\eta + c'' d\zeta}{dt}, \\ U' = \frac{a d\xi' + b d\eta' + c d\zeta'}{dt}, \\ V' = \frac{a' d\xi' + b' d\eta' + c' d\zeta'}{dt}, \\ W' = \frac{a'' d\xi' + b'' d\eta' + c'' d\zeta'}{dt}. \end{cases}$$

Il est clair, par ces équations, que les quantités $U, V, W; U', V', W'$ sont respectivement les projections sur les axes mobiles des vitesses absolues du point m et de l'origine mobile o .

J'ajoute les équations (6), après les avoir multipliées respectivement par a, b, c , ou par a', b', c' , ou bien encore par a'', b'', c'' , et j'ai

$$(8) \quad \begin{cases} U = U' + \frac{dx}{dt} + y \frac{a da' + b db' + c dc'}{dt} + z \frac{a da'' + b db'' + c dc''}{dt}, \\ V = V' + \frac{dy}{dt} + x \frac{a' da + b' db + c' dc}{dt} + z \frac{a' da'' + b' db'' + c' dc''}{dt}, \\ W = W' + \frac{dz}{dt} + x \frac{a'' da + b'' db + c'' dc}{dt} + y \frac{a'' da' + b'' db' + c'' dc'}{dt}. \end{cases}$$

Les six fonctions de cosinus qui entrent dans ces équations ne sont pas distinctes et peuvent aisément se réduire à trois. Pour cela, je pose

$$9) \quad \begin{cases} p = \frac{a'' da' + b'' db' + c'' dc'}{dt}, \\ q = \frac{a da'' + b db'' + c dc''}{dt}, \\ r = \frac{a' da + b' db + c' dc}{dt}. \end{cases}$$

On peut écrire les équations (8) sous la forme suivante :

$$(10) \quad U = U' + U_1, \quad V = V' + V_1, \quad W = W' + W_1,$$

en désignant par U_1, V_1, W_1 les parties de U, V, W qui ne dépendent pas explicitement de la vitesse de l'origine mobile o . En ayant égard aux équations (9) et aux relations connues qui lient les neuf cosinus entre eux, on trouve aisément les expressions suivantes :

$$(11) \quad U_1 = \frac{dx}{dt} + qz - ry, \quad V_1 = \frac{dy}{dt} + rx - pz, \quad W_1 = \frac{dz}{dt} + dy - qx.$$

Les équations (10) et (11) donnent une deuxième solution du problème proposé.

J'ajoute les équations (10), après les avoir multipliées respectivement par a, a', a'' , ou par b, b', b'' , ou bien par c, c', c'' , et j'ai, en

ayant égard aux équations (7),

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \frac{d\xi'}{dt} + aU_1 + a'V_1 + a''W_1, \\ \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta'}{dt} + bU_1 + b'V_1 + b''W_1, \\ \frac{d\zeta}{dt} = \frac{d\zeta'}{dt} + cU_1 + c'V_1 + c''W_1. \end{cases}$$

Les équations (12) peuvent remplacer les équations (6); elles ont cet avantage, que leur forme est la même que celle des équations (5).

§ III.

Exprimer l'accélération absolue en fonction de l'accélération apparente.

Pour avoir les projections sur les axes fixes de l'accélération absolue du point m , c'est-à-dire les dérivées du second ordre de ξ , η , ζ , il suffit de prendre les dérivées des équations (12) en y considérant U_1 , V_1 , W_1 comme des fonctions déterminées par l'équation (11); on passera de là aux projections u , v , w sur les axes mobiles, de la même manière qu'on a obtenu U , V , W des équations (6). Mais il n'est pas nécessaire de refaire ces calculs, car les équations (12) ont la même forme que les équations (5), et, traitées de la même manière, elles doivent conduire à des résultats analogues. Si donc on désigne par u' , v' , w' les projections sur les axes mobiles de l'accélération de l'origine o , c'est-à-dire si l'on pose

$$(13) \quad \begin{cases} u' = \frac{a d^2 \xi' + b d^2 \eta' + c d^2 \zeta'}{dt^2}, \\ v' = \frac{a' d^2 \xi' + b' d^2 \eta' + c' d^2 \zeta'}{dt^2}, \\ w' = \frac{a'' d^2 \xi' + b'' d^2 \eta' + c'' d^2 \zeta'}{dt^2}, \end{cases}$$

on aura, d'après les équations (10) et (11),

$$(14) \quad \begin{cases} u = u' + \frac{dU_1}{dt} + qW_1 - rV_1, \\ v = v' + \frac{dV_1}{dt} + rU_1 - pW_1, \\ w = w' + \frac{dW_1}{dt} + pV_1 - qU_1. \end{cases}$$

En effectuant les calculs indiqués par ces équations et en désignant par u'' , v'' , w'' les parties de u , v , w qui ne contiennent pas les dérivées de x , y , z , c'est-à-dire en posant

$$(15) \quad \begin{cases} u'' = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} + q(py - qx) - r(rx - pz) + u', \\ v'' = x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt} + r(qz - ry) - p(py - qx) + v', \\ w'' = y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} + p(rx - pz) - q(qz - ry) + w', \end{cases}$$

les équations (14) donnent immédiatement

$$(16) \quad \begin{cases} u = \frac{d^2x}{dt^2} + 2 \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) + u'', \\ v = \frac{d^2y}{dt^2} + 2 \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right) + v'', \\ w = \frac{d^2z}{dt^2} + 2 \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) + w''. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs de u , v , w dans la formule (3), on aura la formule générale de dynamique pour tous les mouvements relatifs. Ainsi le problème que nous nous étions proposé se trouve maintenant résolu.

Si l'on considère un point M invariablement lié aux axes mobiles et dont la position par rapport à ces axes est définie par les coordonnées x , y , z , pour ce point les dérivées de x , y , z sont nulles, et l'on voit, par les équations (16), qu'alors u , v , w se réduisent à u'' , v'' , w'' ; d'où l'on conclut que les quantités u'' , v'' , w'' sont les projections sur les axes mobiles de l'accélération absolue qu'aurait le point m si, dans la position qu'il occupe à l'époque t , il se trouvait invariablement lié aux axes mobiles.

Les quantités p , q , r ont une signification connue et qu'on peut déduire facilement des équations (10) et (11); elles sont les composantes suivant les axes mobiles de la vitesse angulaire avec laquelle ces axes tournent autour de leur axe instantané relatif.

Enfin, nous remarquerons que l'accélération dont les projections

sur les axes mobiles sont

$$2 \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right), \quad 2 \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right), \quad 2 \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right),$$

est égale et directement opposée à ce que Coriolis a appelé *la force centrifuge composée*; il est facile de voir que cette accélération est, comme l'a démontré Coriolis, perpendiculaire à la vitesse apparente du point m , ainsi qu'à la direction de l'axe instantané du système ox , oy , oz , et qu'elle est égale au double produit de la vitesse angulaire instantanée de ce système par la projection de la vitesse apparente du point m sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané.

§ IV.

Application des formules générales aux mouvements relatifs terrestres, lorsqu'on rapporte ces mouvements à trois axes rectangulaires fixes sur la Terre et qu'on n'a égard qu'au mouvement diurne.

Si par le point o , qui est maintenant un point fixe de la Terre, on mène une parallèle à l'axe terrestre, on aura l'axe instantané de rotation autour duquel les axes fixes sur la Terre, savoir ox , oy , oz , tournent pendant qu'ils sont emportés par le mouvement diurne. La vitesse angulaire de cette rotation n'est autre chose que la vitesse angulaire de la Terre, et sera désignée par n . Si l'on porte la vitesse n sur la partie nord de cet axe instantané et qu'on la projette ensuite sur les axes ox , oy , oz , on aura les valeurs de p , q , r . Je prends arbitrairement l'axe oz , et je désigne par ω l'angle qu'il fait avec la partie sud de l'axe instantané; par le point o , je mène un plan perpendiculaire à oz et je projette sur ce plan la partie nord de l'axe instantané; c'est sur cette projection que je place l'axe ox , et je mets l'axe oy à gauche de ox . De cette manière, les angles que la partie nord de l'axe instantané fait avec ox , oy , oz sont

$$90 - \omega, \quad 0, \quad 180 - \omega,$$

et les composantes p , q , r sont respectivement

$$(17) \quad p = n \sin \omega, \quad q = 0, \quad r = -n \cos \omega;$$

d'ailleurs les dérivées de p , q , r sont nulles.

Le point o décrivant uniformément un cercle de rayon ρ avec la vitesse angulaire n , la force centrale pour ce point a pour expression $n^2\rho$ et est dirigé suivant le rayon ρ de la circonférence vers le centre. Si l'on désigne par $\lambda, \lambda', \lambda''$ les cosinus des angles constants que ce rayon fait avec les axes ox, oy, oz , les projections sur ces axes de la force centrale seront $n^2\rho\lambda, n^2\rho\lambda', n^2\rho\lambda''$, et, d'après la signification des lettres u', v', w' , on aura

$$(18) \quad u' = n^2\rho\lambda, \quad v' = n^2\rho\lambda', \quad w' = n^2\rho\lambda''.$$

Les valeurs de u'', v'', w'' données par l'équation (15) deviennent

$$(19) \quad \begin{cases} u'' = n^2\rho\lambda - n^2 \cos \omega (x \cos \omega + z \sin \omega), \\ v'' = n^2\rho\lambda' - n^2 y, \\ w'' = n^2\rho\lambda'' - n^2 \sin \omega (x \cos \omega + z \sin \omega). \end{cases}$$

Il est facile de voir que $-u'', -v'', -w''$ sont les projections sur ox, oy, oz de la force centrifuge qu'aurait le mobile m en vertu de la rotation de la Terre, si, dans la position qu'il occupe à l'époque t , il était invariablement lié à la Terre; en effet, dans ces conditions, l'accélération absolue du mobile m qui est donnée par les trois composantes u'', v'', w'' est égale et opposée à la force centrifuge de ce point.

Quant aux valeurs de u, v, w données par l'équation (16), elles deviennent

$$(20) \quad \begin{cases} u = \frac{d^2x}{dt^2} + 2n \cos \omega \frac{dy}{dt} + u'', \\ v = \frac{d^2y}{dt^2} - 2n \cos \omega \frac{dx}{dt} - 2n \sin \omega \frac{dz}{dt} + v'', \\ w = \frac{d^2z}{dt^2} + 2n \sin \omega \frac{dy}{dt} + w''. \end{cases}$$

D'après cela, les équations différentielles d'un problème quelconque sur les mouvements relatifs terrestres pourront être tirées de la formule générale (3) en y considérant u, v, w comme des fonctions déterminées par l'équation (20).

En général, pour définir la direction des axes mobiles ox, oy, oz par rapport aux axes fixes $c\xi, c\eta, c\zeta$, on peut employer trois angles e, f, ω convenablement choisis. ω est l'angle que oz fait avec $c\zeta$; il

peut varier entre 0 et 180° . Par le point o , je mène les lignes $o\xi$, $o\eta$ respectivement parallèles à $c\xi$, $c\eta$, et je désigne par oA la projection de oz sur le plan $\xi o\eta$. $e - 90^\circ$ est l'angle que oA fait avec $o\xi$; il peut varier entre $+\infty$ et $-\infty$; on le compte à partir de $o\xi$, et de droite à gauche lorsqu'il est positif. Je désigne par NON' l'intersection du plan xoy avec le plan $\xi o\eta$; cette ligne NN' est perpendiculaire à oA ; l'une de ses parties, celle que je désignerai par oN , sera déterminée par l'angle e décrit à partir de $o\xi$. C'est à partir de oN et dans le plan xoy que l'on compte l'angle f , en allant de droite à gauche lorsqu'il est positif. Cet angle détermine la direction de ox ; il peut varier entre $+\infty$ et $-\infty$; l'axe cy est supposé à gauche de ox ; il en est de même de $c\eta$ par rapport à $c\xi$.

Au moyen de ces angles et de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, on obtient les valeurs suivantes, qui sont connues :

$$\begin{aligned} a &= \cos f \cos e - \sin f \sin e \cos \omega, \\ a' &= -\sin f \cos e - \cos f \sin e \cos \omega, \\ a'' &= \sin e \sin \omega; \\ b &= \cos f \sin e + \sin f \cos e \cos \omega, \\ b' &= -\sin f \sin e + \cos f \cos e \cos \omega, \\ b'' &= -\cos e \sin \omega; \\ c &= \sin f \sin \omega, \\ c' &= \cos f \sin \omega, \\ c'' &= \cos \omega. \end{aligned}$$

De là on déduit pour p , q , r les expressions très-connues :

$$\begin{aligned} p &= \sin f \sin \omega \frac{de}{dt} + \cos f \frac{d\omega}{dt}, \\ q &= \cos f \sin \omega \frac{de}{dt} - \sin f \frac{d\omega}{dt}, \\ r &= \frac{df}{dt} + \cos \omega \frac{de}{dt}. \end{aligned}$$

Lorsqu'il s'agit des mouvements relatifs terrestres et qu'on suppose fixe l'axe de la Terre, on peut placer sur cet axe la droite $c\xi$ et la

diriger vers le ciel austral; alors le plan $\xi o \eta$ est perpendiculaire à l'axe terrestre.

Toute droite fixe sur la Terre et perpendiculaire à son axe tourne avec la même vitesse que la Terre en allant de gauche à droite, et décrit l'angle nt dans le temps t ; il en sera ainsi pour les droites oA , oN , qui sont invariablement liées à la Terre et parallèles à son équateur, lorsqu'on suppose que les axes mobiles cx , cy , cz sont fixes sur la Terre. L'angle e se rapporte à la ligne oN ; sa valeur est $e = e_0 - nt$ en désignant par e_0 sa valeur initiale. L'angle f est constant, puisque oN et ox sont fixes sur la Terre; d'ailleurs cet angle peut être arbitraire; je le prends égal à $-\frac{\pi}{2}$, ce qui fait coïncider oy avec oN et place l'axe ox parallèlement à la projection de l'axe terrestre sur le plan xoy . Alors

$$\cos f = 0, \quad \sin f = -1, \quad \frac{de}{dt} = -n;$$

d'ailleurs ω est constant, et donne

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

D'après ces valeurs, les expressions générales de p , q , r se réduisent à

$$p = n \sin \omega, \quad q = 0, \quad r = -n \cos \omega.$$

Ce sont les mêmes valeurs qui ont déjà été trouvées d'une autre manière.

DEUXIÈME SECTION.

Oscillations des pendules simples dans le vide lorsqu'on a égard au mouvement de rotation de la Terre.

§ 1^{er}.

Je rapporte le mouvement du pendule à trois axes rectangulaires ox , oy , oz fixes sur la Terre et dont l'origine est au point même de suspension. x , y , z , mX , mY , mZ , t , mN sont les coordonnées du

point matériel, les projections sur les axes de la force qui lui est appliquée, la longueur du fil, sa tension.

Si aux composantes mX , mY , mZ on adjoint une force égale et directement opposée à la tension du fil, c'est-à-dire si l'on suppose le pendule soumis à la force dont les composantes sont

$$m\left(X - \frac{Nx}{l}\right), \quad m\left(Y - \frac{Ny}{l}\right), \quad m\left(Z - \frac{Nz}{l}\right),$$

ou pourra considérer le point matériel comme entièrement libre, et l'on aura, par les équations (4),

$$u = X - \frac{Nx}{l}, \quad v = Y - \frac{Ny}{l}, \quad w = Z - \frac{Nz}{l},$$

u , v , w étant les projections sur ox , oy , oz de l'accélération absolue du mobile.

Si par le point o on mène une parallèle à l'axe terrestre et qu'on la projette sur le plan xoy , en plaçant l'axe ox sur cette projection, on aura pour u , v , w les expressions données par l'équation (20), et, au moyen d'elles, on pourra écrire ainsi les équations précédentes :

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Nx}{l} = X - u'' - 2k \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ny}{l} = Y - v'' + 2k \frac{dx}{dt} + 2k' \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Nz}{l} = Z - w'' - 2k' \frac{dy}{dt}. \end{cases}$$

On a posé, pour plus de simplicité,

$$k = n \cos \omega, \quad k' = n \sin \omega.$$

Ces mêmes équations peuvent se déduire facilement de la formule fondamentale (3) par les procédés ordinaires de la Mécanique analytique.

Les quantités $-u''$, $-v''$, $-w''$ qui entrent dans l'équation (21) sont, comme on l'a déjà vu, les projections sur les axes de la force centrifuge terrestre pour le lieu défini par les coordonnées x , y , z ; par conséquent, $X - u''$, $Y - v''$, $Z - w''$ sont les composantes de la

pesanteur pour ce lieu, si l'on admet que l'attraction terrestre est la seule force appliquée au pendule.

L'axe oz étant arbitraire, je le place sur la direction d'équilibre du pendule; alors les équations (21) montrent que, dans l'état d'équilibre, les deux composantes de la pesanteur $X - u''$, $Y - v''$ sont nulles, c'est-à-dire que la pesanteur dans le lieu où le point matériel est en équilibre, est dirigée suivant le prolongement du fil à plomb. Je désigne par g l'intensité de la pesanteur dans ce lieu, et je suppose que la pesanteur reste constante dans toutes les positions que prend le pendule dans l'état de mouvement. Dans cette hypothèse, qui est admissible même pour les plus grands écarts des pendules soumis à l'observation, $X - u''$, $Y - v''$ sont nuls, $Z - w''$ est égal à g , et les équations précédentes se réduisent à

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Nx}{l} = -2k \frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ny}{l} = 2k \frac{dx}{ds} + 2k' \frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Nz}{l} = g - 2k' \frac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Maintenant l'angle ω qui entre dans k et k' désigne le complément de la latitude pour le lieu dans lequel le pendule est en équilibre; γ étant cette latitude, on aura donc

$$k = n \sin \gamma, \quad k' = n \cos \gamma.$$

Les équations (22) ne sont autre chose que celles que Poisson a données dans son Mémoire sur les projectiles.

Si l'on a égard aux valeurs de u'' , v'' , w'' données par l'équation (19), on voit que la différence entre les équations approximatives (22) et les équations rigoureuses (20) consiste en ce que dans l'équation (22) on néglige divers termes qui ont pour facteurs les produits de la fraction excessivement petite n^2 par les lignes x , y , $l - z$.

D'après les équations (21) ou (22), on voit qu'on peut former les équations du mouvement relatif du pendule, comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu, pourvu que, d'une part, on remplace la direction et la grandeur de l'attraction terrestre par celles de la pesanteur,

et que, d'une autre part, on introduise une force complémentaire dont les composantes sont

$$- 2n \cos \omega \frac{dy}{dt}, \quad 2n \cos \omega \frac{dx}{dt} + 2n \sin \omega \frac{dz}{dt}, \quad - 2n \sin \omega \frac{dy}{dt}.$$

Ces composantes montrent facilement que la force complémentaire est perpendiculaire à la vitesse apparente du mobile et à l'axe terrestre; elles font voir aussi que la grandeur de cette force est égale à

$$2n \frac{ds}{dt} \sin \varepsilon,$$

en désignant par ε l'angle que la vitesse apparente $\frac{ds}{dt}$ fait avec l'axe du monde.

Si l'on joint aux équations (22) l'équation

$$(23) \quad x^2 + y^2 + z^2 = l^2,$$

on a quatre relations entre quatre fonctions du temps, x, y, z, N , ce qui suffit pour déterminer ces fonctions. On peut facilement éliminer N entre les équations (22) et obtenir deux équations qui ne contiennent que les fonctions x, y, z , et qui, jointes à l'équation (23), suffisent pour déterminer ces dernières fonctions. On élimine N en formant l'équation des forces vives et celle des aires sur le plan horizontal.

J'ajoute les équations (23) après les avoir multipliées respectivement par $2 dx, 2 dy, 2 dz$, ou bien par $y, -x$ et 0; j'ai ainsi

$$(24) \quad d \left(\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \right) = 2g dz,$$

$$(25) \quad d \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = -k d(x^2 + y^2) - 2k' x dz.$$

On voit que la force complémentaire a disparu dans l'équation (24) des forces vives, ce qui tient à sa direction.

Au lieu d'employer dans les équations (23), (24), (25) les coordonnées rectilignes, il peut être utile de faire usage de coordonnées polaires; aussi nous allons maintenant les transformer sous ce point de vue.

Je désigne par ψ l'angle que le vertical du pendule fait avec le méridien zox , et je compte cet angle à partir du méridien en allant du nord au sud par l'est. ψ est aussi l'angle que la projection horizontale du pendule fait avec la ligne du nord ox . Je désigne par θ l'angle que le pendule fait avec la verticale oz .

Les trois coordonnées polaires du point matériel du pendule sont l, θ, ψ ; la première est constante; la deuxième est toujours positive et peut varier entre 0 et 180°; la troisième peut être positive ou négative et varier entre $+\infty$ et $-\infty$.

Dans ces conditions, on a

$$x = l \sin \theta \cos \psi, \quad y = l \sin \theta \sin \psi, \quad z = l \cos \theta.$$

De là on déduit les formules suivantes, qui sont, au reste, connues :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = l^2 \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \right),$$

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -l \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Par le moyen de cette transformation, les équations (24), (25) deviennent

$$(26) \quad d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l} \cos \theta \right) = 0,$$

$$(27) \quad d \left[\sin^2 \theta \frac{d(\psi - kt)}{dt} \right] = -2k' \cos \psi \sin^2 \theta d\theta.$$

Les équations (26), (27) ont le même degré de généralité que les équations (22); elles s'appliquent aux oscillations des pendules de toute longueur et de toute amplitude, pourvu que ces amplitudes ne dépassent pas les limites dans lesquelles on peut regarder la pesanteur comme une force constante. Ces équations ne diffèrent des équations tout à fait rigoureuses qu'on aurait pu tirer de l'équation (21), que par la suppression de termes dont la petitesse est de même ordre que la fraction n^2 .

Je pose

$$\varphi = \psi - kt,$$

et j'ai

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2k \frac{d\varphi}{dt} + k^2.$$

Je porte cette valeur dans l'équation (26), et j'ai

$$d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l} \cos \theta \right) = - 2k d \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} - k^2 d \sin^2 \theta.$$

Cette équation se réduit, au moyen de l'équation (27), à

$$\begin{aligned} & d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l} \cos \theta \right) \\ &= 4kk' \cos(\varphi + kt) \sin^2 \theta d\theta - k^2 d \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Or

$$kk' = n^2 \sin \gamma \cos \gamma;$$

donc les deux termes du second membre de cette équation ne contiennent, après avoir été divisés par dt , que des facteurs dont la valeur ne dépasse pas des limites fort restreintes, et, en outre, le facteur n^2 ; le second membre est donc du degré de petitesse qu'il est permis de négliger, et l'on peut le réduire à zéro. Alors les équations du mouvement du pendule se présentent sous cette forme :

$$(28) \quad \begin{cases} d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l} \cos \theta \right) = 0, \\ d \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = - 2k' \cos(\varphi + kt) \sin^2 \theta d\theta, \\ \psi = \varphi + kt. \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, on négligera, dans une première approximation, la fonction $2k' \cos(\varphi + kt) \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$, qui est très-petite, et, dans une seconde approximation, par l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires, on examinera son influence.

Lorsqu'on n'a pas égard à la fonction perturbatrice, les équations

du mouvement du pendule se réduisent à

$$(29) \quad d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l} \cos \theta\right) = 0,$$

$$(30) \quad d \cdot \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$(31) \quad \psi = \varphi + kt.$$

C'est sous cette forme que je les considérerai d'abord. Les équations (29), (30) ne contiennent pas explicitement la vitesse n ; elles restent les mêmes soit pour le vrai pendule, soit pour le pendule tel qu'on le considère ordinairement dans les Traités de Mécanique; c'est là un avantage qui permet d'étudier avec facilité les lois du vrai pendule en les comparant aux lois bien connues des pendules ordinaires.

Je fais d'abord abstraction du mouvement de rotation de la Terre. et je suppose un pendule de longueur l suspendu au point o et soumis à une force constante, égale à g et parallèle à la direction d'équilibre du vrai pendule; le mouvement de ce pendule est donné par les équations (29), (30). Lagrange a appris à intégrer ces équations; je représente leurs intégrales par

$$(32) \quad \theta = f(t, a, b, c, d),$$

$$(33) \quad \varphi = F(t, a, b, c, d),$$

a, b, c, d étant quatre constantes arbitraires qui peuvent être déterminées par les conditions initiales; l'équation (32) donne à chaque époque l'écart angulaire du pendule par rapport à la ligne d'équilibre, et l'équation (33) donne son azimut compté à partir du nord.

Lorsque l'on considère le vrai pendule, il faut prendre les trois équations (29), (30), (31), et l'on a pour leurs intégrales générales

$$(34) \quad \theta = f(t, a, b, c, d),$$

$$(35) \quad \psi = kt + F(t, a, b, c, d).$$

Supposons maintenant qu'on donne aux constantes arbitraires les mêmes valeurs dans les deux systèmes d'équations (32), (33) et (34), (35), et désignons, pour abrégé, par pendule de comparaison le

pendule qui est alors représenté par les équations (32), (33); par la comparaison des deux systèmes d'équations, on arrive immédiatement aux conclusions suivantes.

Le vrai pendule et le pendule de comparaison partent en même temps de la même position initiale; à toute époque du mouvement, ils sont constamment à la même distance angulaire de la verticale, par conséquent, ils ont les mêmes maxima et minima d'amplitude et les atteignent simultanément. Les azimuts des deux pendules qui sont les mêmes à l'origine du temps se séparent immédiatement après; à une époque quelconque t , on passe du pendule de comparaison au vrai pendule en faisant tourner l'azimut du pendule de comparaison d'un angle égal à kt , rotation qui doit se faire dans le même sens que le mouvement apparent du Soleil, puisque kt est positif lorsque t est positif: la distance angulaire des deux verticaux est donc égale à kt , et elle croît uniformément avec la vitesse $k = n \sin \gamma$.

Si, par suite des conditions initiales, le vertical du pendule de comparaison reste invariable, les sommets de la spirale sphérique décrite par le vrai pendule s'écartent, d'après ce qu'on vient de dire, de ce vertical primitif, en allant dans le sens du mouvement apparent du Soleil et avec une vitesse angulaire qui, rapportée à la verticale, est égale à $n \sin \gamma$.

Les considérations générales qui précèdent peuvent aussi être présentées sous la forme suivante. Je suppose que l'on ait décrit sur la sphère des pendules la spirale que doit parcourir le pendule de comparaison en vertu des données initiales, et qu'à partir de l'origine du temps on fasse tourner la sphère des pendules autour de son diamètre vertical avec la vitesse angulaire constante $k = n \sin \gamma$, le mouvement de la sphère s'exécutant dans le sens du mouvement apparent du Soleil; le vrai pendule restera constamment, pendant ses oscillations, sur cette spirale sphérique tournante.

Les oscillations infiniment petites des pendules ne sont qu'un cas particulier des mouvements généraux que nous venons d'examiner. C'est à propos d'un curieux Mémoire de Mairan sur les pendules, que Clairaut forma pour la première fois les équations différentielles du mouvement des pendules ordinaires considérés dans les conditions les plus générales: en examinant ce que devient la spirale décrite

par la projection horizontale du pendule, lorsque l'amplitude des oscillations décroît, il fut très-surpris de voir que cette spirale dégénère en une ellipse centrée sur la position d'équilibre du pendule et ayant des axes de grandeur et de direction invariables pour des conditions initiales données.

Puisque la projection horizontale de la spirale sphérique décrite par le pendule de comparaison est une ellipse fixe de position, si l'on fait tourner cette ellipse d'un mouvement de rotation commun avec celui que nous avons donné à la sphère des pendules, il est clair que la projection horizontale du vrai pendule devra se trouver constamment sur cette ellipse mobile; c'est en cela que consiste l'élégant théorème de M. Binet.

Je considère le vrai pendule dans une position quelconque définie par les coordonnées polaires θ , ψ , et je décompose sa vitesse suivant la tangente à l'arc $l\theta$ et suivant la normale au vertical dont l'azimut est ψ . En désignant par v et u ces deux composantes, j'ai

$$(36) \quad v = l \frac{d\theta}{dt},$$

$$(37) \quad u = l \sin \theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Pour la même époque, les composantes analogues de la vitesse que possède le pendule de comparaison étant désignées par v' et w , on aura

$$(38) \quad v' = l \frac{d\theta}{dt} = v,$$

$$(39) \quad w = l \sin \theta \frac{d\psi}{dt} = u - kl \sin \theta.$$

On voit par là que le vrai pendule et le pendule de comparaison, qui partent en même temps de la même position avec la même vitesse mesurée suivant l'arc d'écart primitif, n'ont pas cependant la même vitesse initiale, puisque la composante de cette vitesse mesurée perpendiculairement au vertical primitif étant désignée par u_0 pour le vrai pendule, est $w_0 = u_0 - kl \sin \theta_0$ pour le pendule de comparaison. Cette différence $-kl \sin \theta_0$ dans les deux composantes sera négli-

geable lorsque les oscillations auront assez peu d'étendue pour qu'on puisse regarder le produit $k \sin \theta_0$ comme étant du même ordre de petitesse que la fraction n^2 ; on verra, au reste, que, généralement, l'influence de la quantité $-kl \sin \theta_0$ est peu sensible.

Pour intégrer les équations (29), (30), (31), il n'y a qu'à suivre la méthode développée dans la *Mécanique analytique*; on a ainsi

$$(40) \quad \begin{cases} \cos \theta = \cos \alpha \cos^2 \sigma + \cos \beta \sin^2 \sigma, \\ t = c + A_0 \sigma + \sum_1^{\infty} A_i \sin 2ix, \\ \psi = d + kt \pm B_0 \sigma \pm \sum_1^{\infty} B_i \sin 2ix. \end{cases}$$

c, d sont deux constantes arbitraires;

α, β sont les écarts maximum et minimum du pendule par rapport à la verticale; on les détermine par l'équation du troisième degré en $\cos \theta$,

$$(41) \quad \left(\frac{v_0^2 + w_0^2}{2gl} - \cos \theta_0 + \cos \theta \right) \sin^2 \theta + \frac{w_0^2 \sin^2 \theta_0}{2gl} = 0;$$

σ est une variable auxiliaire;

A_0, A_i, B_0, B_i sont des fonctions de α, β qu'on trouve dans la *Mécanique analytique*;

i est un nombre entier quelconque.

Le signe $+$ ou le signe $-$ dans la valeur de ψ sont choisis suivant que w_0 est positif ou négatif.

Si l'on désigne par T la durée commune à toutes les oscillations ascendantes ou descendantes, et par Ψ l'angle dont le vertical du pendule tourne pendant une quelconque de ces oscillations, on a, d'après les équations précédentes,

$$T = \frac{\pi}{2} A_0, \quad \Psi = kT \pm \frac{\pi}{2} B_0.$$

Si l'on développe A_0, B_0 en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de α, β , on trouve, lorsque β n'est pas nul et qu'on se borne aux termes d'un ordre inférieur aux quatrièmes puissances de

ces quantités,

$$(42) \quad \begin{cases} T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{16} \right), \\ \Psi = kT \pm \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{3\alpha\beta}{8} \right). \end{cases}$$

§ II.

Lorsque le pendule est abandonné sans vitesse initiale, il ne passe pas en tombant par la verticale; déterminer son écart minimum et la durée des oscillations

Dans ce cas, ψ_0, θ_0 étant quelconques, on a

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0;$$

les trois racines A, B, C de l'équation générale (41) sont, en remarquant que $w_0 = -kl \sin \theta_0$,

$$A = \cos \theta_0,$$

$$B = -\frac{k^2 l \sin^2 \theta_0}{4g} + \sqrt{\frac{k^4 l^2 \sin^4 \theta_0}{16g^2} - \frac{k^2 l \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}{2g} + 1},$$

$$C = -\frac{k^2 l \sin^2 \theta_0}{4g} - \sqrt{\frac{k^4 l^2 \sin^4 \theta_0}{16g^2} - \frac{k^2 l \sin^2 \theta_0 \cos \theta_0}{2g} + 1}.$$

Les angles α, β étant les écarts maximum et minimum, on a donc

$$\alpha = \theta_0, \quad \cos \beta = 1 - \frac{k^2 l \sin^2 \theta_0}{4g} (1 + \cos \theta_0) + \dots$$

d'où l'on tire

$$\beta = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot k \sin \theta_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0,$$

en négligeant les puissances de k supérieures à la première.

Si l'on prend la seconde de temps moyen pour unité de temps on a

$$n = \frac{1}{13713}; \quad \text{à Paris, } k = 0,0000549081 = \frac{1}{18212}.$$

Si l'on suppose $\theta_0 = 1$ degré, on aura

$$\beta = 0,000000956 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Pour un pendule dont la longueur est égale à g , l'écart minimum $l\delta$ est un arc de $0^m,0000094$.

Si le pendule était de $88^m,2792$, pour une chute de 1 degré, l'écart minimum $l\delta$ serait une fraction de millimètre exprimée par $0,028$.

D'après la formule (42), on a pour la durée commune de chaque oscillation descendante ou ascendante,

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2 + \frac{k^2 l \sin^2 \theta_0 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0}{g}}{16} \right).$$

En négligeant les quatrièmes puissances de l'amplitude, cette formule se réduit à

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16} \right).$$

Cette expression montre que T est indépendant de k au degré d'approximation que nous adoptons. Il est facile de voir que les deux formules précédentes ne donnent pas une différence appréciable, même par des observations qui dureraient dix heures. En effet, supposons $\theta_0 = 1$ degré, alors on a

$$\theta_0^2 = 0,000304686,$$

$$\frac{k^2 l}{g} \sin^2 \theta_0 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 = 0,914007 \cdot 10^{-13},$$

$$T = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} [1 + 0,000019040 (1 + 10^{-13} \cdot 0,914007)].$$

D'après cela, la durée de 36 000 oscillations est

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} [36000 + 0,685548 (1 + 10^{-13} \cdot 0,914007)],$$

ce qui ne diffère pas sensiblement de

$$\pi \sqrt{\frac{l}{g}} [36000 + 0,685548].$$

§ III.

Lorsque le pendule est abandonné sans vitesse initiale, le vertical des positions culminantes qu'atteint le pendule après chaque oscillation complète se déplace dans le sens du mouvement des étoiles avec la vitesse angulaire $n \sin \gamma$.

D'après l'équation (42), l'angle décrit par le vertical du pendule dans une oscillation ascendante ou descendante est

$$\Psi = kT \pm \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{3\alpha^6}{8} \right);$$

dans le cas actuel.

$$w_0 = -kl \sin \theta_0,$$

il faut donc prendre le signe — dans la valeur de Ψ . Après un nombre quelconque p d'oscillations complètes, l'angle décrit par le vertical du pendule est égal à $4p\Psi$ ou à

$$4pkT - 2p\pi \left(1 + \frac{3}{8}k \sqrt{\frac{l}{g}} \theta_0 \sin \theta_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0 \right).$$

Cet angle diffère extrêmement peu de

$$4pkT - 2p\pi,$$

même lorsque p est égal à 1000, et il montre que la nouvelle position du pendule s'obtient par un mouvement direct donné au vertical du pendule avec la vitesse angulaire k .

§ IV.

Des conditions à remplir pour que les sommets de la spirale décrite par le pendule conservent une orientation fixe ou se déplacent avec une vitesse donnée par un mouvement direct ou rétrograde.

Lorsqu'on abandonne le pendule à lui-même, il est difficile d'obtenir rigoureusement qu'il parte sans vitesse initiale. Ordinairement, le pendule est maintenu hors de la verticale au moyen d'un fil qu'on brûle lorsqu'on suppose l'équilibre établi; mais le pendule et le fil qui le retient forment un système très-mobile qui est rarement en

équilibre parfait au moment où l'on brûle le fil. D'après cela, il est utile d'examiner quelle peut être l'influence de la très-petite vitesse initiale que possède ordinairement le pendule sur le déplacement de son vertical. Cet examen se fera aisément en résolvant le problème énoncé.

L'angle décrit par le vertical du pendule pendant une oscillation complète est, d'après l'équation (42), égal à

$$4\Psi = 4kT \pm 2\pi \pm \frac{3}{4}\pi\alpha\epsilon.$$

Si l'on supprime 2π , le reste $4kT \pm \frac{3}{4}\pi\alpha\epsilon$ désigne l'angle dont le vertical du pendule est déplacé à la fin d'une oscillation complète par rapport à sa position au commencement de l'oscillation; suivant que cet angle est positif ou négatif, le déplacement est direct ou rétrograde. Ce déplacement s'est opéré pendant le temps $4T$. Si donc on le divise par $4T$, on aura la vitesse angulaire de ce déplacement. Je désigne par U cette vitesse, et j'ai

$$U = k \pm \frac{3}{4}\pi\alpha\epsilon \cdot \frac{1}{4T}.$$

D'après l'équation (42), on a

$$4T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \epsilon^2}{16}\right),$$

d'où l'on conclut

$$U = k \pm \frac{3}{8}\alpha\epsilon \cdot \sqrt{\frac{g}{l}},$$

en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à la troisième puissance de α ou de ϵ . Je suppose maintenant que $v_0 = 0$; alors on tire de l'équation (41),

$$\epsilon = \frac{w_0 \cos \frac{1}{2}\theta_0}{\sqrt{gl}} = \frac{u_0 \cos \frac{1}{2}\theta_0}{\sqrt{gl}} - k \sin \theta_0 \cos \frac{1}{2}\theta_0 \sqrt{\frac{l}{g}};$$

par suite,

$$U = k \mp \frac{3}{8}k\theta_0 \sin \theta_0 \cos \frac{1}{2}\theta_0 \pm \frac{3}{8}\frac{u_0}{l}\theta_0 \cos \frac{1}{2}\theta_0.$$

Dans cette formule, on prendra les signes supérieurs ou les signes inférieurs suivant que w_0 sera positif ou négatif.

La première partie de U est indépendante de la longueur du pendule et des données initiales. La seconde partie est indépendante de la longueur du pendule, mais elle dépend de θ_0 ; lorsque θ_0 est de 1 degré, nous avons vu que cette seconde partie est insensible par rapport à la première, et il en est encore de même lorsque θ_0 est plus grand que 1 degré, mais reste néanmoins très-petit. On peut donc réduire l'expression précédente à

$$U = k \pm \frac{3}{8} \frac{u_0}{l} \theta_0 \cos \frac{1}{2} \theta_0.$$

Le second terme de la valeur de U dépend de u_0 , mais sa valeur est d'autant plus petite que le pendule est plus long. Si $\frac{u_0}{l}$ est suffisamment petit, on conçoit qu'à cause du facteur θ_0 , la seconde partie de U pourra être insensible par rapport à la première; cela aura lieu lorsqu'à l'origine le pendule n'a reçu qu'une très-petite vitesse directe ou rétrograde, surtout si le pendule est très-long. D'après cela, avec un pendule très-long, si l'on prend les précautions convenables pour qu'au moment où l'on brûle le fil qui retient le pendule il n'y ait qu'une très-petite vitesse, on pourra réduire U à k.

Lorsque $\frac{u_0}{l}$ n'est pas suffisamment petit, la différence de U et k peut être rendue sensible par l'expérience, et l'on conçoit que U pourra être nul, positif ou négatif.

Les sommets de la spirale auront une orientation fixe lorsque $U = 0$, ce qui exige que u_0 soit négatif.

Dans ce cas, on tire des formules précédentes

$$\epsilon = \frac{8k \sqrt{\frac{l}{g}}}{3\theta_0}.$$

Pour

$$\theta_0 = 3 \text{ degrés} \quad \text{et} \quad l = 88^m, 2792,$$

on a

$$\epsilon = 0,0083886 \quad \text{et} \quad l\epsilon = 0^m, 712.$$

D'où il suit que, pour avoir une orientation fixe, il faut lancer le pendule en sens contraire du mouvement des étoiles avec une vitesse telle, que le pendule partant de l'écart 3 degrés s'approche en tombant vers la verticale jusqu'à la distance de $0^m,712$. Avec une vitesse plus grande, le mouvement des sommets de la spirale serait rétrograde; avec une vitesse plus petite, ce mouvement serait direct et pourrait être plus petit que k , plus grand que k ou égal à cette quantité.

§ V.

Des conditions à remplir pour que le pendule passe en tombant par la verticale.

Les intégrales premières des équations (29) et (30) sont

$$(43) \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l} \cos \theta = a,$$

$$(44) \quad \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{dt} = b.$$

Les constantes arbitraires a , b , déterminées par les conditions initiales, ont pour valeurs

$$(45) \quad a = \frac{v_0^2 + \omega_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l} \cos \theta_0, \quad b = \frac{\omega_0 \sin \theta_0}{l}.$$

L'équation (44) montre que le pendule ne peut passer par la verticale qu'autant que $b = 0$; cela aura donc lieu lorsque le pendule sera lancé de sa position d'équilibre stable en instable, ou bien lorsqu'il sera lancé d'une position quelconque avec une vitesse telle, que l'on ait

$$u_0 = kl \sin \theta_0.$$

Dans ces conditions, les équations (43), (44) se réduisent à

$$(46) \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l} \left(\cos \theta - \cos \theta_0 + \frac{v_0^2}{2l} \right),$$

$$(47) \quad \frac{d\varphi}{dt} = 0.$$

De la dernière équation on tire, en vertu de l'équation (31),

$$\psi = \psi_0 + kt.$$

Cette équation montre que le vertical du pendule tourne uniformément dans le sens du mouvement des étoiles avec la vitesse angulaire $k = n \sin \gamma$. L'équation (46) montre que le pendule oscille dans ce vertical mobile suivant les lois des oscillations planes des pendules ordinaires.

§ VI.

Des oscillations infiniment petites.

On pourrait déduire les lois de ces oscillations des formules générales (40); mais il est plus simple de les obtenir directement, ce qu'on peut faire de la manière suivante.

Si l'on divise par dt l'équation (27), le facteur $\sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$ qui entrera dans le second membre sera du troisième ordre lorsque les oscillations seront infiniment petites; alors les équations (26), (27) se réduisent à

$$d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \theta^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{l} \theta^2\right) = 0, \quad d.\rho^2 \frac{d(\psi - kt)}{dt} = 0.$$

Je désigne par ρ la projection horizontale de la tige du pendule et j'ai

$$\rho = l \sin \theta.$$

Dans le cas des oscillations infiniment petites, on pourra remplacer le système précédent par

$$d\left(\frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{l} \rho^2\right) = 0, \quad d.\rho^2 \frac{d(\psi - kt)}{dt} = 0;$$

les intégrales premières sont

$$(8) \quad \frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{l} \rho^2 = a, \quad \rho^2 \frac{d(\psi - kt)}{dt} = b,$$

a, b étant deux constantes arbitraires.

J'élimine $\frac{d\psi}{dt}$, et j'ai

$$\rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + k^2\right) \rho^4 + (a - 2bk) \rho^2 - b^2.$$

Le second membre de cette équation est un polynôme du quatrième

degré dont tous les termes sont de degré pair; on peut donc écrire ainsi l'équation précédente,

$$\rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = \left(\frac{g}{l} + k^2\right) (\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2);$$

en désignant par ρ_0^2 , ρ_1^2 la plus grande et la plus petite des racines de l'équation suivante,

$$(49) \quad \left(\frac{g}{l} + k^2\right) x^2 - (a - 2bk) x + b^2 = 0,$$

il est facile de voir, en mettant dans cette équation à la place de a , b leurs valeurs en fonction des données initiales, que les deux racines sont réelles et positives.

L'équation différentielle précédente ayant son premier membre positif montre que ρ varie entre les limites extrêmes ρ_0 , ρ_1 ; on en tire

$$(50) \quad dt = \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{g}{l} + k^2} \sqrt{(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2)}}.$$

Au moyen de cette valeur de dt , et en remarquant que l'équation (49) donne

$$b = \rho_0 \rho_1 \sqrt{\frac{g}{l} + k^2},$$

l'équation (48) devient

$$d(\psi - kt) = \frac{\rho_0 \rho_1 d\rho}{\rho \sqrt{(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2)}}.$$

Sous cette forme, on reconnaît l'équation différentielle d'une ellipse dont les demi-axes sont ρ_0 , ρ_1 lorsqu'on prend pour coordonnées polaires des différents points de l'ellipse le rayon vecteur mené du centre de la courbe et l'angle que ce rayon vecteur fait avec le demi-grand axe ρ_0 ; il suit de là que l'intégrale de l'équation précédente est

$$[\rho_0^2 \sin^2(\psi - \psi_0 - kt) + \rho_1^2 \cos^2(\psi - \psi_0 - kt)] \rho^2 = \rho_0^2 \rho_1^2.$$

ψ_0 étant une constante arbitraire qui désigne la valeur initiale de ψ .

Cette équation n'est autre chose que celle de l'ellipse mobile de M. Binet.

Quant à la durée des oscillations, on la tire facilement de l'équation (50), qui donne

$$\rho^2 = \frac{\rho_0^2 + \rho_1^2}{2} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2} \cos 2(t - c) \sqrt{\frac{g}{l} + k^2};$$

c est une constante arbitraire qui désigne le temps écoulé, lorsque le pendule passe par l'un de ses points culminants.

TROISIÈME SECTION.

Mouvement d'un système de corps rapporté à trois axes rectangulaires mobiles.

§ 1^{er}.

Équation des forces vives relatives.

Nous avons vu dans la première section que, dans tout mouvement relatif, on a

$$(1) \quad \sum m (u \delta x + v \delta y + w \delta z) = \sum m (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z);$$

en posant

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = \frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \left(q \frac{dz}{dt} - r \frac{dy}{dt} \right) + u'', \\ v = \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \left(r \frac{dx}{dt} - p \frac{dz}{dt} \right) + v'', \\ w = \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \left(p \frac{dy}{dt} - q \frac{dx}{dt} \right) + w'', \end{array} \right.$$

les quantités u'' , v'' , w'' sont données par les formules (15) de la première section.

Lorsque les conditions imposées au système mobile ne contiennent pas le temps explicitement, on peut prendre pour déplacement virtuel de chaque point m le déplacement relatif qui a effectivement lieu

pendant l'instant dt , et, par suite, poser dans l'équation (1),

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz;$$

alors la formule (1) devient

$$(3) \quad \sum m(u dx + v dy + w dz) = \sum m(X dx + Y dy + Z dz).$$

On tire des équations (2)

$$(4) \quad u dx + v dy + w dz = \frac{1}{2} d \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + u'' dx + v'' dy + w'' dz,$$

et l'équation (3) devient

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \\ = 2 \sum [(X - u'') dx + (Y - v'') dy + (Z - w'') dz]. \end{array} \right.$$

C'est là l'équation des forces vives relatives.

§ II.

Équations des moments par rapport aux axes mobiles.

Supposons que les conditions du système mobile permettent à ce système un mouvement commun de rotation autour de l'axe oz ; par une rotation virtuelle autour de cet axe, on aura

$$\delta x = -y\varepsilon, \quad \delta y = x\varepsilon, \quad \delta z = 0,$$

en désignant par ε un facteur arbitraire et commun à tous les points matériels. Ces expressions réduisent la formule (1) à

$$(6) \quad \sum m(xv - yu) = \sum m(xY - yX);$$

les équations (2) donnent

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} xv - yu = x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} + r \frac{d(x^2 + y^2)}{dt} \\ - 2qy \frac{dz}{dt} - 2px \frac{dz}{dt} + xv'' - yu'', \end{array} \right.$$

par suite,

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum m(xv - yu) &= \frac{d \cdot \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right)}{dt} + \frac{d \cdot \sum m(x^2 + y^2)}{dt} \\ &- 2q \sum mq \frac{dz}{dt} - 2p \sum mx \frac{dz}{dt} + \sum m(xv'' - yu''); \end{aligned} \right.$$

alors l'équation (6) devient

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} d \cdot \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= \sum m [x(Y - v'') - y(X - u'')] dt \\ - rd \sum m(x^2 + y^2) &+ 2q \sum my dz + 2p \sum mx dz. \end{aligned} \right.$$

On pourrait former une équation analogue à la précédente pour chacun des axes oy , ox ; nous n'écrirons pas ces équations, parce que nous n'aurons pas à en faire usage dans les problèmes que nous traiterons.

§ III.

Propriétés générales du mouvement relatif de rotation pour un corps solide invariablement fixé à l'origine des axes mobiles.

Par l'origine mobile o je mène trois axes rectangulaires ox_1 , oy_1 , oz_1 , invariablement liés au corps solide que l'on considère, et je désigne par x_1 , y_1 , z_1 les coordonnées du point m de ce corps par rapport à ces nouveaux axes. Soient α , α' , α'' , β , β' , β'' , γ , γ' , γ'' les cosinus que les axes du corps ox_1 , oy_1 , oz_1 font respectivement avec chacun des axes ox , oy , oz à l'époque quelconque t .

Par les règles de la transformation des coordonnées, on a

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1, \\ y &= \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1, \\ z &= \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1. \end{aligned} \right.$$

Si l'on traite ces équations comme on a déjà traité les équations ana-

logues (5) de la première section, et qu'on pose

$$(11) \quad \begin{cases} \varpi = \frac{\alpha'' d\alpha' + \beta'' d\beta' + \gamma'' d\gamma'}{dt}, \\ \chi = \frac{\alpha d\alpha'' + \beta d\beta'' + \gamma d\gamma''}{dt}, \\ \rho = \frac{\alpha' d\alpha + \beta' d\beta + \gamma' d\gamma}{dt}, \end{cases}$$

$$(12) \quad \begin{cases} U_2 = \chi z_1 - \rho y_1, \\ V_2 = \rho x_1 - \varpi z_1, \\ W_2 = \varpi y_1 - \chi x_1, \end{cases}$$

on aura

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha U_2 + \alpha' V_2 + \alpha'' W_2, \\ \frac{dy}{dt} = \beta U_2 + \beta' V_2 + \beta'' W_2, \\ \frac{dz}{dt} = \gamma U_2 + \gamma' V_2 + \gamma'' W_2. \end{cases}$$

Les équations (11), (12), (13) sont analogues aux équations (9), (11), (12) de la première section.

En posant

$$(14) \quad \Omega^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

on aura, par les équations (13),

$$(15) \quad \Omega^2 = U_2^2 + V_2^2 + W_2^2.$$

D'après l'équation (14), la quantité Ω désigne la vitesse relative du point m . Les équations (15) et (12) montrent qu'à toute époque t les points du corps situés sur la droite que déterminent les équations

$$(16) \quad \frac{x_1}{\varpi} = \frac{y_1}{\chi} = \frac{z_1}{\rho},$$

sont sans vitesse relative, c'est-à-dire conservent pendant l'instant suivant dt une position fixe par rapport aux axes mobiles ox , oy , oz , auxquels les mouvements sont rapportés. A cause de cette propriété, la droite (16) sera appelée l'*axe instantané de rotation apparente*.

Je pose

$$(17) \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 + \chi^2 + \rho^2},$$

alors les quantités

$$(18) \quad \frac{\omega}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\chi}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\rho}{\bar{\omega}}$$

désignent les cosinus des angles que l'axe instantané apparent fait à l'époque t avec les axes du corps ox_1, oy_1, oz_1 , et les quantités

$$(19) \quad \frac{\alpha\omega + \alpha'\chi + \alpha''\rho}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\beta\omega + \beta'\chi + \beta''\rho}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\gamma\omega + \gamma'\chi + \gamma''\rho}{\bar{\omega}}$$

sont les cosinus des angles que l'axe instantané et apparent fait avec les axes ox, oy, oz . En prenant $\bar{\omega}$ en valeur absolue, ces cosinus donnent la direction de l'une des deux parties dans lesquelles l'origine o divise l'axe instantané; c'est cette partie seulement que nous appellerons désormais l'*axe instantané et apparent du corps*.

Les équations (13) montrent que U_2, V_2, W_2 sont les projections sur ox_1, oy_1, oz_1 de la vitesse apparente Ω du point m . Les équations (12) montrent que l'on a

$$(20) \quad U_2 x_1 + V_2 y_1 + W_2 z_1 = 0,$$

$$(21) \quad U_2 \omega + V_2 \chi + W_2 \rho = 0,$$

et ces équations font voir que la vitesse apparente Ω est à la fois perpendiculaire au rayon vecteur du point m et à l'axe instantané; elle est donc perpendiculaire au plan de ces deux lignes, ou, ce qui est la même chose, elle est tangente à la circonférence qui passe par le point m , dont le plan est perpendiculaire à l'axe instantané apparent et dont le centre est sur cet axe.

On tire des équations (15) et (12)

$$(22) \quad \begin{cases} \Omega^2 = \omega^2 (y_1^2 + z_1^2) + \chi^2 (z_1^2 + x_1^2) + \rho^2 (x_1^2 + y_1^2) \\ \quad - 2\chi\rho y_1 z_1 - 2\omega\rho x_1 z_1 - 2\omega\chi y_1 x_1. \end{cases}$$

Je désigne par δ le rayon vecteur du point m et par ε l'angle qu'il

fait avec l'axe instantané apparent, et j'ai

$$\delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$\cos \varepsilon = \frac{\omega x_1 + \chi y_1 + \rho z_1}{\omega \delta}.$$

Au moyen de ces valeurs, on peut écrire l'équation (22) successivement comme il suit :

$$\Omega^2 = (\omega^2 + \chi^2 + \rho^2) \delta^2 - (\omega x_1 + \chi y_1 + \rho z_1)^2,$$

$$\Omega^2 = \bar{\omega}^2 \delta^2 - \bar{\omega}^2 \delta^2 \cos^2 \varepsilon,$$

$$(23) \quad \frac{\Omega}{\delta \sin \varepsilon} = \bar{\omega};$$

$\delta \sin \varepsilon$ est la perpendiculaire abaissée de m sur l'axe instantané apparent : l'équation (23) montre donc que le rapport de la vitesse apparente de chaque point du corps à la distance qui sépare ce point de l'axe instantané est une quantité constante dans toute l'étendue du corps à l'époque quelconque t . D'après les diverses propriétés que nous venons d'indiquer, on peut conclure que le mouvement apparent du corps pendant l'instant dt consiste en une rotation apparente exécutée autour de l'axe instantané apparent; la vitesse angulaire de cette rotation apparente est égale à la quantité $\bar{\omega}$ définie par l'équation (17). Menons par l'axe instantané apparent deux plans A, B de même direction, le premier étant invariablement lié aux axes ox, oy, oz , et le second au corps solide même; ces deux plans coïncidant à l'époque t ne coïncident plus généralement à l'époque $t + dt$ et font entre eux un angle égal à $\bar{\omega} dt$, en sorte que le plan B, qui est fixe dans le corps, a tourné autour de l'axe instantané apparent avec la vitesse apparente $\bar{\omega}$.

Lorsque l'on considère le mouvement relatif d'un corps solide invariablement lié à l'origine des axes mobiles, il est facile de transformer d'une manière utile l'équation des forces vives relatives et celle des moments que nous avons déjà données.

On tire des équations (14) et (22),

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} &= A \varpi^2 + B \chi^2 + C \rho^2 - 2 A' \chi \rho \\ &- 2 B' \rho \varpi - 2 C' \varpi \chi, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} A &= \sum m (z_1^2 + y_1^2), \\ B &= \sum m (z_1^2 + x_1^2), \\ C &= \sum m (x_1^2 + y_1^2), \\ A' &= \sum m y_1 z_1, \\ B' &= \sum m z_1 x_1, \\ C' &= \sum m x_1 y_1. \end{aligned} \right.$$

En portant l'équation (24) dans l'équation (5), on a, pour l'équation des forces vives relatives,

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} d(A \varpi^2 + B \chi^2 + C \rho^2 - 2 A' \chi \rho - 2 B' \rho \varpi - 2 C' \varpi \chi) \\ = 2 \sum m [(X - u'') dx + (Y - v'') dy + (Z - w'') dz]. \end{aligned} \right.$$

Quant à l'équation des moments, c'est-à-dire l'équation (9), on peut faire subir à ses diverses parties les transformations suivantes.

On a, par les formules (10), (13),

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= (x_1 V_2 - y_1 U_2) (\alpha b' - \alpha' b) \\ &+ (z_1 U_2 - x_1 W_2) (\alpha'' b - \alpha b'') + (y_1 W_2 - z_1 V_2) (\alpha' b'' - \alpha'' b'). \end{aligned}$$

On sait que les seconds facteurs qui entrent dans le second membre de cette équation sont respectivement égaux à $\gamma, \gamma', \gamma''$; ce qu'on peut, au reste, facilement démontrer. Si donc on a égard à l'équation (12),

cette équation devient

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = & \gamma [\varpi (y_1^2 + z_1^2) + \chi y_1 x_1 - \rho z_1 x_1] \\ & + \gamma' [\chi (z_1^2 + x_1^2) - \rho z_1 y_1 - \varpi x_1 y_1] \\ & + \gamma'' [\rho (x_1^2 + y_1^2) - \varpi z_1 x_1 - \chi z_1 y_1]. \end{aligned}$$

Je désigne par P, Q, R les dérivées de $\frac{1}{2} \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}$ par rapport à ϖ, χ, ρ ; c'est-à-dire que je pose

$$(27) \quad \begin{cases} P = A \varpi - C' \chi - B' \rho, \\ Q = B \chi - C' \varpi - A' \rho, \\ R = C \rho - A' \chi - B' \varpi; \end{cases}$$

alors je tire de l'équation précédente.

$$(28) \quad \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \gamma P + \gamma' Q + \gamma'' R.$$

formule qui est connue.

La quantité $\sum m (x^2 + y^2)$ est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe oz . Par les calculs connus et relatifs à la théorie des moments d'inertie, on a

$$(29) \quad \begin{cases} \sum m (x^2 + y^2) = A \gamma^2 + B \gamma'^2 + C \gamma''^2 \\ \quad \quad \quad - 2A' \gamma' \gamma'' - 2B' \gamma'' \gamma - 2C' \gamma \gamma'. \end{cases}$$

On peut, au reste, former directement cette expression au moyen des équations (10).

Je tire des équations (10),

$$(30) \quad \begin{cases} 2 \sum m x dz = (B + C - A) \alpha d\gamma + (A + C - B) \alpha' d\gamma' \\ \quad \quad \quad + (A + B - C) \alpha'' d\gamma'' + 2C' (\alpha d\gamma' + \alpha' d\gamma) \\ \quad \quad \quad + 2B' (\alpha'' d\gamma + \alpha d\gamma'') + 2A' (\alpha' d\gamma'' + \alpha'' d\gamma'). \end{cases}$$

De là on déduit $2 \sum m y dz$, en changeant $\alpha, \alpha', \alpha''$ respectivement en $\delta, \delta', \delta''$.

D'après les formules (28), (29), (30), l'équation des moments (9) devient

$$(31) \left\{ \begin{aligned} & d(P\gamma + Q\gamma' + R\gamma'') = \sum m [x(Y - v'') - y(X - u'')] dt \\ & - rd(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2 - 2A'\gamma'\gamma'' - 2B'\gamma''\gamma' - 2C'\gamma\gamma') \\ & + q \left[\begin{aligned} & (B + C - A)\xi d\gamma + (A + C - B)\xi' d\gamma' + (A + B - C)\xi'' d\gamma'' \\ & + 2C'(\xi d\gamma' + \xi' d\gamma) + 2B'(\xi'' d\gamma + \gamma'' d\xi) \\ & + 2A'(\xi' d\gamma'' + \gamma' d\xi'') \end{aligned} \right] \\ & + p \left[\begin{aligned} & (B + C - A)\alpha d\gamma + (A + C - B)\alpha' d\gamma' + (A + B - C)\alpha'' d\gamma'' \\ & + 2C'(\alpha d\gamma' + \alpha' d\gamma) + 2B'(\alpha'' d\gamma + \alpha d\gamma'') \\ & + 2A'(\alpha' d\gamma'' + \alpha'' d\gamma) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \right.$$

Nous emploierons, dans les problèmes que nous traiterons plus loin, une autre équation qui convient à tout corps solide capable de tourner librement autour de la droite oz_1 , qui est invariablement liée au corps. C'est maintenant cette équation que nous allons former

§ IV.

Équation des moments par rapport à l'axe du corps solide.

Je suppose que les conditions imposées au corps ne l'empêchent pas de pouvoir tourner autour de oz_1 , et je donne au solide un mouvement virtuel de rotation autour de cette ligne. Je désigne par $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$ les projections sur ox_1, oy_1, oz_1 du déplacement virtuel du point m . et j'ai

$$\delta x_1 = -y_1 \varepsilon, \quad \delta y_1 = x_1 \varepsilon, \quad \delta z_1 = 0,$$

ε étant un facteur indéterminé et commun à tous les points du corps.

On tire de ces équations et des formules (10),

$$\delta x = \varepsilon(\alpha' x_1 - \alpha y_1),$$

$$\delta y = \varepsilon(\xi' x_1 - \xi y_1),$$

$$\delta z = \varepsilon(\gamma' x_1 - \gamma y_1);$$

et alors la formule (1) devient

$$(32) \quad \begin{cases} \sum m [x, (\alpha' u + \beta' v + \gamma' w) - y, (\alpha u + \beta v + \gamma w)] \\ = \sum m [x, (X \alpha' + Y \beta' + Z \gamma') - y, (X \alpha + Y \beta + Z \gamma)]. \end{cases}$$

Je poserai, pour plus de simplicité,

$$(33) \quad \begin{cases} p_1 = \alpha \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma \frac{d^2 z}{dt^2}, \\ q_1 = \alpha' \frac{d^2 x}{dt^2} + \beta' \frac{d^2 y}{dt^2} + \gamma' \frac{d^2 z}{dt^2}, \end{cases}$$

$$(34) \quad \begin{cases} X_1 = \alpha (X - u'') + \beta (Y - v'') + \gamma (Z - w''), \\ Y_1 = \alpha' (X - u'') + \beta' (Y - v'') + \gamma' (Z - w''). \end{cases}$$

Il est clair que p_1, q_1 sont les projections sur ox_1, oy_1 de l'accélération apparente du point m .

Par les équations (2) on a

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w &= p_1 + 2r \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) \\ &+ 2q \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) + 2p \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) + \alpha u'' + \beta v'' + \gamma w''. \end{aligned}$$

Si l'on change dans cette formule α, β, γ respectivement en α', β', γ' , on aura la valeur de $\alpha' u + \beta' v + \gamma' w$; et au moyen de ces deux expressions et de l'équation (34), l'équation (32) deviendra

$$(35) \quad \begin{cases} \sum m (x, q_1 - y, p_1) = \sum m (x, Y_1 - y, X_1) \\ - 2r \sum m \left[x, \left(\beta' \frac{dx}{dt} - \alpha' \frac{dy}{dt} \right) - y, \left(\beta \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) \right] \\ - 2q \sum m \left[x, \left(\alpha' \frac{dz}{dt} - \gamma' \frac{dx}{dt} \right) - y, \left(\alpha \frac{dz}{dt} - \gamma \frac{dx}{dt} \right) \right] \\ - 2p \sum m \left[x, \left(\gamma' \frac{dy}{dt} - \beta' \frac{dz}{dt} \right) - y, \left(\gamma \frac{dy}{dt} - \beta \frac{dz}{dt} \right) \right]. \end{cases}$$

Si l'on opère sur les équations (10) en faisant les mêmes calculs qui, dans la première section, ont fait passer des équations (5) aux équations (14), et qu'on ait égard aux équations (12) de la section actuelle,

on obtient

$$p_1 = \frac{dU_2}{dt} + \chi W_2 - \rho V_2, \quad q_1 = \frac{dV_2}{dt} + \rho U_2 - \varpi W_2,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$p_1 = z_1 \frac{d\chi}{dt} - y_1 \frac{d\rho}{dt} + \varpi \chi y_1 + \rho \varpi z_1 - x_1 (\chi^2 + \rho^2),$$

$$q_1 = x_1 \frac{d\rho}{dt} - z_1 \frac{d\varpi}{dt} + \rho \chi z_1 + \varpi \chi x_1 - y_1 (\rho^2 + \varpi^2);$$

de là on tire

$$\sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = C \frac{d\rho}{dt} - B' \frac{d\varpi}{dt} - A' \frac{d\chi}{dt} + (B - A) \varpi \chi - A' \varpi \rho + B' \chi \rho + C' (\chi^2 - \varpi^2).$$

Au moyen des équations (27), cette expression devient

$$(36) \quad \sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = \frac{dR}{dt} + \varpi Q - \chi P;$$

cette transformation est au reste connue.

Au moyen des équations (10), on a

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2 \sum m \left(\varepsilon' \frac{dx}{dt} - \alpha' \frac{dy}{dt} \right) x_1 = (B + C - A) \frac{\varepsilon' d\alpha - \alpha' d\varepsilon}{dt} \\ \quad \quad \quad + 2 C' \frac{\varepsilon' d\alpha' - \alpha' d\varepsilon'}{dt} + B' \frac{\varepsilon' d\alpha'' - \alpha' d\varepsilon''}{dt}, \\ 2 \sum m \left(\varepsilon \frac{dx}{dt} - \alpha \frac{dy}{dt} \right) y_1 = (A + C - B) \frac{\varepsilon d\alpha' - \alpha d\varepsilon'}{dt} \\ \quad \quad \quad + 2 C' \frac{\varepsilon d\alpha - \alpha d\varepsilon}{dt} + A' \frac{\varepsilon d\alpha'' - \alpha d\varepsilon''}{dt}. \end{array} \right.$$

Si on fait la différence de ces deux équations, on a pour le coefficient de C la dérivée par rapport à t de $\alpha\varepsilon' - \alpha'\varepsilon$, ou, comme on l'a déjà dit, de γ'' .

Au moyen des équations (11) et des relations connues qui lient les neuf cosinus, on a

$$\sigma = \frac{\alpha d\alpha + \varepsilon d\varepsilon + \gamma d\gamma}{dt},$$

$$\rho = \frac{\alpha' d\alpha + \varepsilon' d\varepsilon + \gamma' d\gamma}{dt},$$

$$\chi = - \frac{\alpha'' d\alpha + \varepsilon'' d\varepsilon + \gamma'' d\gamma}{dt}.$$

Si on multiplie ces équations respectivement par α , α' , $-\alpha''$, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' \rho - \alpha'' \chi,$$

d'où l'on conclut, par la permutation des lettres,

$$\frac{d\delta}{dt} = \delta' \rho - \delta'' \chi.$$

Si on a égard à l'expression de γ déjà citée, on voit que l'on a

$$\frac{\delta' d\alpha - \alpha' d\delta}{dt} = \gamma \chi.$$

On obtient de la même manière

$$\frac{\delta' d\alpha' - \alpha' d\delta'}{dt} = \gamma' \varpi, \quad \frac{\delta' d\alpha'' - \alpha' d\delta''}{dt} = \gamma'' \chi, \quad \frac{\delta' d\alpha'' - \alpha' d\delta''}{dt} = \gamma'' \varpi,$$

et aussi

$$\alpha' d\delta' - \delta' d\alpha' = \gamma \varpi + \gamma' \rho, \quad \frac{\alpha d\delta - \delta d\alpha}{dt} = \gamma' \chi + \gamma'' \rho;$$

au moyen de ces diverses expressions, la différence des deux équations (37) devient

$$C \frac{d\gamma''}{dt} + (B - A)(\gamma \chi + \gamma' \varpi) + 2C'(\gamma' \chi - \gamma \varpi) + 2\gamma''(B' \chi - A' \varpi).$$

Cette quantité est le coefficient de $-r$ dans l'équation (35); on en déduit les coefficients de $-q$ et $-p$ dans la même équation en changeant γ , γ' , γ'' , respectivement en δ , δ' , δ'' , ou en α , α' , α'' , et de cette manière l'équation (35) devient

$$\begin{aligned} & \frac{dR}{dt} + \varpi Q - \chi P = \sum m(x, Y, -y, X) \\ (38) \quad & \left\{ \begin{array}{l} -r \left[\begin{array}{l} C \frac{d\gamma''}{dt} + (B - A)(\gamma \chi + \gamma' \varpi) \\ + 2C'(\gamma' \chi - \gamma \varpi) + 2\gamma''(B' \chi - A' \varpi) \end{array} \right] \\ -q \left[\begin{array}{l} C \frac{d\delta''}{dt} + (B - A)(\delta \chi + \delta' \varpi) \\ + 2C'(\delta' \chi - \delta \varpi) + 2\delta''(B' \chi - A' \varpi) \end{array} \right] \\ -p \left[\begin{array}{l} C \frac{d\alpha''}{dt} + (B - A)(\alpha \chi + \alpha' \varpi) \\ + 2C'(\alpha' \chi - \alpha \varpi) + 2\alpha''(B' \chi - A' \varpi) \end{array} \right] \end{array} \right. \end{aligned}$$

On peut déduire de l'équation (38) deux équations analogues relatives aux axes ox_1, oy_1 ; mais nous n'aurons pas occasion de nous en servir.

Cette équation (38) peut s'écrire de la manière suivante :

$$(39) \left\{ \begin{aligned} \frac{dR}{dt} + \varpi Q - \chi P &= \sum m(x_1, Y_1, -y_1, X_1) - C \frac{pdz'' + qd\epsilon'' + rd\gamma''}{dt} \\ &+ (B - A) [\chi(\alpha p + \epsilon q + \gamma r) + \varpi(\alpha' p + \epsilon' q + \gamma' r)] \\ &+ 2C' [\chi(\alpha' p + \epsilon' q + \gamma' r) - \varpi(\alpha p + \epsilon q + \gamma r)] \\ &+ 2(B'\chi - A'\varpi)(\alpha'' p + \epsilon'' q + \gamma'' r). \end{aligned} \right.$$

On peut remarquer que les trinômes $\alpha p + \epsilon q + \gamma r$, $\alpha' p + \epsilon' q + \gamma' r$, $\alpha'' p + \epsilon'' q + \gamma'' r$, sont les composantes suivant ox_1, oy_1, oz_1 , de la vitesse angulaire instantanée de la rotation des axes mobiles ox, oy, oz , auxquels on rapporte le mouvement du solide.

Je désigne par θ l'angle que oz_1 fait avec oz , par $\psi - 90^\circ$ l'angle que la projection de oz_1 sur le plan xoy fait avec ox , par φ l'angle que ox_1 fait avec la partie de l'intersection des plans $x_1 y_1$ et xy qui est déterminée par l'angle ψ ; on a, par la trigonométrie sphérique.

$$(40) \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \alpha' &= -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta, \\ \alpha'' &= \sin \psi \sin \theta; \\ \epsilon &= \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \epsilon' &= -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta, \\ \epsilon'' &= -\cos \psi \sin \theta; \\ \gamma &= \sin \varphi \sin \theta, \\ \gamma' &= \cos \varphi \sin \theta, \\ \gamma'' &= \cos \theta. \end{aligned} \right.$$

On tire de là les formules connues

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \varpi &= \sin \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ \chi &= \cos \varphi \sin \theta \frac{d\psi}{dt} - \sin \varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ \rho &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos \theta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Au moyen des équations (40) et (41), les premiers membres des équations (26), (31) et (39) peuvent être considérés comme des fonctions des trois angles θ , ψ , φ qui servent à déterminer à chaque instant la position apparente du corps solide.

Lorsque le corps solide est de révolution autour d'une droite passant par le point o , les équations (25) et (27) donnent, en plaçant oz , sur cette droite,

$$(42) \quad \begin{cases} A = B, & A' = 0, & B' = 0, & C' = 0, \\ R = C\rho, & Q = B\chi, & P = A\varpi, \end{cases}$$

et les équations (26), (31), (39) deviennent

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} d[A(\varpi^2 + \chi^2) + C\rho^2] &= 2 \sum m[(X - u'')dx + (Y - v'')dy \\ &\quad + (Z - w'')dz], \\ d[A(\varpi\gamma + \chi\gamma') + C\rho\gamma''] &= \sum m[x(Y - v'') - y(X - u'')]dt \\ &\quad - rd[A(\gamma^2 + \gamma'^2) + C\gamma''^2] \\ &\quad + q[C(\xi d\gamma + \xi' d\gamma') + (2A - C)\xi'' d\gamma''] \\ &\quad + p[C(\alpha d\gamma + \alpha' d\gamma') + (2A - C)\alpha'' d\gamma''], \\ C(d\rho + p d\alpha'' + q d\xi'' + r d\gamma'') &= \sum m(x, Y, -y, X,) dt. \end{aligned} \right.$$

Au moyen des équations (40) et (41), on a

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi^2 + \chi^2 &= \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ \varpi\gamma + \chi\gamma' &= \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt}, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 = \sin^2 \theta, \\ \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' &= -\sin \psi \cos^2 \theta d\theta + \cos \psi \sin \theta d\varphi \\ &= \rho \cos \psi \sin \theta dt - \cos \theta d(\sin \psi \sin \theta), \\ \alpha'' d\gamma'' &= -\sin \psi \sin^2 \theta dt. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions réduisent les équations (43) à

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} &d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu\rho^2 \right) \\ &= \frac{2}{A} \sum m[(X - u'')dx + (Y - v'')dy + (Z - w'')dz], \end{aligned} \right.$$

$$(46) \left\{ \begin{aligned} & d \cdot \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} \\ & = \frac{1}{A} \sum m [x(\dot{Y} - v'') - y(\dot{X} - u'')] dt + r(\mu - 1) d \cdot \sin^2 \theta \\ & + q \left\{ \begin{aligned} & \mu [\rho \sin \psi \sin \theta dt + \cos \theta d(\cos \psi \sin \theta)] \\ & + (2 - \mu) \cos \psi \sin^2 \theta d\theta \end{aligned} \right\} \\ & + p \left\{ \begin{aligned} & \mu [\rho \cos \psi \sin \theta dt - \cos \theta d(\sin \psi \sin \theta)] \\ & - (2 - \mu) \sin \psi \sin^2 \theta d\theta \end{aligned} \right\}, \end{aligned} \right.$$

$$(47) \quad C(d\rho + p d\alpha'' + q d\beta'' + r d\gamma'') = \sum m(x_i Y_i - y_i X_i) dt.$$

On a posé, pour plus de simplicité,

$$(48) \quad \mu = \frac{C}{A}.$$

L'équation (47) montre que lorsque p, q, r sont constants, et qu'en même temps

$$\sum m(x_i Y_i - y_i X_i) = 0,$$

la composante suivant l'axe de révolution oz , de la vitesse de rotation instantanée des axes mobiles ox, oy, oz , forme, avec la composante suivant ox , de la vitesse instantanée et apparente du solide, une somme constante pendant toute la durée du mouvement.

§ V.

Application des formules générales aux mouvements relatifs terrestres, lorsqu'on rapporte les mouvements à trois axes rectangulaires fixes sur la Terre, et qu'on n'a égard qu'au mouvement diurne.

Le point o est maintenant fixe sur la Terre; je prends arbitrairement un plan quelconque aussi fixe sur la Terre et passant par le point o , pour y placer les axes ox, oy ; de cette manière oz est entièrement arbitraire. Par le point o je mène une parallèle à la partie septentrionale de l'axe terrestre, je la projette sur le plan xoy , et je place l'axe ox sur cette projection; l'axe oy sera à gauche de ox .

Dans ces conditions, nous avons vu, dans la première section, que

l'on a les équations

$$(49) \quad p = n \sin \omega, \quad q = 0, \quad r = -n \cos \omega;$$

n désigne la vitesse angulaire de rotation de la Terre, et ω l'angle que oz fait avec la partie australe de l'axe terrestre.

Je supposerai que l'attraction de la Terre est la seule force appliquée aux différents points du corps solide; alors $X - u''$, $Y - v''$, $Z - w''$ sont les projections sur ox , oy , oz de la pesanteur proprement dite, et relative à la position déterminée par les coordonnées x , y , z . Je supposerai, en outre, que la pesanteur est constante dans toute l'étendue du corps; alors $X - u''$, $Y - v''$, $Z - w''$ sont constantes, et je pose

$$E = X - u'', \quad F = Y - v'', \quad G = Z - w''.$$

Je désigne par M la masse du corps, par x' , y' , z' les coordonnées de son centre de gravité rapportées aux axes ox , oy , oz , par x'' , y'' , z'' les coordonnées de ce centre par rapport à ox_1 , oy_1 , oz_1 , et par l la distance de ce point à l'origine o ; alors j'ai

$$\begin{aligned} \sum m [(X - u'') dx + (Y - v'') dy + (Z - w'') dz] \\ = M (E dx' + F dy' + G dz'). \end{aligned}$$

Mais, x'' , y'' , z'' étant constantes, j'ai

$$\begin{aligned} dx' &= x'' d\alpha + y'' d\alpha' + z'' d\alpha'', \\ dy' &= x'' d\beta + y'' d\beta' + z'' d\beta'', \\ dz' &= x'' d\gamma + y'' d\gamma' + z'' d\gamma''. \end{aligned}$$

Lorsque le solide est de révolution, on a

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = l,$$

et, par suite,

$$E dx' + F dy' + G dz' = M l (E d\alpha'' + F d\beta'' + G d\gamma'').$$

J'ai aussi

$$\sum m [x(Y - v'') - y(X - u'')] = M (F x' - E y') = M (F \alpha' - E \beta''),$$

$$\sum m [x, Y_1 - y, X_1] = M (x'' Y_1 - y'' X_1) = 0$$

Au moyen de ces réductions, les équations (45), (46), (47), deviennent

$$(50) \left\{ \begin{aligned} d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu\rho^2 \right) &= \frac{2Ml}{A} d(E\alpha'' + F\epsilon'' + G\gamma'') \\ d \left(\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \mu\rho \cos \theta \right) &= \frac{Ml}{A} (F\alpha'' - E\epsilon'') \\ &- n \cos \omega (\mu - 1) d. \sin^2 \theta \\ &+ n \sin \omega \left[\mu\rho \cos \psi \sin \theta dt - \mu \cos \theta d(\sin \psi \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. - (2 - \mu) \sin \psi \sin^2 \theta d\theta \right] \\ d(\rho - n \cos \omega \cos \theta + n \sin \omega \sin \theta \sin \psi) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Il est clair qu'on arriverait plus rapidement à ces dernières équations si, dès le commencement, on introduisait dans les formules les conditions exprimées par les équations (42), (49).

§ VI.

Application au pendule composé.

Je dirige l'axe *oz* suivant la verticale du point *o*, qui sera le point de suspension, et je le suppose dans le sens de la pesanteur; je désigne par γ la latitude de l'origine *o*, et j'ai

$$E = 0, \quad F = 0, \quad G = g, \quad \omega = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad \gamma' = \cos \gamma.$$

En posant

$$K = n \sin \gamma, \quad K' = n \cos \gamma, \quad \frac{l}{A} = \frac{Ml}{A},$$

les équations (50) deviennent

$$(51) \quad d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu\rho^2 - \frac{2g}{\lambda} \cos \theta \right) = 0,$$

$$(52) \left\{ \begin{aligned} d \left(\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \mu\rho \cos \theta \right) &= -K(\mu - 1) d. \sin^2 \theta \\ &+ K' [\mu\rho \cos \psi \sin \theta dt - \mu \cos \theta d(\sin \theta \sin \psi) - (2 - \mu) \sin \psi \sin^2 \theta d\theta], \end{aligned} \right.$$

$$(53) \quad d(\rho - K \cos \theta + K' \sin \theta \sin \psi) = 0.$$

Je multiplie l'équation (53) par $\mu \cos \theta$, et je la retranche ensuite de

l'équation (52); j'ai ainsi

$$(54) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \cdot \sin^2 \theta \frac{d(\psi - Kt)}{dt} = -2K' \sin \psi \sin^2 \theta d\theta + \mu \rho \sin \theta d\theta \\ + \frac{1}{2} K \mu d \cos^2 \theta + K' \mu \rho \cos \psi \sin \theta dt + K' \mu \sin \psi \sin^2 \theta d\theta. \end{array} \right.$$

L'intégrale de l'équation (53) est

$$(55) \quad \rho = \rho_0 + K(\cos \theta - \cos \theta_0) - K'(\sin \theta \sin \psi - \sin \theta_0 \sin \psi_0),$$

en désignant par l'indice 0 les valeurs initiales des variables.

Je porte cette valeur de ρ dans les équations (51) et (54), et j'ai, en supprimant les termes qui correspondent au degré de petitesse de n^2 ,

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} d \left\{ \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + 2\mu\rho_0 \left[\frac{K(\cos \theta - \cos \theta_0)}{-K'(\sin \theta \sin \psi - \sin \theta_0 \sin \psi_0)} \right] - \frac{2g}{\lambda} \cos \theta \right\} = 0, \\ d \cdot \sin^2 \theta \frac{d(\psi - Kt)}{dt} = 2K' \sin \psi \sin^2 \theta d\theta \\ + \mu \sin \theta d\theta [\rho_0 + K(\cos \theta - \cos \theta_0) - K'(\sin \theta \sin \psi - \sin \theta_0 \sin \psi_0)] \\ + \frac{1}{2} K \mu d \cos^2 \theta + K' \mu \rho_0 \cos \psi \sin \theta dt + \mu K' \sin^2 \theta \sin \psi d\theta. \end{array} \right.$$

Si à l'origine ρ_0 est nul, les équations précédentes se réduisent à

$$\begin{aligned} d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} - \frac{2g}{\lambda} \cos \theta \right) &= 0, \\ d \cdot \sin^2 \theta \frac{d(\psi - Kt)}{dt} &= -2K' \sin \psi \sin \theta d\theta \\ + \mu \sin \theta d\theta [K(\cos \theta - \cos \theta_0) - K'(\sin \psi \sin \theta - \sin \psi_0 \sin \theta_0)] \\ + \frac{1}{2} K \mu d \cos^2 \theta + \mu K' \sin^2 \theta \sin \psi d\theta. \end{aligned}$$

Dans les pendules tels qu'on les construit pour les expériences destinées à rendre sensible aux yeux le mouvement de rotation de la Terre, le rapport des deux moments d'inertie $\mu = \frac{C}{A}$ est une fraction extrêmement petite du même ordre de grandeur que n . Lorsqu'il s'agit de ces pendules, en négligeant les quantités de l'ordre de n^2 , on

peut réduire les équations à

$$(57) \quad \begin{cases} d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} - \frac{2g}{\lambda} \cos \theta \right) = 0. \\ d. \sin^2 \theta \frac{d(\psi - Kt)}{dt} = - 2 K' \sin \psi \sin \theta d\theta. \end{cases}$$

Si l'on compare ces équations avec celles que l'on a obtenues pour les pendules simples, et que l'on remarque que l'angle désigné par ψ dans ce dernier cas est égal à l'excès sur 90 degrés de l'angle désigné par ψ dans l'équation (57), on en conclura que le mouvement du pendule composé suit les mêmes lois que celui d'un pendule simple de longueur $\lambda = \frac{A}{Ml}$.

Cette conclusion exige que $\frac{C}{A}$ soit très-petit, et que ρ_0 soit nul, ou au moins assez petit pour qu'on puisse le regarder du même ordre de grandeur que u .

QUATRIÈME SECTION.

APPLICATIONS DIVERSES.

§ 1^{er}.

PROBLÈME. *Un corps solide de révolution tourne autour de son axe de figure; son centre de gravité est fixe sur la Terre; l'axe du corps est astreint à ne pas sortir d'un plan déterminé qui est aussi fixe sur la Terre, mais il a la liberté de tourner dans ce plan directeur: il s'agit de déterminer les oscillations de l'axe mobile, lorsque le centre de gravité et le plan directeur sont emportés dans le mouvement diurne.*

Je rapporte le mouvement du corps à trois axes ox , oy , oz fixes sur la Terre, et dont l'origine est au centre de gravité du solide. Je place les deux premiers axes dans le plan directeur qui est donné; alors ω est l'inclinaison de ce plan sur l'équateur de la Terre. Par le point o , je mène une parallèle à la partie septentrionale de l'axe terrestre, je la projette sur le plan directeur et je place sur sa direction

l'axe ox . Les équations (50) de la section précédente s'appliquent au mouvement du corps solide que je considère, puisque ce corps a la liberté de tourner soit autour de oz , soit autour de son axe de figure. Seulement il faut adjoindre à ces équations les conditions

$$l = 0, \quad \theta = 90^\circ,$$

qui expriment que le centre de gravité est au point o , et que l'axe de figure ne peut pas sortir du plan directeur xoy . De cette manière, les formules (50) de la section précédente se réduisent à

$$(1) \quad d\left(\frac{du^2}{dt^2} + \mu\rho^2\right) = 0,$$

$$(2) \quad \frac{d^2u}{dt^2} = -\mu n \sin \omega \rho \sin u,$$

$$(3) \quad d(\rho + n \sin \omega \cos u) = 0;$$

on a posé

$$(4) \quad u = \psi - 90^\circ.$$

Cet angle u désigne celui que l'axe du corps fait avec ox .

Les intégrales premières des équations (1) et (3) sont, en désignant par a, b deux constantes arbitraires,

$$(5) \quad \frac{du^2}{dt^2} + \mu\rho^2 = a,$$

$$(6) \quad \rho + n \sin \omega \cos u = b;$$

l'équation (5) fait voir que la force vive relative du corps tournant reste constante pendant le mouvement.

L'équation (6) montre que la composante suivant l'axe du corps de la vitesse instantanée et apparente du solide, fait avec la composante suivant le même axe de la vitesse de rotation de la Terre, une somme qui reste constante.

Je désigne par c, u_0 et ρ_0 les valeurs initiales de $\frac{du}{dt}, u, \rho$ et j'ai pour les valeurs des constantes arbitraires,

$$(7) \quad a = c^2 + \mu\rho_0^2, \quad b = \rho_0 + n \sin \omega \cos u_0.$$

Aa désigne la force vive initiale. L'équation (7) fait voir que lorsque

ρ_0 et c sont nuls, a l'est aussi, et l'équation (5) montre que $\frac{du^2}{dt^2} + \mu\rho^2$ étant constamment nuls, on a

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \rho = 0.$$

Ce qui signifie que le mobile conserve sa position apparente et son équilibre apparent, lorsqu'à l'origine la force vive est nulle.

J'élimine ρ entre les équations (5) et (6), et j'ai, en ayant égard aux équations (7),

$$\begin{aligned} \frac{du^2}{dt^2} - 2\mu\rho_0 n \sin \omega \cos u \\ = c^2 - \mu\rho_0 n \sin \omega \cos u_0 - \mu n^2 \sin^2 \omega (\cos u - \cos u_0)^2. \end{aligned}$$

Dans les expériences, on donne au corps tournant une vitesse initiale de rotation ρ_0 , très-grande par rapport à n ; mais on voit que cette vitesse n'entre pas dans le dernier terme de l'équation précédente, et que ce terme a pour facteur le carré de la fraction excessivement petite n . Dans une première approximation qui sera suffisante ici, nous négligerons ce terme et nous réduirons l'équation à

$$(8) \quad \frac{du^2}{dt^2} - 2\mu\rho_0 n \sin \omega \cos u = c^2 - 2\mu\rho_0 n \sin \omega \cos u_0$$

Sous cette forme on reconnaît l'équation d'un pendule simple dont la longueur est égale à l'unité, oscillant autour du point o dans le plan xoy , en vertu d'une force constante, parallèle à ox ou à son prolongement suivant que ρ_0 est positif ou négatif, et dont la grandeur est égale à $\mu\rho_0 n \sin \omega$.

On arriverait au même résultat, si l'on employait les équations (2), (3), au lieu de (1), (3).

La durée des oscillations très-petites de l'axe oz , du corps tournant est, d'après l'équation (8),

$$(9) \quad T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu n \rho_0 \sin \omega}};$$

de là on tire

$$(10) \quad n = \frac{\pi^2}{\mu \rho_0 \sin \omega T^2}.$$

Dans ces équations, ω désigne l'angle que la normale au plan directeur fait avec l'axe de la Terre.

Les équations (8), (9), (10) conduisent facilement aux résultats suivants :

1°. Lorsque le plan directeur est horizontal, l'axe du corps ne peut être en équilibre relatif que suivant la méridienne; cet équilibre est stable, si la rotation du mobile projetée sur l'équateur terrestre est de même sens que celle de la Terre : il est instable dans le cas opposé.

2°. Lorsque le plan directeur est le méridien, l'axe du corps ne peut être en équilibre relatif que s'il est parallèle à l'axe terrestre; l'équilibre est stable si la rotation du corps est de même sens que celle de la Terre.

Ces cas particuliers correspondent aux deux expériences connues de M. Foucault.

3°. Pour que l'axe du solide se dirige parallèlement à l'axe de la Terre, il n'est pas nécessaire que son plan directeur soit le méridien; il suffit que ce plan directeur, quelle que soit son inclinaison sur l'horizon, se trouve lui-même parallèle à l'axe de la Terre.

4°. L'axe du solide est indifférent dans son plan directeur, lorsque ce plan est perpendiculaire à l'axe terrestre.

Dans cette condition, l'appareil présente un cas analogue à celui de l'aiguille astatique imaginée par Ampère.

5°. Généralement, quelle que soit la direction du plan directeur, si l'on projette sur lui l'axe de la Terre, on aura la direction d'équilibre relatif que peut prendre l'axe du corps tournant.

Cette règle générale est analogue à celle qui donne la direction de l'aiguille aimantée, lorsque le plan de la boussole est quelconque.

6°. Lorsque l'axe du corps est hors de sa ligne d'équilibre, il oscille dans le plan directeur autour de sa position d'équilibre stable. Ses oscillations, grandes et petites, suivent les mêmes lois que celles des pendules.

7°. Si l'on fait osciller l'axe du corps tour à tour dans le méridien et dans le plan horizontal, la rotation primitivement donnée au mobile autour de son axe restant la même, on trouve que les oscillations dans le méridien sont plus rapides que les autres.

8°. La durée des oscillations dans le méridien peut servir à déter-

miner la durée de la révolution de la Terre. On tire, en effet, de l'équation (10),

$$n = \frac{\pi}{\mu \rho_0 T^2}, \text{ lorsque } \omega = 90^\circ.$$

9°. Si l'on compare les carrés des nombres d'oscillations exécutées dans le plan horizontal et dans le méridien pour une même vitesse initiale de rotation du corps, leur rapport donne le cosinus de la latitude; si les rotations initiales n'étaient pas les mêmes, il n'y aurait qu'à multiplier le rapport précédent par le rapport renversé des vitesses de rotation.

Il suit de ces diverses propositions, qu'un expérimentateur, sans sortir de son cabinet, sans voir le ciel, peut déterminer la direction suivant laquelle le ciel paraît immobile, le sens dans lequel les étoiles paraissent tourner, la durée de leur révolution, ou plutôt la durée de la révolution terrestre.

Sans doute, ces déterminations ne peuvent atteindre la précision qu'on obtient dans la mesure des éléments du mouvement terrestre; cependant il est bon de les signaler, parce que je ne crois pas que, jusqu'ici, on ait indiqué qu'elles peuvent se faire, au moins au point de vue spéculatif, par l'observation des oscillations d'un corps. Au reste, il me semble qu'une personne, même obstinée, ne pourrait pas résister à ce mode de démonstration du mouvement de la Terre.

Au lieu d'astreindre l'axe du corps solide à rester sur un plan directeur fixe, on pourrait l'obliger à ne pas sortir de la surface d'un cône droit dont l'axe passe par le point o et a une direction fixe sur la Terre. En prenant cet axe pour la ligne oz , il est clair que θ restera constant et égal au demi-angle du cône, que je désignerai par ϵ . D'après cela, les équations (50) de la section précédente donnent, lorsque le point o est le centre de gravité du corps,

$$d \left(\sin^2 \epsilon \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu \rho^2 \right) = 0,$$

$$\sin^2 \epsilon \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \mu n \rho \sin \omega \cos \psi,$$

$$d(\rho + n \sin \omega \sin \epsilon \sin \psi) = 0.$$

Ces équations se discutent de la même manière que les précédentes, et l'on en déduit les résultats suivants :

L'axe du solide tournant a sa position d'équilibre dans un plan mené par l'axe du cône parallèlement à l'axe terrestre. Ses oscillations autour de la position d'équilibre stable ont pour durée

$$T = \pi \sqrt{\frac{\sin \varepsilon}{\mu n \rho_0 \sin \omega}}.$$

Cette formule coïncide avec l'équation (9), lorsque $\varepsilon = 90^\circ$, auquel cas le cône directeur se change en un plan directeur.

En discutant les équations (1), (2), (3), j'ai supposé que ρ_0 est très-grand par rapport à n , afin d'arriver aux résultats qu'on peut obtenir par l'expérience ; mais on pourrait examiner les particularités curieuses que présentent ces équations, lorsque ρ_0 est très-petit : cet examen n'offre au reste aucune difficulté.

§ II.

PROBLÈME. *Un corps solide de révolution peut librement tourner autour de son centre de gravité, qui est un point fixe de la Terre; on place son axe de figure suivant une direction quelconque, fixe par rapport à la Terre, et pendant qu'on le maintient dans cette position, on imprime, par un procédé quelconque, un mouvement de rotation apparente au solide; on abandonne ensuite le corps à lui-même en délivrant l'axe de figure, et l'on demande de déterminer le mouvement relatif de ce corps, lorsqu'on suppose le centre de gravité emporté dans le mouvement diurne.*

Je rapporte le mouvement du corps à trois axes rectangulaires ox , oy , oz fixes sur la Terre; je place l'origine o au centre de gravité, et je dirige l'axe oz parallèlement à la partie australe de l'axe terrestre. Dans ces conditions, $\omega = 0$, et les équations (50) de la section précédente se réduisent à

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} d \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu \rho^2 \right) = 0, \\ d \left(\sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \mu \rho \cos \theta \right) = n(1 - \mu) d \sin^2 \theta. \quad d(\rho - n \cos \theta) = 0. \end{array} \right.$$

m, m', m'' étant des constantes arbitraires, les intégrales premières des équations (1) sont

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu\rho^2 = m, \\ \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + \mu\rho \cos \theta = n(1 - \mu) \sin^2 \theta + m', \\ \rho = n \cos \theta + m''. \end{array} \right.$$

Si l'on remarque que, d'après la section précédente, la force vive apparente du solide est

$$A \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu\rho^2 \right),$$

on peut conclure des équations (2) que la force vive relative est constante, et que la composante suivant l'axe de figure de la vitesse instantanée de la rotation apparente du corps fait, avec la composante suivant cet axe de la vitesse angulaire de la Terre $- n \cos \theta$, une somme constante.

Si l'on pose

$$n = 0,$$

les équations (2) se réduisent à trois équations connues de la Mécanique.

La vitesse angulaire et instantanée de la rotation apparente du solide est à une époque quelconque, d'après l'équation (17) de la section précédente,

$$(3) \quad \bar{\omega} = \sqrt{\varpi^2 + \gamma^2 + \rho^2};$$

les cosinus des angles que l'axe instantané apparent fait avec les axes ox_1, oy_1, oz_1 , ou avec le système ox, oy, oz , sont donnés par les expressions (18), (19) de la section précédente. D'après l'énoncé du problème, l'axe de figure est, à l'origine, l'axe instantané apparent : on a donc, d'après les valeurs (18), pour $t = 0$,

$$(4) \quad \varpi_0 = 0, \quad \gamma_0 = 0, \quad \rho_0 = \bar{\omega}_0.$$

On indique ici par l'indice 0 les valeurs initiales des quantités variables.

Au moyen des valeurs (4), les équations (41) de la section précédente donnent, pour $t = 0$,

$$(5) \quad \frac{d\theta_0}{dt} = \alpha, \quad \frac{d\psi_0}{dt} = 0,$$

conditions qui sont évidemment remplies à l'origine, d'après l'énoncé du problème.

Les constantes arbitraires déterminées par les données initiales ont pour valeur

$$(6) \quad \begin{cases} m = \mu\rho_0^2, \\ m' = \mu\rho_0 \cos \theta_0 + n(\mu - 1) \sin^2 \theta_0, \\ m'' = \rho_0 - n \cos \theta_0, \end{cases}$$

et les équations (2) deviennent

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} = \mu(\rho_0^2 - \rho^2), \\ \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = \mu(\rho_0 \cos \theta_0 - \rho \cos \theta) - n(\mu - 1)(\cos^2 \theta_0 - \cos^2 \theta), \\ \rho = \rho_0 + n(\cos \theta - \cos \theta_0). \end{cases}$$

Pour séparer les variables, j'élimine d'abord ρ , et j'ai

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \\ = \mu n (\cos \theta_0 - \cos \theta) [2\rho_0 - n(\cos \theta_0 - \cos \theta)], \\ \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} \\ = (\cos \theta_0 - \cos \theta) [\mu\rho_0 + n(\cos \theta_0 + \cos \theta) - \mu n \cos \theta_0]. \end{cases}$$

Je multiplie la première de ces équations par $\sin^2 \theta$, et je retranche le carré de la seconde,

$$(9) \quad \begin{cases} \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left[\mu^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0) (\cos \theta - \cos \theta_0) \right. \\ \left. + 2n\mu\rho_0 \sin^2 \theta_0 \right] \\ - n^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2 \{ \mu \sin^2 \theta + [(\mu - 1) \cos \theta_0 - \cos \theta]^2 \}. \end{cases}$$

Cette équation peut servir pour déterminer θ en fonction de t . En

éliminant dt entre l'équation (9) et la deuxième équation (8), on aura une relation entre ψ , θ , qui servira à déterminer ψ .

Lorsque ρ_0 est nul, l'équation (9) se réduit à

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} \\ &= -n^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta)^2 \{ \mu \sin^2 \theta + [(\mu - 1) \cos \theta_0 - \cos \theta]^2 \}. \end{aligned}$$

Pour que le second membre soit positif en même temps que le premier, il faut que θ soit constamment égal à θ_0 , puisque $-n^2$ est multiplié par des facteurs essentiellement positifs. Cette condition de $\theta = \theta_0$ entraîne, dans la deuxième équation (8),

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \psi_0.$$

Ainsi, dans le cas particulier que nous considérons, l'axe du corps reste fixe par rapport à la Terre, malgré le mouvement diurne; le corps lui-même ne prend aucune rotation relative, car la troisième équation (7) donne

$$\rho = 0.$$

C'est, au reste, ce que l'on peut conclure aussi de l'équation (2) des forces vives relatives; car si, à l'origine, la force vive est nulle, cette force vive devra rester constamment nulle, ce qui exige que les trois termes $\frac{d\theta^2}{dt^2}$, $\sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2}$, $\mu \rho^2$ du premier membre de la première équation (2) soient séparément nuls.

Dans les expériences, on donne à ρ_0 une très-grande valeur par rapport à n ; lorsque cela a lieu, comme la dernière partie de l'équation (9) ne contient pas le facteur ρ_0 , et qu'elle a le facteur excessivement petit n^2 , je négligerai cette partie de l'équation (9) dans une première approximation qui sera ici suffisante; on pourrait au reste aller au delà par la méthode des approximations successives. Nous verrons plus loin qu'en conservant les équations complètes, on arrive aux mêmes conséquences générales. Je réduis, d'après cela, l'équation (9) à

$$(10) \left\{ \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\cos \theta_0 - \cos \theta) \left[\begin{array}{l} \mu^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0) (\cos \theta - \cos \theta_0) \\ + 2n \mu \rho_0 \sin^2 \theta_0 \end{array} \right] \right.;$$

la quantité $\frac{2n \sin^2 \theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n \cos \theta_0)}$ est extrêmement petite: par conséquent, la différence $\cos \theta_0 - \frac{2n \sin^2 \theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n \cos \theta_0)}$ sera généralement comprise entre $+1$ et -1 ; il en sera toujours ainsi lorsqu'à l'origine la partie de l'axe du corps pour laquelle ρ_0 est positif ne sera pas placée de manière à être presque parallèle à la partie nord de l'axe terrestre. En admettant ces conditions remplies, et en désignant par α un angle compris entre 0 et 180° , je poserai

$$(11) \quad \cos \alpha = \cos \theta_0 - \frac{2n \sin^2 \theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} \quad \text{et} \quad h^2 = \mu^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0);$$

de cette manière l'équation (10) devient

$$(12) \quad \sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} = h^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \alpha).$$

On voit par là que l'axe du corps ne conserve pas une inclinaison rigoureusement constante sur l'axe de la Terre, que cette inclinaison varie entre les limites excessivement rapprochées θ_0 et α . Je pose

$$(13) \quad \cos \theta = \cos \theta_0 \cos^2 x + \cos \alpha \sin^2 x,$$

en désignant par x une variable auxiliaire; par ce changement de variable, je tire de l'équation (12),

$$(14) \quad h dt = 2 dx \quad \text{ou} \quad x = \frac{ht}{2}.$$

J'ai supposé la constante arbitraire nulle, car, d'après l'équation (13), on peut faire commencer en même temps les variables t et x . Les équations (13) et (14) donnent

$$(15) \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + \cos \alpha}{2} + \frac{\cos \theta_0 - \cos \alpha}{2} \cos ht;$$

en ayant égard à l'équation (11), on a

$$(16) \quad \cos \theta = \cos \theta_0 - \frac{n \sin^2 \theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} + \frac{n \sin^2 \theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} \cos ht.$$

En portant cette valeur de $\cos \theta$ dans la deuxième équation (8),

on a

$$(17) \frac{d\psi}{dt} = \frac{n \sin^2 \theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} \frac{(1 - \cos ht)}{\sin^2 \theta} [\mu \rho_0 + n(\cos \theta + \cos \theta_0 - \mu \cos \theta_0)].$$

On pourrait intégrer cette équation par la méthode des séries, et nous en donnerons un exemple plus loin ; mais il suffira ici d'obtenir la valeur de ψ par l'approximation qui correspond à la suppression des termes d'un ordre de petitesse plus élevé que celui de n . Ainsi, nous réduirons l'équation (17) à

$$(18) \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{n \rho_0}{\rho_0 - 2n \cos \theta_0} (1 - \cos ht);$$

l'intégrale de cette équation est

$$\psi - \psi_0 = \frac{n \rho_0}{\rho_0 - 2n \cos \theta_0} t - \frac{n \rho_0}{\rho_0 - 2n \cos \theta_0} + \frac{1}{h} \sin ht,$$

ou sensiblement

$$(19) \quad \psi - \psi_0 = nt - \frac{n}{\mu \rho_0} \sin ht.$$

Considérons d'abord les équations (16) et (19) dans leurs parties principales $\cos \theta_0$ et nt . Ces équations représenteront alors le mouvement d'un axe qui tourne uniformément autour d'une parallèle à l'axe terrestre, en allant en sens opposé du mouvement de la Terre, avec une vitesse angulaire égale à celle de la Terre, et en conservant une inclinaison constante sur la ligne du monde; en d'autres termes, ces équations représentent le mouvement d'une lunette parallatique. Si on prend les équations complètes, on voit que l'axe du corps tournant suit le chemin d'une lunette parallatique avec un mouvement de nutation circulaire excessivement peu étendu. Le diamètre du cercle de nutation est la quantité très-petite $\frac{2n \sin \theta_0}{\mu \rho_0}$, et la durée de la nutation est $\frac{2\pi}{n}$ ou sensiblement $\frac{2\pi}{\mu \rho_0}$.

Les calculs qui précèdent conduisent aux résultats suivants :

1°. Si le corps mobile ne reçoit aucune rotation artificielle et est placé en équilibre relatif sur la Terre, lorsqu'on l'abandonnera à lui-

même, il persistera dans son état d'équilibre relatif, soit que la Terre tourne ou qu'elle ne tourne pas.

2°. Si le corps a primitivement reçu une vitesse de rotation très-considérable autour de son axe de figure et qu'on ait placé cet axe en équilibre relatif sur la Terre avant d'abandonner le mobile à lui-même, cet axe persistera indéfiniment dans son état d'équilibre relatif, si la Terre ne tourne pas; mais si la Terre tourne, cet axe sortira de lui-même de la position d'équilibre relatif qu'on lui a donnée, il prendra en quelque sorte un mouvement spontané, un mouvement sans cause extérieure apparente pour un observateur qui ne connaîtrait pas le mouvement terrestre.

3°. Le sens dans lequel se fait le déplacement relatif de l'axe, dans ce mouvement spontané apparent, ne dépend pas du sens dans lequel la rotation artificiellement donnée au corps s'effectue; il est toujours contraire à celui du mouvement de la Terre, et peut, par cela même, faire connaître ce dernier.

4°. La rotation de la Terre est si bien empreinte dans le mouvement relatif que l'axe du corps tournant semble prendre spontanément, que si l'on pouvait exécuter l'expérience dans toute la rigueur des conditions abstraites du problème, on en déduirait et la direction de l'axe terrestre et même la vitesse de rotation de la Terre.

5°. Tant que la rotation du corps persiste à des degrés divers, pourvu qu'elle reste notable, si l'axe est arrêté un moment par suite d'un obstacle quelconque, aussitôt que l'obstacle disparaîtra, l'axe du corps sortira de nouveau de l'état d'équilibre relatif, et il en sortira chaque fois que les mêmes conditions se renouvelleront; c'est dans cette tendance persistante qu'a l'axe du corps à sortir de son équilibre relatif, qu'on trouve la raison d'espérer qu'on pourra réussir à manifester expérimentalement ce résultat du mouvement de la Terre. On connaît sur ce sujet les expériences de M. Foucault.

Les conclusions générales auxquelles nous venons d'arriver étant obtenues en réduisant les équations à leurs parties principales, il est bon maintenant d'examiner jusqu'à quel point elles sont indépendantes de ces réductions. Pour cela, je traiterai d'abord d'une manière complète le cas particulier où le solide de révolution est une sphère

homogène ou un corps composé de couches sphériques homogènes : dans ce cas, on a

$$\mu = 1;$$

je considérerai ensuite ce qui a lieu lorsque μ n'est pas égal à l'unité.

Lorsque $\mu = 1$, les équations générales deviennent

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = [\rho_0(\rho_0 - 2n \cos \theta_0) + n^2] (\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ \times \left[\left(\cos \theta - \cos \theta_0 + \frac{2n\rho_0 \sin^2 \theta_0}{\rho_0(\rho_0 - 2n \cos \theta_0) + n^2} \right) \right], \end{array} \right.$$

$$(21) \quad \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} = (\cos \theta_0 - \cos \theta) (\rho_0 + n \cos \theta).$$

La quantité

$$\rho_0(\rho_0 - 2n \cos \theta_0) + n^2$$

peut s'écrire ainsi :

$$(\rho_0 - n)^2 + 4n \rho_0 \sin^2 \frac{1}{2} \theta_0;$$

or, rien n'empêche de placer l'axe oz_1 sur la partie de l'axe de figure pour laquelle la rotation initiale s'effectue de droite à gauche, et, par suite, de regarder ρ_0 comme positif: en agissant ainsi, on voit que la quantité précédente est toujours positive; on la représentera par h^2 et on posera

$$(22) \quad h^2 = \rho_0(\rho_0 - 2n \cos \theta_0) + n^2.$$

Je pose, en outre,

$$(23) \quad H = \cos \theta_0 - \frac{2n \rho_0 \sin^2 \theta_0}{h^2}.$$

H est, d'après cette expression, toujours compris entre $+1$ et -1 , par suite, il peut être représenté par le cosinus d'un angle θ' compris entre 0 et 180° ; je pose

$$(24) \quad H = \cos \theta'.$$

D'après l'équation (23), on voit que θ' est plus grand que θ_0 ou égal à θ_0 lorsque $\theta_0 = 0$; j'écris maintenant l'équation (20) de la manière

suivante :

$$(25) \quad \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = h^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta').$$

Cette équation montre que les seules valeurs admissibles de θ , c'est-à-dire celles qui rendent le second membre positif, sont comprises entre θ_0 et θ' . En général, θ_0 et θ' diffèrent de 0° ou de 180° , en sorte que $\sin \theta$ n'est pas nul. On voit par l'équation (25) que $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut être nul que lorsque θ est égal à θ_0 ou à θ' . Il suit de là, que l'inclinaison de l'axe primitif de rotation sur l'axe terrestre est continuellement variable et oscille entre les limites extrêmes θ_0 et θ' .

Pour connaître les oscillations de l'axe du corps par rapport à la direction de l'axe terrestre, je pose

$$(26) \quad \cos \theta = \cos \theta_0 \cos^2 x + \cos \theta' \sin^2 x;$$

d'où je tire

$$(27) \quad \begin{cases} \cos \theta_0 - \cos \theta = (\cos \theta_0 - \cos \theta') \sin^2 x, \\ \cos \theta - \cos \theta' = (\cos \theta_0 - \cos \theta') \cos^2 x, \\ \sin \theta d\theta = (\cos \theta_0 - \cos \theta') 2 \sin x \cos x dx. \end{cases}$$

L'équation (25) donne

$$(28) \quad hdt = \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{(\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta')}},$$

lorsque dt est positif; on prendra le radical avec le signe + ou le signe -, suivant que $d\theta$ sera positif ou négatif. Quel que soit ce signe, l'équation (28) donne, au moyen des équations (27),

$$(29) \quad hdt = 2 dx,$$

d'où

$$x = \frac{ht}{2}.$$

On suppose, dans cette intégrale, que la variable auxiliaire x commence en même temps que t ; cette supposition est autorisée par l'équation (26) qui définit la variable x . Au moyen de cette valeur de x ,

on a, d'après l'équation (26),

$$(30) \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta'}{2} + \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{2} \cos ht;$$

on voit par là que la variable θ suit les mêmes lois que l'écart d'un pendule conique par rapport à la verticale, et que la durée de la période est

$$(31) \quad T = \frac{2\pi}{h}.$$

J'élimine dt entre les équations (29) et (21), et j'ai

$$hd\psi = \frac{2(\cos \theta_0 - \cos \theta)(\rho_0 + n \cos \theta) dx}{\sin^2 \theta};$$

au moyen de l'équation (27), cette équation devient d'abord

$$hd\psi = \frac{(\cos \theta_0 - \cos \theta')(1 - \cos 2x) \left[\rho_0 + \frac{n(\cos \theta_0 + \cos \theta')}{2} + \frac{n(\cos \theta_0 - \cos \theta')}{2} \cos 2x \right] dx}{\sin^2 \theta}.$$

Je pose

$$(32) \quad \begin{cases} A_0 = \rho_0 + \frac{n(\cos \theta_0 + 3 \cos \theta')}{4}, \\ A_1 = -\rho_0 - n \cos \theta', \\ A_2 = \frac{n(\cos \theta_0 - \cos \theta')}{4}. \end{cases}$$

et l'équation précédente devient

$$(33) \quad \begin{cases} 2hd\psi = (\cos \theta_0 - \cos \theta')(A_0 + A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x) \\ \quad \times \left(\frac{1}{1 - \cos \theta} + \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) dx. \end{cases}$$

On tire de l'équation (26)

$$1 + \cos \theta = \frac{2 + \cos \theta_0 + \cos \theta' + (\cos \theta_0 - \cos \theta') \cos 2x}{2},$$

$$1 - \cos \theta = \frac{2 - \cos \theta_0 - \cos \theta' - (\cos \theta_0 - \cos \theta') \cos 2x}{2}.$$

Je désigne par 2μ et 2ν deux angles plus petits que 90° , et tels que l'on ait

$$(34) \quad \begin{cases} \sin 2\mu = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{2 + \cos \theta_0 + \cos \theta'}, \\ \sin 2\nu = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{2 - \cos \theta_0 - \cos \theta'}; \end{cases}$$

on déduit de là

$$2 + \cos \theta_0 + \cos \theta' = (\cos \theta_0 - \cos \theta') \frac{1 + \tan^2 \mu}{2 \tan \mu},$$

$$2 - \cos \theta_0 - \cos \theta' = (\cos \theta_0 - \cos \theta') \frac{1 + \tan^2 \nu}{2 \tan \nu}.$$

D'après ces valeurs, on a

$$(35) \quad \begin{cases} \frac{1}{1 + \cos \theta} = \frac{4 \tan \mu}{\cos \theta_0 - \cos \theta'} (1 + \tan^2 \mu + 2 \tan \mu \cos 2x)^{-1}, \\ \frac{1}{1 - \cos \theta} = \frac{4 \tan \nu}{\cos \theta_0 - \cos \theta'} (1 + \tan^2 \nu - 2 \tan \nu \cos 2x)^{-1}; \end{cases}$$

on connaît les formules suivantes, qu'on peut déduire d'un théorème d'Euler:

$$(36) \quad \begin{cases} (1 + \tan^2 \mu + 2 \tan \mu \cos 2x)^{-1} \\ = \frac{1}{1 - \tan^2 \mu} (1 - 2 \tan \mu \cos 2x + \tan^2 \mu \cos 4x - \dots), \\ (1 + \tan^2 \nu - 2 \tan \nu \cos 2x)^{-1} \\ = \frac{1}{1 - \tan^2 \nu} \left[1 + 2 \tan \nu \cos 2x + 2 \tan^2 \nu \cos 4x \right. \\ \left. + 2 \tan^3 \nu \cos 6x + 2 \tan^4 \nu \cos 8x + \dots \right]. \end{cases}$$

Si l'on multiplie chacune des équations (36) par le trinôme

$$A_0 + A_1 \cos 2x + A_2 \cos 4x,$$

on obtient deux nouvelles séries, que je désignerai par

$$\frac{B_0 + B_1 \cos 2x + B_2 \cos 4x + B_3 \cos 6x + \dots + B_i \cos 2ix + \dots}{1 - \tan^2 \mu},$$

$$\frac{C_0 + C_1 \cos 2x + C_2 \cos 4x + \dots + C_i \cos 2ix + \dots}{1 - \tan^2 \nu};$$

et les coefficients de ces séries sont

$$(37) \begin{cases} B_0 = A_0 - A_1 \operatorname{tang} \mu + A_2 \operatorname{tang}^2 \mu, \\ B_1 = -2 A_0 \operatorname{tang} \mu + (A_1 - A_2 \operatorname{tang} \mu) (1 + \operatorname{tang}^2 \mu), \\ B_2 = 2 A_0 \operatorname{tang}^2 \mu - A_1 \operatorname{tang} \mu (1 - \operatorname{tang} \mu) + A_2 (2 + \operatorname{tang}^2 \mu); \\ \dots \end{cases}$$

$$(38) \begin{cases} C_0 = A_0 + A_1 \operatorname{tang} \nu + A_2 \operatorname{tang}^2 \nu, \\ C_1 = 2 A_1 \operatorname{tang} \nu + (A_1 + A_2 \operatorname{tang} \nu) (1 + \operatorname{tang}^2 \nu), \\ C_2 = 2 A_0 \operatorname{tang}^2 \nu + A_1 \operatorname{tang} \nu (1 + \operatorname{tang} \nu) + A_2 (2 + \operatorname{tang}^2 \nu). \\ \dots \end{cases}$$

Au moyen de ces expressions, l'équation (33) devient

$$(39) \begin{cases} h d\psi = 2 \frac{\operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu} (B_0 + B_1 \cos 2x + B_2 \cos 4x + \dots) dx \\ \quad + \frac{2 \operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang}^2 \nu} (C_0 + C_1 \cos 2x + C_2 \cos 4x + \dots) dx, \end{cases}$$

d'où

$$\frac{h}{2} (\psi - \psi_0) = \frac{\operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu} \left(B_0 x + \frac{1}{2} B_1 \sin 2x + \frac{1}{4} B_2 \sin 4x + \dots \right) \\ + \frac{\operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang}^2 \nu} \left(C_0 x + \frac{1}{2} C_1 \sin 2x + \frac{1}{4} C_2 \sin 4x + \dots \right);$$

ou bien, à cause de l'équation (29),

$$(40) \begin{cases} \psi - \psi_0 = \frac{\operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu} \left(B_0 t + \frac{1}{h} \sum_1^\infty \frac{B_i}{i} \sin iht \right) \\ \quad + \frac{\operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang}^2 \nu} \left(C_0 t + \frac{1}{h} \sum_1^\infty \frac{C_i}{i} \sin iht \right). \end{cases}$$

Je désigne par $\frac{1}{2} \Psi$ la différence des valeurs de Ψ correspondant à $t = \frac{j\pi}{h}$ et à $t = \frac{(j+1)\pi}{h}$, j étant un nombre entier; l'équation (40)

donne

$$(41) \quad \frac{1}{2} \Psi = \frac{\pi}{h} \cdot \left(B_0 \frac{\operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu} + C_0 \frac{\operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang}^2 \nu} \right).$$

On voit que cette valeur de $\frac{1}{2} \Psi$ est indépendante du nombre entier j .

Il suit de là que la projection de l'axe du corps sur le parallèle terrestre tourne en décrivant, autour du centre de gravité, des angles qui croissent suivant les termes d'une progression arithmétique dont la raison est $\frac{1}{2} \Psi$, lorsque le temps croît suivant les termes d'une progression arithmétique commençant par zéro et ayant pour raison la quantité

$$\frac{1}{2} T = \frac{\pi}{h}.$$

Nous pouvons appeler vitesse moyenne le quotient des raisons de ces deux progressions, et en désignant par V cette vitesse, on a

$$(42) \quad V = B_0 \frac{\operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu} + C_0 \frac{\operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang}^2 \nu};$$

pour connaître le sens de cette vitesse et sa grandeur, il suffit d'examiner le signe de V ; la rotation se fera de droite à gauche ou en sens contraire du mouvement terrestre, lorsque V sera positif.

Les angles μ et ν sont plus petits que 45 degrés, par conséquent les quotients $\frac{\operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu}$, $\frac{\operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang}^2 \nu}$ sont positifs; il est facile de transformer ces valeurs de la manière suivante. On tire des équations (34)

$$\cos 2 \mu = 4 \frac{\cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta'}{2}}{2 + \cos \theta_0 + \cos \theta'};$$

or, on a en général

$$\operatorname{tang}^2 \mu = \frac{1 - \cos 2 \mu}{1 + \cos 2 \mu}.$$

Au moyen de l'expression précédente, on en déduit

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \mu &= \frac{\cos \frac{\theta_0}{2} - \cos \frac{\theta'}{2}}{\cos \frac{\theta_0}{2} + \cos \frac{\theta'}{2}}, \\ 1 - \operatorname{tang}^2 \mu &= \frac{4 \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta'}{2}}{\left(\cos \frac{\theta_0}{2} + \cos \frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\ 1 + \operatorname{tang}^2 \mu &= \frac{2 + \cos \theta_0 + \cos \theta'}{\left(\cos \frac{\theta_0}{2} + \cos \frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\ \frac{\operatorname{tang} \mu}{1 - \operatorname{tang}^2 \mu} &= \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{8 \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta'}{2}}; \end{aligned} \right.$$

de la même manière, on obtient

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{tang} \nu &= -\frac{\sin \frac{1}{2} \theta_0 - \sin \frac{1}{2} \theta'}{\sin \frac{1}{2} \theta_0 + \sin \frac{1}{2} \theta'}, \\ 1 - \operatorname{tang}^2 \nu &= \frac{4 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta'}{2}}{\left(\sin \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\ 1 + \operatorname{tang}^2 \nu &= \frac{2 - \cos \theta_0 - \cos \theta'}{\left(\sin \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\ \frac{\operatorname{tang} \nu}{1 - \operatorname{tang}^2 \nu} &= \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{8 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta'}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Pour abréger, je pose

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{\rho_0^2 \sin^2 \theta_0}{\rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0) + n^2} = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - 2 \frac{n}{\rho_0} \cos \theta_0 + \left(\frac{n}{\rho_0}\right)^2}, \\ Q &= \frac{1}{\cos \frac{\theta_0}{2} + \cos \frac{\theta'}{2}}, \quad R = \frac{1}{\sin \frac{\theta_0}{2} + \sin \frac{\theta'}{2}}; \end{aligned} \right.$$

au moyen des équations (22), (23), (24), (43), (44), (45), la valeur de V donnée par l'équation (42) devient

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} V = n \frac{P}{4 \cos \frac{\theta_0}{2} \cos \frac{\theta'}{2}} & \left\{ 1 + \frac{n}{\rho_0} (\cos \theta_0 + PQ^2) - \left(\frac{n}{\rho_0} \right)^2 P (Q^2 \cos \theta_0 - \frac{3}{2}) \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{n}{\rho_0} \right)^3 P^2 Q^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\rho_0} \right)^4 P^3 Q^4 \right\} \\ + n \frac{P}{4 \sin \frac{\theta_0}{2} \sin \frac{\theta'}{2}} & \left\{ 1 + \frac{n}{\rho_0} (\cos \theta_0 - PR^2) - \left(\frac{n}{\rho_0} \right)^2 P (R^2 \cos \theta_0 + \frac{3}{2}) \right. \\ & \left. - 2 \left(\frac{n}{\rho_0} \right)^3 R^2 P^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{n}{\rho_0} \right)^4 R^4 P^3 \right\} \end{aligned} \right.$$

La valeur de V que nous venons d'obtenir est indépendante de toute hypothèse faite sur les grandeurs relatives de ρ_0 et n . Dans les applications, la vitesse angulaire de la Terre est une fraction très-petite, la vitesse angulaire ρ_0 est un nombre plus grand que l'unité, puisque, si le corps solide tournant ne faisait qu'un demi-tour par seconde, on aurait

$$\rho_0 = \pi,$$

et que pour un nombre quelconque p de tours par seconde, on a

$$\rho_0 = 2 p \pi.$$

D'après cela, on peut négliger dans la valeur de V , développée suivant les puissances de $\frac{n}{\rho_0}$, le produit de $\frac{n}{\rho_0}$ et de ses diverses puissances par n , et alors l'équation (46) donne

$$(47) \quad V = n.$$

Dans les conditions que nous venons d'indiquer et qui sont celles des expériences, la projection sur un parallèle terrestre de l'axe du corps solide tourne en sens contraire de la rotation terrestre, avec une vitesse moyenne égale à la vitesse angulaire de la Terre. Au même degré d'approximation, on a

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} \cos \theta &= \cos \theta_0 - \frac{n \sin^2 \theta_0}{\rho_0} + \frac{n \sin^2 \theta_0}{\rho_0} \cos ht, \\ \psi - \psi_0 &= nt - \frac{n}{\rho_0} \sin ht. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions nous montrent que θ est sensiblement constant, et que $\psi - \psi_0$ est égal sensiblement à nt . Si l'on fait d'abord abstraction des parties périodiques qui entrent dans les équations (48), on dira que l'axe du solide tournant se meut autour d'une parallèle à l'axe terrestre, en conservant sur cette ligne une inclinaison constante, que sa vitesse angulaire est égale à celle de la Terre, et dirigée en sens contraire de la rotation terrestre; en d'autres termes, l'axe du solide se mouvra comme une lunette parallatique. En tenant compte des parties périodiques dans les équations (48), on voit que l'axe du solide décrit le chemin d'une lunette parallatique avec un mouvement de nutation circulaire d'une étendue excessivement petite, le diamètre du cercle de nutation étant $\frac{2n \sin \theta_0}{\rho_0}$, et la durée de la période ayant pour valeur $\frac{2\pi}{h}$ ou sensiblement $\frac{2\pi}{\rho_0}$. Si l'on suppose $\rho_0 = 60$, l'angle $\frac{2n}{\rho_0}$ correspond à $\frac{1''}{2}$. Pour ce cas, le diamètre du cercle de nutation, pris sur un cercle de 0^m,36 de contour, s'étendrait sur une longueur plus petite que $\frac{1}{72000}$ de millimètre. Dans les expériences, telles qu'on les a exécutées jusqu'ici, on peut évidemment faire abstraction de la nutation que nous venons d'indiquer.

Je considère maintenant le mouvement du solide, lorsque les moments principaux d'inertie C, A ne sont pas égaux, et j'écris l'équation (9) comme il suit :

$$(49) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = \mu^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0) (\cos \theta_0 - \cos \theta) \\ \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \theta - \cos \theta_0 + \frac{2n \sin^2 \theta_0}{\mu (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} + \frac{n^2}{\mu^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} (\cos \theta - \cos \theta_0) \\ \times \{ \mu \sin^2 \theta + [(\mu - 1) \cos \theta_0 - \cos \theta]^2 \} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On peut placer oz , sur l'une ou l'autre des deux parties de l'axe de figure du corps tournant; nous le mettrons de manière que θ_0 soit positif. Dans les expériences, ρ_0 est une très-grande quantité par rapport à n ; nous pourrions donc regarder $\mu^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)$ comme positif; il serait, au reste, aisé de discuter les cas particuliers où $\rho_0 = 2n \cos \theta_0$ et où ρ_0 est plus petit que $2n \cos \theta_0$. Dans cette suppo-

sition, je pose

$$(50) \quad h^2 = \mu^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0),$$

et l'équation précédente devient

$$(51) \quad \sin^2 \theta \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \pm h^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - M) (\cos \theta - N) (P - \cos \theta),$$

en désignant par M, N, P les racines de l'équation

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - \cos \theta_0 + \frac{2\mu\rho_0 n \sin^2 \theta_0}{h^2} \\ + \frac{n^2}{h^2} (x - \cos \theta_0) \{ \mu(1 - x^2) + [x - (\mu - 1) \cos \theta_0]^2 \} = 0, \end{array} \right.$$

et en prenant le signe + ou le signe - , suivant que le coefficient du terme du troisième degré dans le polynôme précédent est négatif ou positif.

L'équation (51) convient à tous les cas qui peuvent se présenter; dans les expériences, on donne à ρ_0 non pas une valeur très-petite et de même ordre que n , mais une valeur très-grande par rapport à n , en sorte que la quantité

$$\frac{2\mu\rho_0 n \sin^2 \theta_0}{h^2} = 2 \frac{n}{\rho_0} \sin^2 \theta_0 \frac{1}{\mu \left(1 - 2 \frac{n}{\rho_0} \cos \theta_0 \right)}$$

est une fraction extrêmement petite. Si on ne place pas, à l'origine du mouvement, l'axe de figure du solide extrêmement près de la direction parallèle à la partie nord de l'axe terrestre, si $\cos \theta_0$ diffère assez de - 1 pour que la différence soit plus grande que $\frac{2\mu\rho_0 n \sin^2 \theta_0}{h^2}$: alors

la quantité $\cos \theta_0 - \frac{2\mu\rho_0 n \sin^2 \theta_0}{h^2}$ sera comprise entre + 1 et - 1, et pourra être représentée par le cosinus d'un angle α , compris entre 0 et 180 degrés. Les conditions que nous venons de considérer sont toujours réalisées dans les expériences; lorsqu'elles ont lieu, nous poserons

$$(53) \quad \cos \alpha = \cos \theta_0 - \frac{2\mu\rho_0 n \sin^2 \theta_0}{h^2},$$

et l'équation (52) deviendra

$$(54) \quad x - \cos \alpha + \frac{n^2}{h^2} (x - \cos \theta_0) \{ \mu (1 - x^2) + [x - (\mu - 1) \cos \theta_0]^2 \} = 0.$$

Si l'on fait

$$x = \cos \theta_0 \quad \text{et} \quad x = \cos \alpha,$$

le premier membre de l'équation (54) donne

$$\frac{2 \mu n \rho_0 \sin^2 \theta_0}{h^2}, \quad - \frac{n^2}{h^2} \frac{2 \mu n \rho_0 \sin^2 \theta_0}{h^2} \{ \mu \sin^2 \alpha + [\cos \alpha - (\mu - 1) \cos \theta_0]^2 \}.$$

Ces deux résultats sont de signes contraires; donc l'équation (54) a toujours une racine réelle comprise entre $\cos \theta_0$ et $\cos \alpha$: cette racine peut donc être représentée par le cosinus d'un angle θ' , plus grand que θ_0 et plus petit que α , et d'ailleurs extrêmement peu différent de θ_0 , puisque $\alpha - \theta_0$ est une très-petite quantité.

Pour avoir quelques notions sur les deux autres racines de l'équation (54), je considère d'abord le cas où μ est plus grand que l'unité: c'est ce cas qui est ordinairement réalisé dans les expériences. Si l'on remplace, dans le premier membre de l'équation (54), x par un nombre positif suffisamment grand, comme le terme du troisième degré a un coefficient négatif, on sait, par la théorie des équations, qu'on aura un résultat négatif; d'une autre part, si l'on fait

$$x = 1,$$

on obtient

$$1 - \cos \alpha + \frac{n^2}{h^2} (1 - \cos \theta_0) [1 - (\mu - 1) \cos \theta_0]^2,$$

quantité qui est positive; donc l'équation (54) a une racine réelle comprise entre $+1$ et $+\infty$. On voit, de la même manière, que la troisième racine réelle de l'équation (54) est comprise entre -1 et $-\infty$. On peut donc représenter les racines de l'équation (54) par

$$\cos \theta', \quad 1 + \varepsilon^2, \quad -1 - \delta^2,$$

ε^2 et δ^2 étant des nombres positifs.

Alors l'équation (51) peut s'écrire ainsi :

$$(55) \quad \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = h^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta') (\cos \theta + 1 + \delta^2) (1 + \varepsilon^2 - \cos \theta)$$

Le produit $h^2 (\cos \theta + 1 + \delta^2) (1 + \rho^2 - \cos \theta)$ est positif pour toute valeur de θ ; donc les valeurs admissibles de θ doivent rendre positif le produit $(\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta')$, ce qui exige que θ soit compris entre les valeurs très-rapprochées θ_0, θ' . L'équation (55) montre, en outre, que θ_0, θ' sont les limites de θ , et qu'à ces limites $\frac{d\theta}{dt}$ est nul.

Il résulte de là que l'axe de figure du corps conserve, par rapport à l'axe terrestre, une inclinaison sinon rigoureusement constante, au moins sensiblement constante.

θ étant égal à θ_0 ou plus grand que θ_0 , $\cos \theta_0 - \cos \theta$ est toujours positif; d'une autre part, ρ_0 étant très-grand par rapport à n , la quantité $\mu \rho_0 + n (\cos \theta_0 + \cos \theta) - \mu n \cos \theta_0$ est aussi positive; d'où il suit que la valeur $\frac{d\psi}{dt}$, donnée par la deuxième équation (8), est toujours positive. De là on conclut que la projection, sur un parallèle terrestre, de l'axe de figure du corps, tourne d'un mouvement continu, toujours dans le même sens et en sens contraire du mouvement terrestre.

Pour connaître la loi des variations de θ et ψ , on s'y prendra comme dans le cas déjà examiné pour un corps sphérique. En effet, en posant

$$(56) \quad \cos \theta = \cos \theta_0 \cos^2 x + \cos \theta' \sin^2 x,$$

l'équation (55) donne

$$h dt = 2 dx \left(1 + \delta^2 + \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta'}{2} + \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{2} \cos 2x \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \times \left(1 + \varepsilon^2 - \frac{\cos \theta_0 + \cos \theta'}{2} - \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{2} \cos 2x \right)^{-\frac{1}{2}};$$

et en posant

$$\sin 2\lambda = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{2 + 2\delta^2 + \cos \theta_0 + \cos \theta'}, \quad \sin 2\nu = \frac{\cos \theta_0 - \cos \theta'}{2 + 2\varepsilon^2 - \cos \theta_0 - \cos \theta'},$$

cette équation devient

$$h dt = \frac{8 \sqrt{\tan \lambda \tan \nu}}{\cos \theta_0 - \cos \theta'} (1 + \tan^2 \lambda + 2 \tan \lambda \cos 2x)^{-\frac{1}{2}} \\ \times (1 + \tan^2 \nu - 2 \tan \nu \cos 2x)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'après le théorème d'Euler, on a

$$(1 + \operatorname{tang}^2 \lambda + 2 \operatorname{tang} \lambda \cos 2x)^{-\frac{1}{2}} = A_0 + \sum_1^{\infty} A_i \cos 2ix,$$

$$(1 + \operatorname{tang}^2 \nu - 2 \operatorname{tang} \nu \cos 2x)^{-\frac{1}{2}} = B_0 + \sum_1^{\infty} B_i \cos 2ix,$$

i étant un nombre entier pris entre 1 et ∞ ; A_0, A_i, B_0, B_i étant des coefficients que le théorème apprend à former. Si l'on multiplie les deux séries, on a une nouvelle série de la forme

$$C_0 + \sum_1^{\infty} C_i \cos 2ix,$$

dont les coefficients sont faciles à former, et alors l'équation précédente devient

$$h dt = \frac{8 \sqrt{\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang} \nu}}{\cos \theta_0 - \cos \theta'} \left(C_0 + \sum_1^{\infty} C_i \cos 2ix \right),$$

d'où

$$(57) \quad ht = \frac{8 \sqrt{\operatorname{tang} \lambda \operatorname{tang} \nu}}{\cos \theta_0 - \cos \theta'} \left(C_0 x + \sum_1^{\infty} \frac{C_i}{2i} \sin 2ix \right),$$

et les équations (56), (57) donnent la loi des variations de ϑ . Au moyen des expressions (56), (57), on pourra trouver la valeur de ψ , en s'y prenant de la même manière que dans le cas déjà traité de la sphère.

Nous venons d'examiner ce qui a lieu, au moins d'une manière générale, lorsque μ est plus petit que l'unité, et nous pourrions nous borner à ce cas, puisque c'est celui dans lequel les expériences sont ordinairement établies; néanmoins il est bon de considérer maintenant ce qui a lieu lorsque μ est plus grand que l'unité.

Dans ce cas, l'équation (54) a toujours une racine réelle comprise entre $\cos \theta_0$ et $\cos \alpha$, racine que nous désignerons par $\cos \theta'$; mais on ne peut plus dire que les deux autres racines sont réelles et comprises entre $+1$ et $+\infty$, ou entre -1 et $-\infty$. Pour avoir quelques notions sur les deux autres racines, j'ordonne d'abord l'équation (54), et

j'ai

$$x^3 + x^2 \cos \theta_0 + x \left\{ 1 + \frac{n^2}{h^2} [\mu - (1 - \mu^2) \cos^2 \theta_0] \right\} \frac{h^2}{n^2(1 - \mu)} - \frac{h^2}{n^2(1 - \mu)} \left\{ \cos \alpha + \frac{n^2}{h^2} \cos \theta_0 [\mu + (\mu - 1)^2 \cos^2 \theta_0] \right\}.$$

ou

$$(58) \quad \left\{ \begin{aligned} x^3 + x^2 \cos \theta_0 + x \left\{ \frac{h^2}{n^2(1 - \mu)} + \left[\frac{\mu}{1 - \mu} - (1 + \mu) \cos^2 \theta_0 \right] \right\} \\ - \frac{h^2 \cos \alpha}{n^2(1 - \mu)} - \cos \theta_0 \left[\frac{\mu}{1 - \mu} + (1 - \mu) \cos^2 \theta_0 \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Je pose

$$P = \frac{h^2}{n^2(1 - \mu)} + \frac{\mu}{1 - \mu} - (1 + \mu) \cos^2 \theta_0,$$

$$Q = - \frac{h^2 \cos \alpha}{n^2(1 - \mu)} - \cos \theta_0 \left[\frac{\mu}{1 - \mu} + (1 - \mu) \cos^2 \theta_0 \right],$$

et l'équation (58) devient

$$(59) \quad x^3 + x^2 \cos \theta_0 + P x + Q = 0.$$

Je pose

$$(60) \quad x = y - \frac{\cos \theta_0}{3}.$$

et l'équation (59) se réduit à

$$(61) \quad x^3 + 3 p x - 2 q = 0;$$

en posant

$$p = \frac{P}{3} - \frac{\cos^3 \theta_0}{9},$$

$$q = \frac{1}{2} \left(- \frac{2 \cos^3 \theta_0}{27} + \frac{P \cos \theta_0}{3} - Q \right).$$

Lorsqu'on se place dans les conditions ordinaires des expériences, ρ_0 est très-grand par rapport à n , alors p est positif, et les racines de l'équation (58) sont, l'une réelle, et les deux autres imaginaires; on peut donc représenter ces racines par

$$\cos \theta', \quad a + b \sqrt{-1}, \quad a - b \sqrt{-1},$$

et l'équation (51) deviendra

$$(62) \sin^2 \theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = h^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta') [(\cos \theta - a)^2 + b^2].$$

Le produit $h^2 [(\cos \theta - a)^2 + b^2]$ étant positif pour toutes les valeurs de θ , on conclura comme précédemment que θ varie entre les limites extrêmes θ_0, θ' , et que $\frac{d\psi}{dt}$ est constamment positif.

§ III.

Mouvement des diverses pièces d'un gyroscope.

PROBLÈME. *Un appareil est composé de deux anneaux et d'un corps solide de révolution ; les trois pièces sont liées entre elles de telle sorte qu'elles ont leur centre de gravité commun, et que chacune peut tourner autour d'un axe. Cette liaison est établie de la manière suivante : le plus grand anneau ou l'anneau extérieur peut librement tourner autour d'un de ses diamètres qui est fixe sur la Terre et qui a une direction quelconque par rapport à elle ; le diamètre perpendiculaire à cette ligne fixe sert d'axe de rotation à l'anneau intérieur dont l'un des diamètres coïncide avec cet axe. L'axe du corps tournant est porté par le deuxième anneau suivant le diamètre de cet anneau qui est perpendiculaire à l'axe même de l'anneau. Cette construction posée, on donne au corps tournant un mouvement de rotation quelconque, on place l'anneau qui le porte sur le support qui lui est destiné dans l'anneau extérieur, on dirige l'axe du corps tournant suivant telle ligne qu'on veut, puis, après avoir constaté que les deux anneaux sont immobiles par rapport à la Terre, on délivre l'appareil en l'abandonnant à lui-même ; il s'agit maintenant de déterminer le mouvement que prennent les diverses pièces de ce système mobile en supposant que l'appareil est emporté par la Terre dans son mouvement diurne.*

PP' est l'axe fixe sur la Terre autour duquel l'anneau extérieur peut tourner.

PNP'N' est une position quelconque du cercle moyen de cet anneau, et donne ce qu'on appelle le plan de l'anneau.

NøN' est le diamètre de l'anneau extérieur perpendiculaire PP'. Ce

laire terrestre, on aura

$$p = n \sin \omega, \quad q = 0, \quad r = -n \cos \omega,$$

d'après les équations (17) de la première section. Alors les équations (5) et (9) de la troisième section deviennent

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & d \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \\ & = 2 \sum m [(X - u'') dx + (Y - v'') dy + (Z - w'') dz], \\ & d \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) \\ & = \sum m [x (Y - v'') - y (X - u'')] dt + n \cos \omega d \sum m (x^2 + y^2) \\ & \quad + 2 n \sin \omega \sum m x dz; \end{aligned} \right.$$

les sommes indiquées par le signe \sum s'étendent à toutes les pièces du gyroscope; m est la masse d'un point quelconque de l'appareil; $X - u''$, $Y - v''$, $Z - w''$ sont les composantes de la pesanteur suivant ox , oy , oz , en supposant que l'attraction terrestre est la seule force appliquée à l'appareil. Comme la pesanteur est considérée invariable dans toute l'étendue du système, et que le centre de gravité est au point o , ces équations se réduisent à

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & d \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 0, \\ & d \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = n \cos \omega d \sum m (x^2 + y^2) \\ & \quad + 2 n \sin \omega \sum m x dz. \end{aligned} \right.$$

Je désignerai par les caractéristiques S , S_1 , S_2 les parties de ces diverses sommes qui se rapportent respectivement au corps tournant, à l'anneau intérieur et au grand anneau. Pour former ces sommes partielles, je rappellerai quatre propositions qui ont été démontrées dans la section précédente.

Un corps solide de révolution quelconque a son centre de gravité au point o ; on prend dans ce solide trois axes rectangulaires qui lui sont invariablement liés, savoir: ox_1 , oy_1 , oz_1 , et tels que oz_1 coïn-

cide avec l'axe de figure. On désigne par $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta'', \zeta, \zeta', \zeta''$ les cosinus des angles que ces axes font respectivement avec ox, oy, oz ; par Θ, Φ, Ψ les trois angles caractéristiques qui servent à déterminer la position du solide par rapport à ces axes; par $\Pi, \mathfrak{X}, \mathfrak{Q}$ les composantes suivant ox, oy, oz , de la vitesse angulaire de rotation apparente du corps; par ϱ le moment d'inertie relatif à l'axe de figure; par \mathfrak{L} le moment d'inertie relatif à une droite quelconque perpendiculaire à cet axe et menée par le centre de gravité. Cela posé, on sait que l'on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi = \cos \Phi \cos \Psi - \sin \Phi \sin \Psi \cos \Theta, \\ \xi' = -\sin \Phi \cos \Psi - \cos \Phi \sin \Psi \cos \Theta, \\ \xi'' = -\sin \Psi \sin \Theta, \\ \eta = \cos \Phi \sin \Psi + \sin \Phi \cos \Psi \cos \Theta, \\ \eta' = -\sin \Phi \sin \Psi + \cos \Phi \cos \Psi \cos \Theta, \\ \eta'' = -\cos \Psi \sin \Theta, \\ \zeta = \sin \Phi \sin \Theta, \\ \zeta' = \cos \Phi \sin \Theta, \\ \zeta'' = \cos \Theta; \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi = \sin \Phi \sin \Theta \frac{d\Psi}{dt} + \cos \Phi \frac{d\Theta}{dt}, \\ \mathfrak{X} = \sin \Phi \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt} - \sin \Phi \frac{d\Theta}{dt}, \\ \mathfrak{Q} = \frac{d\Phi}{dt} + \cos \Theta \frac{d\Psi}{dt}. \end{array} \right.$$

Nous avons démontré dans la troisième section que l'on a

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = \mathfrak{L} \left(\frac{d\Theta^2}{dt^2} + \sin^2 \Theta \frac{d\Psi^2}{dt^2} \right) + \varrho \Theta^2, \\ \sum m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = \mathfrak{L} \sin^2 \Theta \frac{d\Psi}{dt} + \varrho \Theta \cos \Theta, \\ \sum m (x^2 + y^2) = (\mathfrak{L} - \varrho) \sin^2 \Theta + \varrho, \\ 2 \sum mx \frac{dz}{dt} = \varrho \mathfrak{Q} \cos \Psi \sin \Theta - \varrho \cos \Theta \frac{d(\sin \Psi \sin \Theta)}{dt} \\ \quad - (2\mathfrak{L} - \varrho) \sin \Psi \sin^2 \Theta \frac{d\Theta}{dt}, \end{array} \right.$$

le signe \sum indiquant une somme qui s'étend à tout le corps solide que l'on considère. Les équations (5) se déduisent des équations (24), (28), (29), (30), (42) et (44) de la troisième section, §§ III et IV.

Appliquons maintenant les propositions contenues dans les équations (5) tour à tour au solide tournant et aux deux anneaux.

Pour le solide tournant, l'axe de figure est oQ . Je désigne par θ l'angle que cet axe fait avec oz . Je projette cet axe sur le plan xoy ; oA étant cette projection, je désigne par $\psi - 90^\circ$ l'angle xoA qu'elle fait avec ox , en sorte que ψ détermine la partie oN de l'intersection NON' du plan xoy avec un plan mené par o , perpendiculairement à oQ . C'est sur oQ que je place l'axe oz_1 . Je désigne par φ l'angle Nox , que l'axe mobile ox_1 du corps fait avec oN . Les trois angles caractéristiques du solide sont θ, ψ, φ ; je nomme ρ la composante de la vitesse angulaire de rotation du solide par rapport à oQ , et A, C les deux moments d'inertie de ce corps. J'ai donc

$$(6) \quad \Theta = \theta, \quad \Psi = \psi, \quad \Phi = \varphi, \quad \mathfrak{P} = \rho, \quad \mathfrak{A} = A, \quad \mathfrak{C} = C,$$

et les équations (5) deviennent

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} Sm \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} &= A \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \right) + C\rho^2, \\ Sm \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) &= A \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + C\rho \cos \theta, \\ Sm (x^2 + y^2) &= (A - C) \sin^2 \theta + C, \\ 2 Sm x dz &= C\rho \cos \psi \sin \theta dt - C \cos \theta d(\sin \psi \sin \theta) \\ &\quad - (2A - C) \sin \psi \sin^2 \theta d\theta. \end{aligned} \right.$$

Pour l'anneau intérieur, l'axe de figure est une droite oD perpendiculaire au plan $QNQ'N'$. La droite oN est donc perpendiculaire à oD , et comme elle est perpendiculaire au plan QoA , il en résulte que ce plan contient oD , et que, par suite, DA est la projection de oD sur le plan xoy ou du prolongement de oD . Nous prendrons pour axe de figure de l'anneau la partie de cet axe qui se projette sur oA et qui est désignée par oD sur la figure. Alors l'angle que cet axe fait avec oz est $\theta + 90^\circ$; le plan $QNQ'N'$, qui est perpendiculaire à l'axe de figure de l'anneau, coupe le plan xoy suivant NoN' , et la partie oN de cette trace est déterminée par l'angle $xoN = \psi$. Rien n'empêche de mettre

sur oN l'axe ox , relatif à cet anneau, alors l'angle Nox , est nul. Les angles caractéristiques de cet anneau sont donc

$$\Theta = \theta + 90^\circ, \quad \Psi = \psi, \quad \Phi = 0.$$

On a, en outre, par l'équation (4);

$$\mathcal{Q} = -\sin \theta \frac{d\psi}{dt},$$

et si l'on désigne par C_1 , A_1 les moments d'inertie principaux de l'anneau, en sorte que l'on ait

$$e = C_1, \quad \mathfrak{A} = A_1,$$

les équations (5) deviendront

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = A_1 \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \cos^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \right) + C_1 \sin^2 \theta \frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ S_1 m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = A_1 \cos^2 \theta \frac{d\psi}{dt} + C_1 \sin^2 \theta \frac{d\psi}{dt}, \\ S_1 m (x^2 + y^2) = (A_1 - C_1) \cos^2 \theta + C_1, \\ 2 S_1 m x dz = -C_1 \cos \psi \cos \theta \sin \theta d\psi + C_1 \sin \theta d(\sin \psi \cos \theta) \\ \quad - (2 A_1 - C_1) \sin \psi \cos^2 \theta d\theta. \end{array} \right.$$

L'axe de figure de l'anneau extérieur est la droite AA' qui est perpendiculaire au plan de l'anneau; l'intersection de ce plan avec xoy est NoN' . Si l'on prend oA pour oz , et qu'on place ox , sur oN , les angles caractéristiques de cet anneau seront

$$\Theta = 0, \quad \Psi = \psi, \quad \Phi = 0;$$

on aura

$$\mathcal{Q} = 0,$$

et les équations (5) deviendront

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2 m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = A_2 \frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ S_2 m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = A_2 \frac{d\psi}{dt}, \\ S_2 m (x^2 + y^2) = A_2, \\ 2 S_2 m x dx = 0; \end{array} \right.$$

A_2 est le moment d'inertie de l'anneau extérieur par rapport à PP' .

Au moyen des équations (7), (8), (9), les équations (2) deviennent

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & d \left\{ (A + A_1) \frac{d\theta^2}{dt^2} + [(A + C_1 - A_1) \sin^2 \theta + A_1 + A_2] \frac{d\psi^2}{dt^2} + C\rho^2 \right\} = 0, \\ & d \left\{ [(A + C_1 - A_1) \sin^2 \theta + A_1 + A_2] \frac{d\psi}{dt} + C\rho \cos \theta \right\} \\ & = n \cos \omega (A + C_1 - A_1 + C) d \sin^2 \theta \\ & + n \sin \omega \left[\begin{array}{l} C\rho \cos \psi \sin \theta dt - C \cos \theta d(\sin \psi \sin \theta) \\ - C_1 \sin^2 \theta \sin \psi d\theta - (2A - C) \sin^2 \theta \sin \psi d\theta \\ - (2A_1 - C_1) \cos^2 \theta \sin \psi d\theta \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

Pour abrégier, je poserai

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} A + A_1 = a, \quad A + C_1 - A_1 = b, \quad A_1 + A_2 = \gamma, \\ u^2 = b \sin^2 \theta + \gamma, \quad k = n \cos \omega, \quad k' = n \sin \omega; \end{array} \right.$$

alors les équations (10) deviendront

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} & d \left(a \frac{d\theta^2}{dt^2} + u^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + C\rho^2 \right) = 0, \\ & d \left(u^2 \frac{d\psi}{dt} + C\rho \cos \theta \right) = k(b - C) d \sin^2 \theta \\ & + k' \left[\begin{array}{l} C\rho \cos \psi \sin \theta dt - C \cos \theta d(\sin \psi \sin \theta) \\ - (2b - C) \sin^2 \theta \sin \psi d\theta - (a - b) \cos^2 \theta \sin \psi d\theta \end{array} \right]. \end{aligned} \right.$$

On peut avoir une troisième équation entre les angles ψ , θ et la vitesse ρ , en remarquant que, d'après les liaisons du système, rien n'empêche de donner un mouvement de rotation virtuelle au solide autour de oQ , sans faire mouvoir les deux anneaux. On obtiendra ainsi la formule (32) de la section précédente, la somme Σ ne s'étendant qu'au solide tournant, et cette équation deviendra, par les transformations indiquées dans cette section, celle qui est écrite la dernière au n° 50, § V; c'est-à-dire qu'indépendamment des équations (12), on aura

$$(13) \quad d(\rho - k \cos \theta + k' \sin \theta \sin \psi) = 0.$$

§ IV.

Mouvement du gyroscope lorsque les deux anneaux sont invariablement liés entre eux et sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Dans ce cas, l'angle θ ou QoP est constant et égal à 90 degrés; par suite, les équations (11), (12), (13) se réduisent à

$$(14) \quad \begin{cases} d\left(\frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{C}{A + 2A_1 + A_2} \rho^2\right) = 0, \\ d\left(\frac{d\psi}{dt}\right) = n \sin \omega \frac{C}{A + 2A_1 + A_2} \rho \cos \psi dt, \\ d(\rho + n \sin \omega \sin \psi) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont analogues aux équations (1), (2), (3) du premier problème et conduisent à des conséquences semblables. Ainsi l'axe oQ oscillera autour de ox comme ligne d'équilibre, lorsque la rotation du solide se fera de droite à gauche autour de oQ , et la durée des oscillations très-petites sera

$$T = \pi \sqrt{\frac{A + 2A_1 + A_2}{Cn\rho_0 \sin \omega}}.$$

Lorsque l'axe PP' de l'anneau extérieur sera vertical, on aura

$$\cos \gamma = \sin \omega.$$

La ligne ox sera la partie nord de la méridienne, et la durée des oscillations autour de la méridienne deviendra

$$T' = \pi \sqrt{\frac{A + 2A_1 + A_2}{Cn\rho_0 \cos \gamma}}.$$

Supposons qu'on fixe l'anneau extérieur perpendiculairement au méridien, son axe PP' étant vertical, et qu'on laisse à l'anneau intérieur la liberté de tourner autour de NN' , qui est alors perpendiculaire au méridien; dans ce cas, θ n'est plus constant, mais $\psi = 90^\circ$, et les formules (12), (13) se réduisent à

$$\begin{aligned} d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{C}{A + A_1} \rho^2\right) &= 0, \\ d(\rho - n \sin \gamma \cos \theta + n \cos \gamma \sin \theta) &= 0. \end{aligned}$$

La deuxième formule (12) ne sert pas ici, puisque le système ne peut pas tourner librement autour de oz . La dernière équation peut s'écrire ainsi :

$$d\rho = nd \cos(\theta + \omega);$$

or θ est l'angle que oQ fait avec oz ou oP , ω est l'angle que oz fait avec la parallèle à la partie australe de l'axe terrestre, $\omega + \theta$ est donc l'angle que oQ fait avec cette parallèle; si l'on désigne par u l'angle que oQ fait avec le prolongement septentrional de cette parallèle, on a

$$\theta + \omega = \pi - u, \quad d\theta = -du,$$

et nos équations deviennent

$$\frac{du}{dt} \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{C}{A + A_1} \rho \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

$$d\rho = -nd \cos u = n \sin u du,$$

d'où

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{Cn\rho}{A + A_1} \sin u = 0, \quad \rho = \rho_0 - n(\cos u - \cos u_0);$$

par suite, en négligeant les quantités de l'ordre n^2 ,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{Cn\rho_0}{A + A_1} \sin u = 0.$$

D'où l'on voit que l'axe oQ oscillera autour de l'axe du monde, et que la durée de ses oscillations sera

$$T'' = \pi \sqrt{\frac{A + A_1}{Cn\rho_0}};$$

les valeurs de T' , T'' pourront servir pour déterminer n et γ .

On aurait pu placer l'axe PP' perpendiculairement au méridien, et laisser à l'anneau extérieur la liberté de tourner autour de PP' ; alors la valeur générale de T s'applique à ce cas, en faisant $\omega = 90^\circ$, ce qui réduit T à

$$T''' = \pi \sqrt{\frac{A + 2A_1 + A_2}{Cn\rho_0}}.$$

§ V.

Mouvement du gyroscope lorsque l'axe fixe de l'appareil est parallèle à l'axe terrestre, et que l'anneau intérieur peut librement tourner dans le grand anneau.

Je suppose que la ligne PP' est parallèle à l'axe terrestre; alors j'ai

$$\omega = 0, \quad k = n, \quad k' = 0,$$

et les formules (12), (13) du § III deviennent

$$(1) \quad \begin{cases} d \left(a \frac{d\theta^2}{dt^2} + u^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + C\rho^2 \right) = 0, \\ d \left(u^2 \frac{d\psi}{dt} + C\rho \cos \theta \right) = n(b - C) d \cdot \sin^2 \theta, \\ d(\rho - n \cos \theta) = 0; \end{cases}$$

les intégrales premières sont

$$(2) \quad \begin{cases} a \frac{d\theta^2}{dt^2} + u^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + C\rho^2 = m, \\ u^2 \frac{d\psi}{dt} + C\rho \cos \theta = n(b - C) \sin^2 \theta + m', \\ \rho = n \cos \theta + m''; \end{cases}$$

m, m', m'' sont trois constantes arbitraires.

Je suppose qu'on imprime au corps tournant un mouvement de rotation autour de son axe de figure, qu'on place ensuite l'anneau qui porte cet axe dans l'anneau extérieur du gyroscope sur les supports destinés à porter les couteaux mobiles; on fait alors tourner l'anneau extérieur autour de PP', l'anneau intérieur autour du tranchant des couteaux, et de cette manière on dirige l'axe du corps tournant suivant telle direction fixe sur la Terre qu'on veut choisir; ces préparatifs étant achevés et l'immobilité des anneaux par rapport à la Terre étant d'abord maintenue et vérifiée, on délivre l'appareil sans lui donner d'impulsion et on l'abandonne à lui-même; je compte le temps à partir de ce dernier instant et je désigne par θ_0, ψ_0 les valeurs initiales de θ, ψ ; à cette époque, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0;$$

j'indique par ρ_0 la valeur initiale de ρ , qui n'est autre chose que la vitesse apparente de rotation du corps lorsque $t = 0$, et je détermine les constantes m, m', m'' par les équations suivantes :

$$(3) \quad \begin{cases} m = C\rho_0^2, \\ m' = C\rho_0 \cos \theta_0 - n(b - C) \sin^2 \theta_0, \\ m'' = \rho_0 - n \cos \theta_0; \end{cases}$$

alors les équations (2) deviennent

$$(4) \quad \begin{cases} a \frac{d\theta^2}{dt^2} + u^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} = C(\rho_0^2 - \rho^2), \\ u^2 \frac{d\psi}{dt} = C(\rho_0 \cos \theta_0 - \rho \cos \theta) + n(C - b)(\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta), \\ \rho = \rho_0 + n(\cos \theta - \cos \theta_0); \end{cases}$$

j'élimine ρ , et j'ai

$$(5) \quad \begin{cases} a \frac{d\theta^2}{dt^2} + u^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} = 2C\rho_0 n(\cos \theta_0 - \cos \theta) - Cn^2(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2, \\ u^2 \frac{d\psi}{dt} = (\cos \theta_0 - \cos \theta)[C\rho_0 - Cn \cos \theta_0 + bn(\cos \theta_0 + \cos \theta)]. \end{cases}$$

Je multiplie par u^2 la première de ces équations, et je retranche le carré de la deuxième, afin d'éliminer $\frac{d\psi}{dt}$; j'ai, après avoir divisé par a ,

$$(6) \quad \begin{cases} u^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \lambda^2(\cos \theta_0 - \cos \theta)(\cos \theta - H) \\ - n^2(\cos \theta_0 - \cos \theta)^2 [Cu^2 + (C \cos \theta_0 - b \cos \theta_0 - b \cos \theta)^2]. \end{cases}$$

On a posé, pour plus de simplicité,

$$(7) \quad \begin{cases} \lambda^2 = \frac{C^2 \rho_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)}{a}, \\ H = \cos \theta_0 - \frac{2n(b \sin^2 \theta_0 + d)}{C(\rho_0 - 2n \cos \theta_0)}. \end{cases}$$

Je suppose, ce qui est permis, qu'on a placé l'axe oz_1 sur la partie de l'axe de figure du corps tournant pour laquelle ρ_0 est positif; alors λ^2 est positif, lorsque ρ_0 est plus grand que $2n \cos \theta$; nous admettrons que la vitesse primitive de rotation est assez grande pour qu'il en soit ainsi, et même qu'elle est telle, que H est compris entre $+1$ et -1 :

cela aura lieu toutes les fois que ρ_0 sera notablement plus grand que n , et que $\cos \theta_0$ ne sera pas très-peu différent de -1 . La quantité H peut être regardée dans ces conditions, comme égale au cosinus d'un angle θ' compris entre 0 et 180 degrés, et on peut poser

$$(8) \quad H = \cos \theta'.$$

En négligeant les quantités de l'ordre de n^2 , l'équation (6) peut s'écrire ainsi :

$$(9) \quad u^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = \lambda^2 (\cos \theta_0 - \cos \theta) (\cos \theta - \cos \theta').$$

Comme il est permis de regarder b comme positif, puisque l'appareil peut toujours être disposé de manière qu'il en soit ainsi, u^2 sera une quantité positive, et l'équation (9) montre que θ se trouvera toujours compris entre les valeurs extrêmes θ_0, θ' . La valeur de H donnée par l'équation (7) fait voir que la différence des angles θ_0, θ' est extrêmement petite et du même ordre que n en général; d'après cela, on peut dire que l'axe de figure du corps tournant reste incliné sur l'axe terrestre d'une quantité sinon rigoureusement, au moins sensiblement constante. Pour connaître les variations de θ , je pose

$$(10) \quad \cos \theta = \cos \theta_0 \cos^2 x + \cos \theta' \sin^2 x;$$

au moyen de cette nouvelle variable, on tire de l'équation (9)

$$(11) \quad \lambda dt = \frac{2u d\theta}{(\cos \theta_0 - \cos \theta') \sin 2x}.$$

Si l'on porte dans cette équation la valeur de $u d\theta$, qu'on déduit de l'équation (10), et qu'on néglige les quantités de l'ordre de n^2 , on a

$$(12) \quad \lambda dt = \frac{2\sqrt{b \sin^2 \theta_0 + \delta}}{\sin \theta_0} \left[1 - \frac{n\delta \cos \theta_0}{C \sin^2 \theta_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} (1 - \cos 2x) \right] dx;$$

d'où l'on tire, en faisant commencer x en même temps que t ,

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \lambda t &= \frac{2\sqrt{b \sin^2 \theta_0 + \delta}}{\sin \theta_0} \left[1 - \frac{n\delta \cos \theta_0}{C \sin^2 \theta_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} \right] x \\ &+ \frac{n\delta \cos \theta_0 \sqrt{b \sin^2 \theta_0 + \delta} \sin 2x}{C \sin^2 \theta_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)}; \end{aligned} \right.$$

ies équations (10) et (13) donnent la valeur de θ pour chaque époque t au moyen de l'auxiliaire x . L'équation (10) fait voir que θ est égal à θ_0 , ou à θ' , suivant que x est un nombre pair ou un nombre impair de fois $\frac{\pi}{2}$. Si l'on désigne par T la différence des valeurs de t correspondant à

$$x = j \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad x = (j + 1) \frac{\pi}{2},$$

j étant un nombre entier, on a, par l'équation (13),

$$(14) \quad T = \frac{\pi \sqrt{b \sin^2 \theta_0 + \delta}}{\lambda \sin \theta_0} \left[1 - \frac{n \delta \cos \theta_0}{C \sin^2 \theta_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} \right].$$

Cette valeur de T est indépendante de j , et donne le temps périodique des variations de θ .

La deuxième équation (5) donne, lorsqu'on y met la valeur de u^2 , qu'on tire de l'équation (10), celle de dt fournie par l'équation (12), et qu'on néglige les termes de l'ordre de n^2 ,

$$(15) \quad d\psi = \frac{2n\rho_0 \sqrt{b \sin^2 \theta_0 + \delta}}{\lambda \sin \theta_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} (1 - \cos 2x) dx;$$

d'où

$$(16) \quad \psi - \psi_0 = \frac{2n\rho_0 \sqrt{b \sin^2 \theta_0 + \delta}}{\lambda \sin \theta_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right);$$

ψ_0 est la valeur initiale de ψ .

Je désigne par Ψ la différence des valeurs de ψ correspondant à

$$x = j \frac{\pi}{2}, \quad x = (j + 1) \frac{\pi}{2}.$$

et j'ai

$$(17) \quad \Psi = \frac{n\pi\rho_0 \sqrt{\delta + b \sin^2 \theta_0}}{\lambda \sin \theta_0 (\rho_0 - 2n \cos \theta_0)}.$$

Cette valeur de Ψ est indépendante de j ; elle exprime la variation constante qu'éprouve l'angle ψ , lorsque l'angle θ passe de l'une à l'autre de ses valeurs extrêmes θ_0, θ' .

Les valeurs de t, T, ψ, Ψ données par les équations précédentes reproduisent celles que nous avons trouvées lorsque nous avons traité

le problème analogue à celui-ci, sans avoir égard à l'influence des anneaux du gyroscope.

Si l'on divise Ψ par T , on aura, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à celui de n ,

$$\frac{\Psi}{T} = n.$$

Ce quotient est positif et égal à la vitesse angulaire de la Terre. On conclut de là que, si l'on projette sur un parallèle terrestre l'axe du corps tournant, cette projection tournera avec une vitesse moyenne égale à n , de sorte que si le temps croît en progression arithmétique dont la raison est T , l'angle dont tournera la projection variera suivant une progression arithmétique dont la raison est n ; ces variations auront lieu en sens contraire du mouvement de la Terre.

Le travail qui précède est extrait de divers Mémoires que j'ai présentés à l'Académie des Sciences, et dans lesquels j'ai donné, en outre :

1°. Deux nouvelles démonstrations des formules fondamentales (19) et (20) de la première section ;

2°. L'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires pour déterminer l'influence de la fonction perturbatrice dans le mouvement du pendule simple ;

3°. Les lois du pendule lorsqu'on a égard à la fois à la résistance de l'air et au mouvement diurne.
