JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. CHARTIER

Règles de convergence des séries et des intégrales définies qui contiennent un facteur périodique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 201-212.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__201_0>

Règles de convergence des séries et des intégrales définies qui contiennent un facteur périodique;

Par le P. J. CHARTIER, S. J.

Je me propose de donner une démonstration d'un théorème important d'Abel, et d'en tirer une série de conséquences qui en découlent presque immédiatement, et comprennent en particulier un théorème de M. Malmsten, démontré par M. Holmgren, mai 1851, page 186 de ce Journal, et un autre de M. Björling, qui se trouve en décembre 1852 du même Journal.

Proposition fondamentale (due à Abel). — *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$, p quantités réelles, positives ou négatives; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$, p quantités réelles de même signe et numériquement décroissantes; et* E, F, *des quantités réelles, positives ou négatives. Si l'on a, pour toute valeur de p entre* 1 *et n,*

$$E < a_1 + a_2 + \ldots + a_p < F, \tag{1}$$

on aura entre les mêmes limites, si ε_1 est positif,

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_p\varepsilon_p < F\varepsilon_1. \tag{2}$$

Si ε_1 est négatif, les mêmes inégalités subsisteront, changées de sens.

Cette proposition peut se démontrer ainsi :

Remarquons en général que, si dans une somme

$$S = \sum a_k e_k,$$

où a_k et e_k sont des quantités réelles, on fait varier de quantités égales d un nombre quelconque de facteurs e_k, la variation qui en résultera pour S sera de la forme ad, et, par conséquent, S variera dans le même sens quand d variera dans le même sens. D'où il suit que, si deux valeurs extrêmes de d laissent S entre deux limites α et β, toute valeur intermédiaire de d laissera S dans ces mêmes limites.

Cela posé, des inégalités (1) on déduit en multipliant les trois membres par ε_1 supposé positif, et réduisant le membre du milieu à un terme, puis laissant les p termes,

$$(3) \qquad E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 \ldots\ldots\ldots\ldots < F\varepsilon_1,$$

$$(4) \qquad E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_1 + a_3\varepsilon_1 + \ldots + a_p\varepsilon_1 < F\varepsilon_1.$$

Si ε_1 était négatif, il n'y aurait qu'à renverser les sens de ces inégalités. On peut supposer que les points de l'inégalité (3) tiennent lieu des termes $a_2\,0$, $a_3\,0, \ldots, a_p\,0$, ayant pour seconds facteurs zéro. Maintenant, ε_2 est entre 0 et ε_1. Donc, d'après la remarque, on aura aussi, en réduisant dans les inégalités (4) le membre du milieu à deux termes, puis le laissant tel qu'il est, et remplaçant à partir du second, ε_1 par ε_2,

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 \ldots\ldots\ldots\ldots < F\varepsilon_1,$$

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_2 + \ldots + a_p\varepsilon_2 < F\varepsilon_1.$$

De même, puisque ε_3 est entre 0 et ε_2, on aura

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 \ldots\ldots\ldots\ldots < F\varepsilon_1,$$

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + a_4\varepsilon_3 + \ldots + a_p\varepsilon_3 < F\varepsilon_1.$$

Ce raisonnement peut se poursuivre indéfiniment, et il conduit évidemment à l'inégalité qu'il s'agissait d'établir.

Corollaire I. (La première partie de ce corollaire a été donnée par M. Oss. Bonnet, tome XIV, page 249 de ce Journal.) Si l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \varphi x\,dx$ reste comprise entre deux limites finies E et F, quand x varie de x_0 à x_1, et que fx soit entre ces limites de signe constant et décroissante en valeur numérique, on aura pour toute valeur de x entre x_0 et x_1,

$$(\alpha) \qquad Efx_0 < \int_{x_0}^{x} fx\,\varphi x\,dx < Ffx_0.$$

Si fx était toujours croissante en valeur absolue et si de $x'_0 = x$ à $x'_0 = x_0$, $\int_{x'_0}^{x} \varphi x\,dx$ restait entre E et F, il n'y aurait qu'à substituer fx à fx_0.

De même, soit

$$G < \sum_{n_0}^{n} \varphi n < H$$

pour toute valeur entière de n entre n_0 et n_1, et soit fn une fonction qui, toujours de même signe, varie toujours dans le même sens, par exemple décroisse pour les valeurs croissantes de n depuis n_0 jusqu'à n_1. On aura, entre ces limites,

$$(\beta) \qquad G fn_0 < \sum_{n_0}^{n} fn\varphi n < H fn_0.$$

On mettrait fn au lieu de fn_0, si f était croissante.

Corollaire II. Si les conditions des formules (α) et (β) sont remplies à partir de valeurs de x suffisamment grandes et jusqu'à l'infini, et que fx et fn deviennent infiniment petits pour x et n infiniment grands, l'intégrale définie et la somme $\sum$ auront chacune une limite finie et déterminée relative à $x = \infty$, $n = \infty$.

Nous faisons abstraction, dans ce corollaire et dans le corollaire IV qui suit, des passages par l'infini qui pourraient avoir lieu pour des valeurs finies de x. Ou, si l'on veut, nous disons que, à partir de la plus grande des valeurs finies de x ou de n qui rendent l'intégrale ou la somme $\sum$ infinie, cette intégrale et cette somme auront des valeurs indéfiniment convergentes vers une limite finie et déterminée.

Démonstration. Soient L et L' deux quantités infiniment grandes, et $L' > L$; de même, N et N' deux nombres entiers infiniment grands, et $N' > N$. On aura toujours, quels que soient L' et N',

$$E' f L < \int_{L}^{L'} fx\varphi x\,dx < F' f L,$$

$$G' f N < \sum_{N}^{N'} fn\varphi n < H' f N.$$

Par hypothèse, les membres extrêmes de ces inégalités sont infiniment petits; donc aussi les membres du milieu, et, par suite, les sommes $\int_{x_0}^{L}$ et $\int_{x_0}^{L'}$ diffèrent infiniment peu, ainsi que $\sum_{n_0}^{N}$ et $\sum_{n_0}^{N'}$. Donc, les quantités $\int_{x_0}^{L}$ et $\sum_{n_0}^{N}$ ont une limite finie et déterminée relative à $L = \infty$. $N = \infty$.

Faisons une application. On sait que les sommes

$$\int \sin(px+q)\,dx, \quad \int \cos(px+q)\,dx,$$
$$\sum \sin(px+q), \quad \sum \cos(px+q)$$

sont finies entre toutes limites, excepté les intégrales lorsque p est nul, et les sommes $\sum$ pour $p = \pm 2k\pi$, k désignant un nombre entier quelconque. Si donc fx finit par décroître constamment et jusqu'à zéro quand x augmente au delà de toute limite, les sommes

$$\int_{x_0}^{L} fx \sin(px+q)\,dx, \quad \int_{x_0}^{L} fx \cos(px+q)\,dx,$$
$$\sum_{n_0}^{N} fn \sin(pn+q), \quad \sum_{n_0}^{N} fn \cos(pn+q),$$

auront pour toutes valeurs de p et q, sauf l'exception signalée, des limites finies et déterminées, relatives à L et N infinis.

On reconnaît là le théorème de M. Malmsten, signalé au commencement; et l'on voit que ce théorème ne suppose point pour φx de propriétés particulières aux fonctions trigonométriques, mais seulement une propriété qui laisse beaucoup plus d'arbitraire à la forme de la fonction.

Corollaire III. Supposons que fx soit, entre x_0 et x_k, successivement croissante et décroissante en valeur absolue, en sorte que, entre ces limites, ses valeurs numériques maxima soient $\pm fx_0$, $\pm fx_1$, $\pm fx_2, \ldots$, $\pm fx_k$, ou, si l'on ne considère que des valeurs entières de la variable, $\pm fn_0$, $\pm fn_1$, $\pm fn_2, \ldots$, $\pm fn_{k'}$.

Si, entre les limites x_0 et x_k, on a toujours en valeur numérique

$$\int \varphi x\,dx < \mathrm{F}, \quad \sum \varphi n < \mathrm{H},$$

il en résultera en valeur numérique

$$\int_{x_0}^{x_k} fx\,\varphi x\,dx < \mathrm{F}\,[fx_0 + 2\,(fx_1 + fx_2 + \ldots + fx_{k-1}) + fx_k]$$

et

$$\sum_{n_0}^{n_{k'}} fn\,\varphi n < \mathrm{H}\,[fn_0 + 2\,(fn_1 + fn_2 + \ldots + fn_{k'-1}) + fn_{k'}].$$

Il est sous-entendu, dans ces inégalités, qu'on doit réduire chaque terme à sa valeur numérique, en sorte que tous soient additifs.

Démonstration. Appelons x'_0, x'_1, $x'_2, \ldots$, x'_{k-1} les valeurs de x qui correspondent soit à $fx = 0$, soit aux minima compris entre les maxima. (Le passage par zéro doit ici être regardé comme un point de minimum.) Nous aurons en valeur numérique

$$\int_{x_0}^{x'_0} < \mathrm{F}fx_0,$$

$$\int_{x'_0}^{x_1} < \mathrm{F}fx_1,$$

$$\int_{x_1}^{x'_1} < \mathrm{F}fx_1,$$

etc.

Il suffit d'ajouter membre à membre pour obtenir la première inégalité à démontrer. La deuxième se démontre semblablement. Nous avons supposé que les valeurs extrêmes de f étaient des maxima numériques, au moins par rapport aux valeurs voisines comprises dans les limites; s'il en était autrement, les formules subiraient une légère modification, qu'on trouverait facilement.

Corollaire IV. Si les conditions du corollaire précédent ont lieu pour des limites supérieures infiniment grandes, et que les sommes

$$(s) \qquad fx_1 + fx_2 + fx_3 + \ldots,$$

$$(s') \qquad fn_1 + fn_2 + fn_3 + \ldots,$$

soient convergentes, il en sera de même de

$$\int_{x_0}^{L} fx\,\varphi\,dx \quad \text{et} \quad \sum_{n_0}^{N} fn\,\varphi\,n,$$

L et N étant infiniment grands.

Ce corollaire doit être entendu dans le sens qui a été expliqué après l'énoncé du corollaire II.

Il peut se faire que les séries (s) et (s'), même relatives à des limites infinies des sommes, soient composées d'un nombre fini de termes; alors, les sommes seront finies à la seule condition que les termes des séries (s) et (s') soient finis. Pour qu'on puisse dire, de plus, que ces sommes finies sont déterminées, il faudra qu'on ait $f\infty = 0$. En un mot, dans ce cas, à partir de la valeur de x qui correspond aux derniers termes des séries (s) et (s'), on rentre dans le corollaire II.

Dans tous les cas, la première condition de convergence de l'intégrale et de la somme $\sum$ est $f\infty = 0$.

Outre cette condition générale, il doit exister une relation entre la fréquence des passages de la fonction fx par ses valeurs maxima, et l'ordre de petitesse que doit avoir cette fonction pour x infiniment grand. Nous allons chercher cette relation. Mais auparavant, remarquons encore que si la fonction sous le signe somme ou sous le signe $\sum$ pouvait se décomposer en deux facteurs, dont l'un χx demeurât fini pour x infiniment grand, et dont l'autre $\mathrm{F}x$ fût de signe constant et tel que les sommes

$$\int_{L}^{\infty} \mathrm{F}x\,dx, \quad \sum_{N}^{\infty} \mathrm{F}n,$$

fussent infiniment petites pour L et N infiniment grands, les sommes

$$\int_{x_0}^{L} \mathrm{F}x\,\chi x\,dx, \quad \sum_{n_0}^{N} \mathrm{F}n\,\chi n$$

seraient convergentes. On le voit immédiatement et sans recourir à nos théorèmes; car, en appelant M le maximum des valeurs numériques de χx depuis L ou N jusqu'à l'infini, on aurait en valeur numérique

$$\int_{L}^{\infty} Fx\,\chi x\,dx < M\int_{L}^{\infty} Fx\,dx,\quad \sum_{N}^{\infty} Fn\,\chi n < M\sum_{N}^{\infty} Fn,$$

quantités infiniment petites.

Enfin, il suffit de considérer la série (s); car la convergence de celle-ci entraînera celle de la série (s'), dont les termes ne peuvent être ni plus grands ni plus nombreux que leurs correspondants de la série (s), ainsi qu'il est facile de le constater. Et comme les conditions de convergence d'une série ne portent que sur les termes infiniment éloignés, nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, la valeur de x infiniment grande. Dans les cas singuliers où la série (s) se prolongerait à l'infini pour des valeurs de x comprises dans des limites finies, l'emploi de cette série comme auxiliaire n'aurait plus d'avantage.

Ces préliminaires entendus, supposons qu'on ait

$$fx = f_1 x \,.\, P(\psi x) = f_1 x\, P(z),$$

$f_1 x$ étant une fonction dont la dérivée ne passe plus par zéro ni par l'infini à partir d'une valeur de x suffisamment grande, quoiqu'elle puisse être nulle ou infinie pour $x = \infty$; $P(z)$ désignant une fonction alternativement croissante et décroissante, et ψx une fonction qui finit par croître en valeur numérique au delà de toute limite, en sorte qu'on ait $\psi\infty = \pm\infty$.

Prenons la dérivée

$$\begin{aligned} f'x &= f_1' x\, P(\psi x) + f_1 x\, \psi' x \,.\, P'(\psi x) \\ &= f_1' x\, P'(\psi x)\left[\frac{P(\psi x)}{P'(\psi x)} + \frac{f_1 x\, \psi' x}{f_1' x}\right]. \end{aligned}$$

Voyons comment il peut y avoir maximum de fx. Par hypothèse, le premier facteur ne passe ni par zéro, ni par l'infini. Nous supposerons que le second facteur ne passe pas par l'infini pour x infiniment grand; s'il s'annule, on ne pourra avoir en même temps $f'x = 0$

que si $P(\psi x)$ s'annule aussi, ce qui donne un minimum numérique. Donc, il ne peut y avoir de maximum de fx que pour des valeurs de x qui annulent la parenthèse. Quand cette parenthèse s'annulera, il y aura, en général, maximum ou minimum. On pourra le constater dans chaque cas en voyant qu'alors les dérivées des termes de la parenthèse sont inégales. Nous devons supposer que cette parenthèse s'annule une infinité de fois, mais seulement quand x augmente jusqu'à l'infini, de telle sorte qu'il y ait une infinité de maxima, mais toujours un nombre fini dans des limites finies. Nous remarquerons que, pour x infiniment grand, la parenthèse s'annule pour des valeurs de $\frac{P(\psi x)}{P'(\psi x)}$ à peu près égales et de signe contraire à la constante $\left(\frac{f_1 x \psi' x}{f_1' x}\right)_{x=\infty}$, et si ce terme est infini pour $x = \infty$, c'est pour des valeurs infiniment grandes de $\frac{P(\psi x)}{P'(\psi x)}$ que la parenthèse s'annule.

Soit maintenant x_0, x_1, $x_2, \ldots$, x_i, $x_{i+1}, \ldots$ une série de valeurs croissantes de x tellement choisies qu'on ait toujours

$$\psi x_{i+1} - \psi x_i = \pm p,$$

p désignant un nombre pris arbitrairement. Ces valeurs de x croîtront avec i et ψx au delà de toute limite. Nous supposerons que dans l'intervalle de x_i à x_{i+1}, il y ait, en général, m_i maxima de fx, et que M_i désigne la plus grande valeur que puisse prendre la fonction Pz au moment du passage par ces m_i maxima. Alors, les termes de (s) (dans lesquels, pour éviter la confusion, on peut supposer x_0, x_1, $x_2, \ldots$ remplacés par ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \ldots$), ceux de ces termes, dis-je, qui seront compris dans l'intervalle de x_i à x_{i+1}, formeront une somme σ_i numériquement plus petite que $m_i M_i f_1 x_i$, si $f_1 x$ est numériquement décroissante; et si $f_1 x$ est croissante, l'inégalité subsistera encore, en convenant que σ_i, m_i, M_i se rapportent à l'intervalle de x_{i-1} à x_i. Ainsi, dans tous les cas, la série (s) sera convergente si $\sum m_i M_i f_1 x_i$ est convergente. Nous prendrons pour condition de convergence de cette dernière série.

$$m_i M_i f x_i < \frac{u}{i^{1-\alpha}}$$

pour toutes valeurs de i suffisamment grandes, u étant une fonction finie de i, ou même infiniment grande, pourvu qu'elle soit infiniment petite par rapport à toute puissance positive de i, et a étant aussi petit que nous voudrons.

Nous avons, par hypothèse,

$$\begin{aligned}
\psi x_1 - \psi x_0 &= \pm p, \\
\psi x_2 - \psi x_1 &= \pm p, \\
&\dots\dots\dots \\
\psi x_i - \psi x_{i-1} &= \pm p;
\end{aligned}$$

et comme nous supposons que la valeur numérique de ψx est toujours croissante, il faut prendre partout le signe $+$, ou partout le signe $-$. On déduit de là

$$\psi x_i = \psi x_0 \pm p_i,$$

$$\frac{1}{(\psi x_i)^{1+a^2}} = \frac{1}{(\psi x_0 \pm p_i)^{1+a^2}} = \frac{u}{i^{1+a^2}}.$$

Donc, la condition de convergence est, V désignant une fonction de x ou finie, ou du moins infiniment petite par rapport à toute puissance positive de ψx,

$$\text{(C)} \qquad m_i \mathrm{M}_i f_1 x_i \mathrel{\overline{\overline{<}}} \frac{\mathrm{V}}{(\psi x_i)^{1+a^2}}.$$

Ainsi, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Soient φx et φn tels, qu'entre toutes limites les sommes $\int \varphi x\,dx$ et $\sum \varphi n$ soient finies, au moins à partir des valeurs x_0 et n_0; $f_1 x$ une fonction dont la dérivée, pour x infiniment grand, ne passe plus par zéro ni par l'infini; ψx une fonction qui, numériquement, finit par croître au delà de toute limite; $\mathrm{P}z = \mathrm{P}(\psi x)$ une fonction telle que de $z_i = \psi x_i$ à $z_i \pm p = \psi(x_{i+1})$ elle fasse passer le produit $f_1 x\,\mathrm{P}(\psi x)$ par m_i maxima; enfin M_i la plus grande valeur que prenne dans ce passage la fonction $\mathrm{P}(\psi x)$.*

Si l'on finit par avoir constamment

$$\text{(C)} \qquad m_i \mathrm{M}_i f_1 x_i \mathrel{\overline{\overline{<}}} \frac{\mathrm{V}}{(\psi x_i)^{1-a^2}},$$

a étant aussi petit qu'on veut, les sommes

$$\int_{x_0}^{\infty} f_1 x \, \mathrm{P}(\psi x) \, \varphi x \, dx, \quad \sum_{n_0}^{\infty} f_1 n \, \mathrm{P}(\psi n) \, \varphi n,$$

seront finies et déterminées.

Nous supposons $f_1 x$ numériquement décroissante. Si $f_1 x$ était numériquement croissante, m_i et M_i se rapporteraient à l'intervalle de z_{i-1} à z_i.

i désigne ici un nombre quelconque de la suite 0, 1, 2,...; p est un nombre arbitraire, assez grand cependant pour que m_i ne soit pas généralement nul, et x_0, n_0 sont définies par la condition exprimée au corollaire II; c'est-à-dire nous supposons qu'à partir de x_0 et n_0, les sommes

$$\int f_1 x \, \mathrm{P}(\psi x) \, \varphi x \, dx, \quad \sum f_1 n \, \mathrm{P}(\psi n) \, \varphi n,$$

ne passent par l'infini pour aucune valeur particulière de x et de n, si grande soit elle. Il ne s'agit, dans la condition (C), que de valeurs numériques.

Si m_i et M_i restent finis, cette condition peut se remplacer par celle-ci :

$$f_1 x_i \overset{=}{<} \frac{\mathrm{V}}{(\psi x_i)^{1+a^2}},$$

ou, en supprimant l'indice i,

$$(\mathrm{C}_1) \qquad f_1 x \overset{=}{<} \frac{\mathrm{V}}{(\psi x)^{1+a^2}}.$$

Inversement,

$$\psi x \overset{=}{<} \frac{\mathrm{V}'}{(f_1 x)^{1-b^2}},$$

a et b étant aussi petits qu'on voudra.

Dans le cas de M_i fini, nous pourrons, d'après une remarque précédente, mettre de côté les cas où $\int_{\mathrm{L}}^{\infty} f_1 x \, dx$ serait infiniment petite, comme, par exemple,

$$\int_{\mathrm{L}}^{\infty} e^{-a^2 x} dx, \quad \int_{\mathrm{L}}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+a^2}}.$$

Restent alors les hypothèses principales suivantes :

$$f_1 x = \frac{1}{x^{1-\alpha^2}}, \quad f_1 x = \frac{1}{(lx)^{\beta^2}}, \quad f_1 x = \frac{1}{(llx)^{\gamma^2}}, \quad \text{etc.},$$

ou, plus généralement, $f_1 x$ fonction de forme quelconque infiniment petite de ces ordres. α est < 1.

Si

$$f_1 x = \frac{V}{x^{1-\alpha^2}},$$

V désignant une fonction de x qui reste finie, ou qui, du moins, si elle devient infiniment grande, reste infiniment petite par rapport à toute puissance positive de x, on devra avoir pour x infiniment grand,

$$\psi x \overline{\gtrless} V' x^{1-\alpha^2-\alpha'^2},$$

V′ remplissant les mêmes conditions que V.

De même,

$$\text{Si} \quad f_1 x = \frac{V}{(lx)^{\beta^2}}, \quad \text{on devra avoir} \quad \psi x \overline{\gtrless} V' (lx)^{\beta^2 - \beta'^2},$$

V et V′ désignant cette fois ou des fonctions de x qui restent finies quand x est infiniment grand, ou du moins des fonctions infiniment petites par rapport à toute puissance positive de lx. Etc.

Inversement,

$$\text{Si} \quad \psi x = V' x^{\mu}, \quad \text{on devra avoir} \quad f_1 x \overline{\gtrless} \frac{V}{x^{\mu+\alpha''^2}},$$

$$\text{Si} \quad \psi x = V' (lx)^{\nu}, \quad \text{on devra avoir} \quad f_1 x \overline{\gtrless} \frac{V}{(lx)^{\nu+\beta''^2}},$$

etc., etc. ;

α', β', α'', β'' désignent des quantités aussi petites qu'on voudra.

Si M_i était infiniment petit pour i infiniment grand, la condition de convergence pourrait se trouver remplie même pour $f_1 x$ infiniment grand, l'ordre de cet infiniment grand ayant un rapport convenable avec l'ordre de grandeur ou de petitesse des fonctions m_i, M_i, $\psi(x_i)$.

Application. Supposons que φn soit remplacé par $\sin(np_1 + q)$ ou par $\cos(np_1 + q)$, ψn par gln et $P(\psi n)$ par $\sin(gln)$ ou par $\cos(gln)$, p_1 et q_1 désignant des constantes, et g une fonction finie de n; prenons $p = \pi$, nous serons dans le cas de M_i et m_i finis, et toutes nos conditions seront remplies, pourvu que l'on finisse par avoir

$$f_1 x \overline{\overline{<}} \frac{V}{(lx)^{1+a^2}},$$

a étant aussi petit qu'on veut, et V désignant, comme tout à l'heure, une fonction qui reste finie, ou qui du moins devient infiniment petite par rapport à toute puissance positive de lx.

Or, nous tombons alors dans les séries que M. Björling a considérées; car on a

$$\sum_{n_0}^{n} \operatorname{arc\,tang} \frac{v}{\rho + n} = g' \int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n} = gln,$$

g et g' désignant des fonctions finies de n, si v est finie, ainsi que le suppose M. Björling. Donc, ces séries et les intégrales correspondantes seront convergentes, pourvu que $f_1 x$ finisse par devenir infiniment petit, au moins de l'ordre $\frac{V}{(lx)^{1+a^2}}$, ce qui donne plus de latitude que la règle donnée par ce géomètre.

Remarque. On pourrait encore reculer les limites de nos conditions de convergence, en prenant pour celle d'une série $\sum Fn$, la condition

$$Fn \overline{\overline{<}} \frac{u}{n\, ln\, lln \ldots (l^{(k)} n)^{1+a^2}}.$$