JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J.-A. SERRET

Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 1-40.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__1_0>

… …

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure;

PAR M. J.-A. SERRET.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 12 juillet 1852.)

Diverses questions de géométrie, et particulièrement un grand nombre de celles qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure, se ramènent à l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles simultanées à trois variables qui ont un caractère remarquable. Les systèmes dont il s'agit sont formés de deux équations entre plusieurs fonctions de trois variables et de leurs différentielles jusqu'à celles d'un certain ordre quelconque; ces fonctions sont telles, qu'étant égalées à des constantes arbitraires, les équations qui en résultent se réduisent, après la différentiation, à une ou au plus à deux équations différentielles distinctes.

Dans le premier cas, celui où les équations dont nous parlons se réduisent à une seule, le système des équations proposées n'a point, à proprement parler, d'intégrale; il se réduit en quelque sorte à une équation unique et admet, par suite, une solution qui renferme une fonction arbitraire. Mais, outre cette solution si générale, il en existe une autre à laquelle on peut justement donner le nom de solution particulière et qui renferme un moindre nombre de constantes arbitraires qu'il n'y en a, en général, dans l'intégrale d'un système de même ordre que le proposé. Cette solution particulière donne presque toujours la véritable solution de la question qui a conduit aux équations différentielles proposées. On en a un exemple dans le problème qui a pour objet de trouver une courbe dont les centres des sphères osculatrices soient situées sur une courbe donnée. On satisfait effectivement à la question en prenant une courbe tracée à volonté sur une sphère de rayon arbitraire et qui aurait son centre en un point quelconque de la courbe donnée; mais on y satisfait aussi par le moyen d'une courbe non sphérique et dont les équations renferment deux constantes arbitraires.

Le deuxième cas conduit à des résultats différents. Les équations proposées admettent une intégrale et une solution particulière qui renferme généralement une constante arbitraire de moins que l'intégrale, et qui donne presque toujours la vraie solution du problème qui a conduit aux équations différentielles proposées. On a un exemple de ce deuxième cas dans le problème qui a pour but de trouver une courbe dont les centres de courbure soient sur une courbe donnée, plane ou à double courbure. On satisfait évidemment au problème en prenant un cercle dont le rayon et le plan soient arbitraires, et dont le centre soit en un point quelconque de la courbe donnée. Les équations de ce cercle renferment quatre constantes arbitraires et forment l'intégrale générale des équations différentielles du problème auquel on satisfait aussi par le moyen d'autres courbes dont les équations peuvent contenir trois constantes arbitraires au plus.

Lagrange est, je crois, le premier qui ait considéré des équations différentielles à deux variables formées avec deux ou plusieurs fonctions de ces variables et de leurs différentielles qui, égalées à des constantes arbitraires, fournissent autant d'intégrales d'une même équation. Dans une Note que j'ai publiée à la suite de la *Théorie des Fonctions analytiques* (troisième édition), j'ai ajouté quelques développements à l'analyse de Lagrange, et les considérations dont j'ai fait usage ont été le point de départ des recherches nouvelles que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

Ce Mémoire est composé de deux parties. La première partie renferme l'analyse générale des équations différentielles dont il a été parlé plus haut, avec plusieurs applications de la théorie. Dans la seconde partie, j'étudie les détails que présente la solution des deux problèmes principaux qui m'ont conduit à entreprendre les recherches actuelles. On y verra une application remarquable des formules dont j'ai fait usage dans plusieurs Mémoires, et, en particulier, dans celui que j'ai publié au tome XVI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Soient

$$x,\ y,\ z,$$

trois variables dont l'une peut être supposée indépendante, les deux autres étant alors des fonctions inconnues de celle-là. Soient

$$\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi,$$

μ fonctions de x, y, z et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, telles que les équations

$$(1)\qquad \varphi = a,\quad \psi = b,\quad \varpi = c,\ldots,\quad \chi = k,$$

où $a, b, c,\ldots, k$ désignent μ constantes arbitraires, satisfassent à la même équation différentielle d'ordre $n+1$,

$$(2)\qquad \Omega = 0.$$

Cette circonstance aura lieu évidemment si les rapports des différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi,\ldots$, $d\chi$ à l'une d'entre elles ne contiennent les différentielles de x, y, z que jusqu'à l'ordre n. Soient enfin f et F deux fonctions données, et considérons les deux équations simultanées

$$(3)\qquad \begin{cases} f(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi) = 0,\\ \mathrm{F}(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi) = 0. \end{cases}$$

Ces équations n'ont pas, à proprement parler, d'intégrale. En effet, prenons x pour variable indépendante; si les équations (3) admettaient une intégrale, on pourrait en tirer les valeurs de $d^n y$ et de $d^n z$; par suite, les équations obtenues en différentiant les équations (3), feraient connaître $d^{n+1} y$ et $d^{n+1} z$. Mais cela n'a pas lieu, puisque les premiers membres des équations dont il s'agit s'obtiennent en multipliant la même quantité Ω par des fonctions qui ne contiennent les différentielles de y et de z que jusqu'à l'ordre n.

Cela posé, il est évident que les équations (3) seront satisfaites en même temps que les équations (1), pourvu que, dans ces dernières, on considère les quantités $a, b, c, \ldots, k$ comme assujetties à vérifier les deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} f(a, b, c, \ldots, k) = 0, \\ F(a, b, c, \ldots, k) = 0; \end{cases}$$

or on peut satisfaire aux équations (1) de deux manières très-différentes : 1° en supposant les quantités $a, b, c, \ldots, k$ constantes; 2° en supposant ces mêmes quantités variables.

Je dis d'abord que l'équation obtenue en éliminant entre les équations (1) les $\mu - 1$ différentielles

$$d^n y, \quad d^{n-1} y, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} y,$$

ne contiendra pas non plus les différentielles

$$d^n z, \quad d^{n-1} z, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} z.$$

Considérons z comme une fonction donnée, quoique arbitraire, de la variable indépendante x, et $a, b, c, \ldots, k$ comme des constantes arbitraires. Alors l'équation (2) sera une équation différentielle à deux variables x et y seulement, et il est clair que les équations (1) en seront μ intégrales premières; ce qui montre, en premier lieu, que μ doit être au plus égal à $n + 1$. En second lieu, l'équation

$$(5) \qquad \Pi = 0,$$

obtenue en éliminant

$$d^n y, \quad d^{n-1} y, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} y,$$

entre les équations (1), sera une intégrale d'ordre μ de l'équation (2); par conséquent, d'après la théorie des constantes arbitraires, le système des équations (1) sera équivalent à celui formé de l'équation (5) et de ses $\mu - 1$ premières différentielles, c'est-à-dire au système

$$(6) \qquad \Pi = 0, \quad d\Pi = 0, \quad d^2\Pi = 0, \ldots, \quad d^{\mu-1}\Pi = 0.$$

Il résulte de là que l'équation (5) ne peut contenir les différentielles

$$d^n z, \quad d^{n-1} z, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} z.$$

Si, en effet, l'équation (5) contenait les différentielles de z de l'ordre $n - \mu + 2$ ou des ordres supérieurs, les équations (6) en contiendraient d'ordres supérieurs à n, et elles ne pourraient plus dès lors former un système équivalent au système (1).

On voit par là qu'on satisfera aux équations proposées (3) si l'on satisfait à la seule équation (5), qui est seulement de l'ordre $n - \mu + 1$ par rapport à y et par rapport à z, pourvu toutefois que l'on considère $a, b, c, \ldots, k$ comme des constantes assujetties à vérifier les équations (4). On pourra donc prendre pour z une fonction quelconque de x, ou, plus généralement, établir entre x, y, z telle relation que l'on voudra. A l'aide de cette relation, on pourra réduire l'équation (5) à ne plus contenir que deux variables, et, en l'intégrant, on aura un résultat renfermant $n - \mu + 1$ nouvelles constantes; ce qui, avec les $\mu - 2$ qui restent arbitraires parmi $a, b, c, \ldots, k$, fera en tout $n - 1$ constantes arbitraires.

Maintenant, il est évident qu'on satisfera encore aux équations (3) si l'on satisfait à l'équation (5), où $a, b, c, \ldots, k$ seront considérées comme variables, pourvu que les équations (6) équivalentes aux équations (1) demeurent les mêmes dans le cas de $a, b, c, \ldots$ variables que dans le cas de $a, b, c, \ldots$, constantes. Pour plus de clarté, nous emploierons exclusivement la caractéristique d pour désigner les différentielles dans l'hypothèse de $a, b, c, \ldots, k$ constantes, et nous dénoterons par δ les différentielles relatives à $a, b, c, \ldots, k$.

D'après cela, en différentiant l'équation

$$\Pi = 0$$

dans l'hypothèse de a, b, c,..., variables, on trouve

$$d\Pi + \delta\Pi = 0,$$

et l'on voit que, pour avoir

$$d\Pi = 0,$$

il faut poser

$$\delta\Pi = 0.$$

En différentiant de même l'équation

$$d\Pi = 0,$$

on trouve

$$d^2\Pi + \delta d\Pi = 0;$$

par suite, puisqu'on veut avoir

$$d^2\Pi = 0,$$

il faut poser

$$\delta d\Pi = 0;$$

en poursuivant ce raisonnement, on voit que les conditions pour que les équations (6) aient lieu dans le cas de a, b, c,..., variables, sont

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta d\Pi = 0, \quad \delta d^2\Pi = 0, \ldots, \quad \delta d^{\mu-2}\Pi = 0.$$

En d'autres termes, on satisfera aux équations proposées (3) si l'on satisfait aux μ équations

$$(7) \qquad \Pi = 0, \quad \delta\Pi = 0, \quad \delta d\Pi = 0, \ldots, \quad \delta d^{\mu-2}\Pi = 0,$$

et qu'on regarde les quantités a, b, c,..., k actuellement variables comme étant toujours assujetties à vérifier les équations (4). Les équations (7) jointes aux équations (4) formeront un système de $\mu + 2$ équations entre les $\mu + 3$ variables

$$x, \ y, \ z, \quad a, \ b, \ c, \ldots, \ k;$$

ce système admettra donc, en général, une intégrale qui formera une solution parfaitement déterminée des équations (3).

On peut mettre les équations (7) sous une forme qui sera souvent plus commode. Différentions, en effet, chacune de ces équations à partir de la deuxième et jusqu'à l'avant-dernière. On aura, en observant qu'on peut intervertir l'ordre des différentiations par d et par δ,

$$\delta d\Pi + \delta^2\Pi = 0,\quad \delta d^2\Pi + \delta^2 d\Pi = 0,\quad \delta d^{\mu-2}\Pi + \delta^2 d^{\mu-3}\Pi = 0;$$

d'où il suit que le système (7) peut être remplacé par le suivant :

$$\Pi = 0,\quad \delta\Pi = 0,\quad \delta^2\Pi = 0,\quad \delta^2 d\Pi = 0,\ldots,\quad \delta^2 d^{\mu-3}\Pi = 0;$$

opérant sur ce système comme sur le système (7) et continuant ainsi, on remplacera partout la caractéristique d par la δ, et l'on formera le nouveau système équivalent à (7), savoir

$$(8)\qquad \Pi = 0,\quad \delta\Pi = 0,\quad \delta^2\Pi = 0,\ldots,\quad \delta^{\mu-1}\Pi = 0,$$

qui ne contient les différentielles de y et de z que jusqu'à l'ordre $n-\mu+1$.

II.

Comme application de la théorie précédente, proposons-nous de trouver la courbe dont les sphères osculatrices ont leurs centres sur une courbe donnée.

Désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires de la courbe cherchée; par ds la différentielle de l'arc de cette courbe; par ρ le rayon de courbure; par r le rayon de torsion; par ξ, υ, ζ; λ, μ, ν les angles formés respectivement avec les axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur; enfin par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de la sphère osculatrice. On a [*]

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + \rho\cos\xi - r\frac{d\rho}{ds}\cos\lambda,\\ y_1 &= y + \rho\cos\upsilon - r\frac{d\rho}{ds}\cos\mu,\\ z_1 &= z + \rho\cos\zeta - r\frac{d\rho}{ds}\cos\nu. \end{aligned}\right.$$

[*] *Voir* le Mémoire que j'ai publié au tome XVI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

On pourrait exprimer aisément x_1, y_1, z_1 en fonction de x, y, z et de leurs différentielles; mais ces expressions, qui sont très-compliquées, ne nous sont pas nécessaires; il suffit, pour notre objet, de remarquer qu'elles renfermeraient les différentielles des coordonnées jusqu'au troisième ordre. D'après l'énoncé de la question, les coordonnées x_1, y_1, z_1 qui appartiennent à un point de la courbe donnée devront vérifier les équations de cette courbe, savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ F(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases}$$

En substituant à x_1, y_1, z_1 leurs valeurs, ces équations (2) deviendront des équations différentielles du troisième ordre dont il faut trouver les solutions. Or je dis que ces équations appartiennent à la classe de celles dont il a été question au paragraphe précédent. En effet, des équations (1) on déduit (*voir* le Mémoire cité plus haut)

$$dx_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\lambda,$$

$$dy_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\mu,$$

$$dz_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\nu,$$

en sorte qu'en différentiant les équations

$$x_1 = \text{constante},\quad y_1 = \text{constante},\quad z_1 = \text{constante},$$

on trouve l'équation unique

$$\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = 0.$$

Cela posé, d'après l'analyse exposée au paragraphe précédent, il est possible d'éliminer entre les équations (1) les différentielles du deuxième et du troisième ordre. Cette élimination se fait immédiatement, en ajoutant les équations (1) après les avoir multipliées par dx, dy, dz respectivement; on obtient ainsi

$$(3)\qquad (x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy + (z - z_1)\,dz = 0.$$

En considérant x_1, y_1, z_1 comme des constantes liées par les équations (2), cette équation (3) fera connaître la solution générale de notre problème. Intégrant donc, dans l'hypothèse de x_1, y_1, z_1 constantes, il vient

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\text{constante};$$

d'où il suit que si l'on conçoit une surface sphérique de rayon arbitraire, et dont le centre soit en un point quelconque de la courbe donnée, puis que l'on trace sur cette sphère une courbe quelconque, cette courbe satsifera au problème. Cette solution est évidente à priori.

Mais pour avoir la solution particulière, qui est ici la vraie solution, il faut, conformément à notre théorie, joindre à l'équation (3) ses deux premières différentielles par rapport à x_1, y_1, z_1, considérées comme seules variables. On obtient ainsi le système

$$\left\{\begin{array}{c}(x-x_1)\,dx+(y-y_1)\,dy+(z-z_1)\,dz=0,\\ dx_1\,dx+dy_1\,dy+dz_1\,dz=0,\\ d^2x_1\,dx+d^2y_1\,dy+d^2z_1\,dz=0,\end{array}\right.$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(4)\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dx}{dy_1\,d^2z_1-dz_1\,d^2y_1}=\dfrac{dy}{dz_1\,d^2x_1-dx_1\,d^2z_1}=\dfrac{dz}{dx_1\,d^2y_1-dy_1\,d^2x_1},\\ (dy_1\,d^2z_1-dz_1\,d^2y_1)(x-x_1)+(dz_1\,d^2x_1-dx_1\,d^2z_1)(y-y_1)\\ \qquad+(dx_1\,d^2y_1-dy_1\,d^2x_1)(z-z_1)=0.\end{array}\right.$$

On peut chasser y_1 et z_1 à l'aide des équations (2), puis tirer ensuite la valeur de x_1 de la dernière équation (4) pour la porter dans les autres; on obtiendra ainsi un système de deux équations différentielles du premier ordre entre x, y, z. L'intégration de celles-ci amènera deux constantes arbitraires seulement.

Il est bon de remarquer qu'on arrive immédiatement à poser les équations (4), si l'on considère la courbe cherchée comme une trajectoire orthogonale des plans osculateurs de la courbe donnée.

III.

Soient, comme précédemment,

$$x,\quad y,\quad z,$$

trois variables dont la première x sera supposée indépendante; les deux autres seront alors des fonctions de x. Soient

$$\varphi,\quad \psi,\quad \varpi,\ldots,\quad \chi,$$

μ fonctions de x, y, z, et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, telles que les équations

$$(1)\qquad \varphi = a,\quad \psi = b,\quad \varpi = c,\ldots,\quad \chi = k,$$

où a, b, $c,\ldots$, k désignent μ constantes arbitraires, satisfassent aux deux équations d'ordre $n+1$

$$(2)\qquad \Omega = 0,\quad \Omega_1 = 0,$$

mais ne se réduisent pas toutes, par la différentiation, à une seule des équations précédentes, comme dans le cas que nous avons traité au § I. L'hypothèse où nous nous plaçons sera réalisée si chacune des différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi,\ldots$, $d\chi$ s'obtient en ajoutant les quantités Ω, Ω_1, respectivement multipliées par des facteurs qui ne contiennent les différentielles de y et de z que jusqu'à l'ordre n. Soient enfin f et F deux fonctions données, et considérons les deux équations simultanées

$$(3)\qquad \begin{cases} f(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi) = 0, \\ \mathrm{F}(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi) = 0. \end{cases}$$

Il est évident que ces équations (3) seront satisfaites en même temps que les équations (1), pourvu que, dans ces dernières, on considère les quantités a, b, $c,\ldots$, k comme assujetties à vérifier les deux équations

$$(4)\qquad \begin{cases} f(a,\ b,\ c,\ldots,\ k) = 0, \\ \mathrm{F}(a,\ b,\ c,\ldots,\ k) = 0. \end{cases}$$

Or on peut satisfaire aux équations (1) de deux manières: 1° en supposant a, b, $c, \ldots$, k constantes; 2° en considérant ces mêmes quantités comme variables.

Pour satisfaire aux équations (1) dans l'hypothèse de a, b, $c, \ldots$, k constantes, il est clair qu'il suffit d'achever l'intégration des équations (2) dont les équations (1) forment déjà μ intégrales, puis d'éliminer du résultat toutes les différentielles. La solution ainsi obtenue renfermera $2n$ constantes arbitraires, et formera en conséquence l'intégrale générale du système (3). On arrivera encore au même résultat en éliminant des équations (1) $\mu - 2$ différentielles parmi les plus hautes de y ou de z, ou de l'une et l'autre variables, puis intégrant ensuite le système des équations

$$\Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0, \tag{5}$$

résultant de cette élimination. Il est bon de remarquer que les équations (5) peuvent admettre une solution particulière outre leur intégrale, et qu'à cette solution particulière peut correspondre une solution particulière des équations (3). On en verra un exemple dans la suite de ce Mémoire; mais la solution particulière qu'il importe surtout de remarquer est celle que l'on obtient en considérant a, b, $c, \ldots$, k comme variables, et dont nous allons nous occuper.

D'après la théorie des équations différentielles, le système (5) est, en général, équivalent au système (1), dans l'hypothèse de a, b, $c, \ldots$, k constantes, en ce sens qu'on pourra retrouver les équations (1) en combinant les équations (5) avec celles qu'on en déduit par une ou plusieurs différentiations. Si donc ces dernières équations sont les mêmes dans le cas de a, b, $c, \ldots$, k variables que dans le cas de a, b, $c, \ldots$, k constantes, les équations (5) continueront de fournir une solution des équations (3). Pour qu'il en soit ainsi, il faudra satisfaire à un nombre d'équations de condition égal au nombre des différentielles qu'on aura éliminées des équations (1) pour former les équations (5), c'est-à-dire égal à $\mu - 2$. Ces $\mu - 2$ équations, jointes aux équations (4) et (5), formeront un système de $\mu + 2$ équations entre les $\mu + 3$ variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad a, \quad b, \quad c, \ldots, \quad k,$$

dont l'intégrale sera la solution particulière des équations (3). Nous allons entrer à ce sujet dans quelques détails.

Si μ est pair, on pourra éliminer des équations (1) les différentielles de y et de z à partir de l'ordre $n - \frac{\mu}{2} + 2$; on peut donc supposer que les équations (5) ne soient que de l'ordre $n - \frac{\mu}{2} + 1$, tant par rapport à y que par rapport à z. Si, au contraire, μ est impair, on pourra éliminer des équations (1) les différentielles de y et de z à partir de l'ordre $n - \frac{\mu - 1}{2} + 1$ pour l'une des variables, et à partir de l'ordre $n - \frac{\mu - 1}{2} + 2$ pour l'autre; on peut donc supposer que la première équation (5) soit de l'ordre $n - \frac{\mu - 1}{2}$ par rapport à chaque variable, et que la deuxième soit de ce même ordre par rapport à une des variables, mais de l'ordre immédiatement supérieur par rapport à l'autre variable. Cela posé, il est évident que, dans le cas de $a, b, c, \ldots$, constantes, les équations, qu'il faut joindre aux équations (5) pour former un système équivalent au système (1), sont

$$(6) \qquad \begin{cases} d\Pi = 0, \quad d^2\Pi = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi = 0, \\ d\Pi_1 = 0, \quad d^2\Pi_1 = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ pair, et

$$(6') \qquad \begin{cases} d\Pi = 0, \quad d^2\Pi = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu+1}{2}-1}\Pi = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ d\Pi_1 = 0, \quad d^2\Pi_1 = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu-1}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ impair. Il faut donc, pour avoir la solution particulière des équations (3), exprimer que les équations (6) ou (6′) sont les mêmes dans le cas de $a, b, c, \ldots$, variables que dans le cas de a, $b, c, \ldots$, constantes. Or, si l'on dénote par la caractéristique δ les différentielles relatives à $a, b, c, \ldots$, considérées comme seules variables et que l'on réserve la d pour désigner les différentielles prises comme si a, b, c,..., étaient constantes, on trouvera, par le raisonnement employé au § I, que les conditions demandées sont

$$(7)\qquad \begin{cases} \delta\Pi = 0, & \delta d\Pi = 0,\ldots, \quad \delta d^{\frac{\mu}{2}-2}\Pi = 0, \\ \delta\Pi_1 = 0, & \delta d\Pi_1 = 0,\ldots, \quad \delta d^{\frac{\mu}{2}-2}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ pair, et

$$(7')\qquad \begin{cases} \delta\Pi = 0, & \delta d\Pi = 0,\ldots, \quad \delta d^{\frac{\mu+1}{2}-2}\Pi = 0. \\ \delta\Pi_1 = 0, & \delta d\Pi_1 = 0,\ldots, \quad \delta d^{\frac{\mu-1}{2}-2}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ impair.

On voit aussi, à l'aide du raisonnement déjà employé, qu'on peut, si on le juge à propos, remplacer partout la d par la δ, et prendre en conséquence

$$(8)\qquad \begin{cases} \delta\Pi = 0, & \delta^2\Pi = 0,\ldots, \quad \delta^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi = 0, \\ \delta\Pi_1 = 0, & \delta^2\Pi_1 = 0,\ldots, \quad \delta^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ pair, et

$$(8')\qquad \begin{cases} \delta\Pi = 0, & \delta^2\Pi = 0,\ldots, \quad \delta^{\frac{\mu-1}{2}-1}\Pi = 0, \quad \delta^{\frac{\mu-1}{2}}\Pi = 0, \\ \delta\Pi_1 = 0, & \delta^2\Pi_1 = 0,\ldots, \quad \delta^{\frac{\mu-1}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ impair.

Le système formé par les équations (8) ou (8′) jointes aux équations (4) et (5) fera connaître la solution particulière cherchée.

Dans le cas de $\mu = 3$, les équations (8′) se réduisent à l'équation unique

$$\delta\Pi = 0,$$

comme cela doit être, ainsi qu'on s'en assure en traitant à part ce cas particulier. Dans le cas de $\mu = 4$, les équations (8) se réduisent aux deux

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta\Pi_1 = 0.$$

IV.

On peut former les équations

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta\Pi_1 = 0, \ldots,$$

sans faire l'élimination qui conduit aux équations

$$\Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0.$$

Nous nous bornerons aux cas de $\mu = 3$ et $\mu = 4$.

Soient, en premier lieu, les équations

$$(1) \qquad \begin{cases} f(\varphi, \psi, \varpi) = 0, \\ F(\varphi, \psi, \varpi) = 0; \end{cases}$$

φ, ψ, ϖ étant des fonctions de x, y, z et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n, telles que

$$(2) \qquad \varphi = a, \quad \psi = b, \quad \varpi = c;$$

soient trois intégrales du système

$$(3) \qquad \Omega = 0, \quad \Omega_1 = 0.$$

Prenons x pour variable indépendante et posons

$$d^n y = p\,dx^n, \quad d^n z = q\,dx^n;$$

il est clair que l'équation dont nous avons besoin s'obtiendra en portant dans la première équation (2) les valeurs de p et q tirées des deux autres, puis en différentiant le résultat par rapport aux seules quantités a, b, c; par conséquent, cette équation s'obtiendra aussi en différentiant les trois équations (2) par rapport à p, q, a, b, c et éliminant

dp et dq du résultat. En opérant ainsi, on trouve

$$\frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\varphi}{dq}dq = da,$$
$$\frac{d\psi}{dp}dp + \frac{d\psi}{dq}dq = db,$$
$$\frac{d\varpi}{dp}dp + \frac{d\varpi}{dq}dq = dc;$$

d'où, en éliminant dp et dq,

$$(4)\quad \left(\frac{d\psi}{dp}\frac{d\varpi}{dq} - \frac{d\psi}{dq}\frac{d\varpi}{dp}\right)da + \left(\frac{d\varpi}{dp}\frac{d\varphi}{dq} - \frac{d\varpi}{dq}\frac{d\varphi}{dp}\right)db + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)dc = 0.$$

Cela posé, si l'on élimine p ou q entre les équations (2) et (4), on aura trois équations qui, jointes à

$$f(a,\ b,\ c) = 0,$$
$$F(a,\ b,\ c) = 0,$$

composeront le système qui fournit la solution particulière des équations (1).

Soient, en second lieu, les équations

$$(1)\qquad \begin{cases} f(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ \chi) = 0, \\ F(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ \chi) = 0; \end{cases}$$

φ, ψ, ϖ, χ étant des fonctions de x, y, z et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n, telles que

$$(2)\qquad \varphi = a,\quad \psi = b,\quad \varpi = c,\quad \chi = e;$$

soient quatre intégrales du système

$$(3)\qquad \Omega = 0,\quad \Omega_1 = 0.$$

Prenons toujours x pour variable indépendante, et posons comme précédemment

$$d^n y = p\,dx^n,\quad d^n z = q\,dx^n;$$

les deux équations que nous cherchons s'obtiendront en remplaçant, dans les deux premières équations (2), p et q par leurs valeurs tirées des deux autres, puis en différentiant ensuite les résultats par rapport à a, b, c, e; d'où il suit que les mêmes équations s'obtiendront aussi en éliminant dp et dq des quatre suivantes :

$$\frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\varphi}{dq}dq = da,$$
$$\frac{d\psi}{dp}dp + \frac{d\psi}{dq}dq = db,$$
$$\frac{d\varpi}{dp}dp + \frac{d\varpi}{dq}dq = dc,$$
$$\frac{d\chi}{dp}dp + \frac{d\chi}{dq}dq = de.$$

On obtient ainsi

$$(4)\left\{\begin{aligned}&\left(\frac{d\psi}{dp}\frac{d\varpi}{dq} - \frac{d\psi}{dq}\frac{d\varpi}{dp}\right)da + \left(\frac{d\varpi}{dp}\frac{d\varphi}{dq} - \frac{d\varpi}{dq}\frac{d\varphi}{dp}\right)db + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)dc = 0,\\ &\left(\frac{d\psi}{dp}\frac{d\chi}{dq} - \frac{d\psi}{dq}\frac{d\chi}{dp}\right)da + \left(\frac{d\chi}{dp}\frac{d\varphi}{dq} - \frac{d\chi}{dq}\frac{d\varphi}{dp}\right)dc + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)de = 0.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, si l'on élimine p et q entre les équations (2) et (4), on aura quatre équations qui, jointes aux deux

$$f(a, b, c, e) = 0,$$
$$\mathrm{F}(a, b, c, e) = 0,$$

composeront le système qui donne la solution particulière des équations proposées.

V.

Comme première application de la théorie qui vient d'être exposée, nous résoudrons la question suivante :

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une courbe C, ds la différentielle de l'arc de cette courbe; si l'on fait

$$(1)\qquad\left\{\begin{aligned}x_1 &= y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds},\\ y_1 &= z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds},\\ z_1 &= x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds},\end{aligned}\right.$$

les points (x_1, y_1, z_1) formeront une courbe C_1. Cela posé, on demande de trouver la courbe C, connaissant les équations de la courbe C_1, savoir

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} & f(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ & F(x_1, y_1, z_1) = 0; \end{aligned} \right.$$

en d'autres termes, on demande de trouver l'intégrale et les solutions particulières du système (2), où x_1, y_1, z_1 sont censées remplacées par leurs valeurs tirées des équations (1).

Les équations (2) sont du genre de celles dont on a fait l'analyse au § III; car les trois équations

$$x_1 = \text{constante}, \quad y_1 = \text{constante}, \quad z_1 = \text{constante},$$

se réduisent, après la différentiation, aux deux seules équations

$$d^2 y = 0, \quad d^2 z = 0,$$

si l'on prend dx pour la différentielle constante.

Cela posé, pour appliquer notre méthode générale aux équations (2), il faut, des équations (1), en déduire deux autres dont la première ne renferme plus de différentielles et dont la seconde ne renferme que la différentielle d'une seule variable dépendante. Pour avoir la première équation, il suffit d'ajouter les équations (1) multipliées respectivement par x, y, z; on obtient ainsi

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

On aurait la deuxième équation en éliminant ds et l'une des différentielles dx, dy, dz entre deux des équations (1) et la suivante.

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

mais il vaut mieux, pour la symétrie, prendre l'équation obtenue en ajoutant les équations (1) après les avoir élevées au carré; il vient ainsi

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2}{ds^2}.$$

Nous ferons, pour abréger,

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\quad x_1^2+y_1^2+z_1^2=r_1^2;$$

et alors les deux équations qui nous sont nécessaires seront

$$(3)\qquad \begin{cases} xx_1+yy_1+zz_1=0,\\ r^2-r^2\dfrac{dr^2}{ds^2}=r_1^2.\end{cases}$$

D'après la théorie du § III, si l'on considère x_1, y_1, z_1 comme des constantes assujetties à vérifier les équations (2), les équations (3), après que la deuxième aura été intégrée, feront connaître l'intégrale générale du système proposé. La première équation (3) représente un plan passant par l'origine des coordonnées; par suite, r et ds sont le rayon vecteur et l'arc infiniment petit d'une ligne située dans ce plan. Si donc x' et y' désignent des coordonnées rectangulaires situées dans ce même plan, on aura

$$r^2=x'^2+y'^2,\quad ds^2=dx'^2+dy'^2;$$

par suite, la deuxième équation (3) devient

$$x'^2+y'^2-\frac{(x'\,dx'+y'\,dy')^2}{dx'^2+dy'^2}=r_1^2;$$

d'où l'on tire

$$y'=x'\frac{dy'}{dx'}+r_1\sqrt{1+\frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

Cette équation a pour intégrale

$$y'=mx'+r_1\sqrt{1+m^2},$$

m étant la constante arbitraire, et elle admet pour solution particulière

$$y'^2+x'^2=r_1^2;$$

d'où il suit que l'intégrale générale du système proposé représente des lignes droites situées dans les divers plans que représente l'équation

$$xx_1+yy_1+zz_1=0;$$

les droites situées dans chacun de ces plans sont tangentes à une circonférence décrite de l'origine comme centre, avec r_1 pour rayon.

Enfin l'ensemble de toutes les circonférences ainsi construites forme une solution particulière des équations différentielles proposées.

Pour avoir maintenant la solution particulière des équations proposées qui résulte de la variation de x_1, y_1, z_1, il faut différentier la première équation (3) par rapport à x_1, y_1, z_1, considérées comme seules variables, puis joindre l'équation obtenue aux équations (3). On a ainsi à intégrer le nouveau système,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + zz_1 &= 0,\\ x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1 &= 0,\\ r^2 - r^2\frac{dr^2}{ds^2} &= r_1^2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$ds_1 = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2},$$

on déduit des deux premières équations (4)

$$\frac{x}{y_1\frac{dz_1}{ds_1} - z_1\frac{dy_1}{ds_1}} = \frac{y}{z_1\frac{dx_1}{ds_1} - x_1\frac{dz_1}{ds_1}} = \frac{z}{x_1\frac{dy_1}{ds_1} - y_1\frac{dx_1}{ds_1}}.$$

La somme des carrés des numérateurs de ces fractions est r^2, celle des carrés des dénominateurs est $r_1^2\left(1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}\right)$; par conséquent, chacune des fractions dont il s'agit a pour valeur

$$\frac{r}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}}};$$

ainsi l'on a

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{y_1\frac{dz_1}{ds_1} - z_1\frac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\ \frac{y}{r} &= \frac{z_1\frac{dx_1}{ds_1} - x_1\frac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\ \frac{z}{r} &= \frac{x_1\frac{dy_1}{ds_1} - y_1\frac{dx_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Différentions ces équations (5), il vient

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{r\,dx - x\,dr}{r^2} &= d\,\frac{y_1\dfrac{dz_1}{ds_1} - z_1\dfrac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\
\frac{r\,dy - y\,dr}{r^2} &= d\,\frac{z_1\dfrac{dx_1}{ds_1} - x_1\dfrac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\
\frac{r\,dz - z\,dr}{r^2} &= d\,\frac{x_1\dfrac{dy_1}{ds_1} - y_1\dfrac{dx_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}.
\end{aligned}\right.$$

Élevant au carré ces trois équations (6) et ajoutant ensuite, il vient

$$\frac{ds^2 - dr^2}{r^2} =$$

$$\left[d\,\frac{y_1\dfrac{dz_1}{ds_1} - z_1\dfrac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{z_1\dfrac{dx_1}{ds_1} - x_1\dfrac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{x_1\dfrac{dy_1}{ds_1} - y_1\dfrac{dx_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2;$$

enfin, en éliminant ds^2 entre cette équation et la troisième équation (4), il vient

$$(7)\quad\left\{\begin{aligned}
&\frac{r_1^2\,dr^2}{r^2(r^2 - r_1^2)} =\\
&\left[d\,\frac{y_1\dfrac{dz_1}{ds_1} - z_1\dfrac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{z_1\dfrac{dx_1}{ds_1} - x_1\dfrac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{x_1\dfrac{dy_1}{ds_1} - y_1\dfrac{dx_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2.
\end{aligned}\right.$$

Les quantités x_1, y_1, z_1, r_1 et ds_1 peuvent, à l'aide des équations (2), s'exprimer en fonction d'une seule variable indépendante; l'équation (7) une fois intégrée, on aura l'expression de r en fonction de cette variable indépendante; les équations (5) feront ensuite connaître x, y et z en fonction de cette même variable. La solution que nous obtenons ainsi renferme une seule constante arbitraire, comme la première solution particulière déjà trouvée.

Un cas très-remarquable de la question qui vient d'être analysée, est celui où l'une des équations (2) a la forme

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \text{une constante};$$

c'est-à-dire le cas où la courbe donnée C_1 est sphérique. Effectivement, comme r_1 est constant, l'équation (7) est satisfaite par

$$r = r_1.$$

A cette solution particulière de l'équation (7) correspond une solution particulière des équations proposées; les valeurs de x, y, z données par les équations (5) deviennent alors

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= y_1\frac{dz_1}{ds_1} - z_1\frac{dy_1}{ds_1},\\ y &= z_1\frac{dx_1}{ds_1} - x_1\frac{dz_1}{ds_1},\\ z &= x_1\frac{dy_1}{ds_1} - y_1\frac{dx_1}{ds_1}.\end{aligned}\right.$$

Ces équations, qui ont la même forme que les équations (1), montrent qu'il y a réciprocité entre la courbe C_1 et la courbe C, qui représente la solution dont nous nous occupons. Chacune de ces courbes, situées toutes deux sur la même sphère, se déduit de l'autre par la même série de constructions.

On voit que, dans ce cas, les équations proposées admettent quatre solutions : 1° une intégrale renfermant deux constantes arbitraires; 2° deux solutions particulières renfermant chacune une constante arbitraire; 3° une solution particulière sans constante arbitraire.

VI.

Le cas que nous venons d'examiner est assez intéressant pour que je croie devoir en donner ici un exemple. Je supposerai que les équations (2) du § V soient

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, \\ y_1^2 + z_1^2 - z_1 = 0. \end{cases}$$

L'intégrale générale et la première solution particulière s'obtenant immédiatement, je ne m'occuperai que des deux dernières solutions. Faisant $u = \sqrt{z_1}$, je prendrai u pour variable indépendante; les équations (5) et (7) du § V deviennent

$$\begin{cases} x = r\dfrac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}, \\ y = r\dfrac{u^3 - 2u}{\sqrt{1+u^2}}, \\ z = r\dfrac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+u^2}}, \end{cases}$$

et

$$\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = \frac{(2+u^2)\,du}{1+u^2}.$$

Cette dernière a pour intégrale

$$r = \frac{\sqrt{1+u^2}}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)},$$

g étant la constante arbitraire; et elle admet pour solution particulière

$$r = 1;$$

il en résulte donc ces deux solutions des équations différentielles proposées,

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^2}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)}, \\ y = \dfrac{u^3 - 2u}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)}, \\ z = \dfrac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)}, \end{cases}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}, \\ y &= \frac{u^2 - 2u}{\sqrt{1+u^2}}, \\ z &= \frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}\right.$$

VII.

Comme deuxième application de notre théorie, nous résoudrons le problème qui a pour but de trouver la courbe dont les centres de courbure sont situés sur une courbe donnée plane ou à double courbure.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de la courbe cherchée; ρ le rayon de courbure de cette courbe; r le rayon de torsion ou de deuxième courbure; ξ, υ, ζ les angles formés avec les axes par la direction du rayon de courbure; enfin x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de courbure. On a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + \rho\cos\xi, \\ y_1 &= y + \rho\cos\upsilon, \\ z_1 &= z + \rho\cos\zeta. \end{aligned}\right.$$

En outre, le point (x_1, y_1, z_1) étant sur la courbe donnée, on a les deux équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) &= 0, \\ F(x_1, y_1, z_1) &= 0, \end{aligned}\right.$$

où f et F désignent des fonctions données.

Si l'on exprimait x_1, y_1, z_1 en fonction de x, y, z et de leurs différentielles, les équations (2) se changeraient en deux équations différentielles du deuxième ordre; ces équations, qu'il s'agit ici d'intégrer, appartiennent à la classe de celles que nous avons analysées au § III, car les trois équations

$$x_1 = \text{constante},\quad y_1 = \text{constante},\quad z_1 = \text{constante},$$

sont trois intégrales du système formé des deux équations du troisième ordre

$$(3) \qquad d\rho = 0, \quad \frac{1}{r} = 0.$$

Cela posé, pour avoir l'intégrale de nos équations différentielles, il faut considérer x_1, y_1, z_1 comme des constantes vérifiant les équations (2), et achever l'intégration des équations (3) dont les équations (1) forment déjà trois intégrales.

La première équation (3) donne

$$\rho = \text{constante},$$

et l'on déduit des équations (1)

$$(4) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \rho^2.$$

En outre, si l'on prend pour variable indépendante ds ou $\sqrt{dx^2 + dy + dz^2}$, on sait que $\cos\xi$, $\cos v$, $\cos\zeta$ sont proportionnels à d^2x, d^2y, d^2z. D'après cela, les équations (1) donnent

$$\begin{aligned} (y - y_1)\, d^2z - (z - z_1)\, d^2y &= 0, \\ (z - z_1)\, d^2x - (x - x_1)\, d^2z &= 0, \\ (x - x_1)\, d^2y - (y - y_1)\, d^2x &= 0; \end{aligned}$$

intégrant et désignant par A, B, C, trois constantes arbitraires, il vient

$$\begin{aligned} (y - y_1)\, dz - (z - z_1)\, dy &= \mathrm{AC}\, ds, \\ (z - z_1)\, dx - (x - x_1)\, dz &= \mathrm{BC}\, ds, \\ (x - x_1)\, dy - (y - y_1)\, dz &= \mathrm{C}\, ds. \end{aligned}$$

En ajoutant ces équations respectivement multipliées par $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$, il vient

$$(5) \qquad \mathrm{A}(x - x_1) + \mathrm{B}(y - y_1) + (z - z_1) = 0.$$

Le système des équations (4) et (5), qui renferme six constantes A, B, ρ, x_1, y_1, z_1, dont quatre sont arbitraires, forme l'intégrale générale des équations différentielles proposées. Ces équations représentent, comme on voit, un cercle qui a son centre en un point quelconque de la courbe donnée, et dont le rayon, ainsi que le plan, est arbitraire.

On serait arrivé au même résultat, quoiqu'avec un peu plus de peine, en formant avec les équations (1), comme nous l'avons indiqué au § III, un système de deux équations dont l'une fût du premier ordre seulement, et en intégrant ensuite ces équations. La première des équations dont je parle s'obtient immédiatement en ajoutant les équations (1) après les avoir multipliées par dx, dy, dz, respectivement; ce qui donne

$$(x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy + (z - z_1)\,dz = 0;$$

quant à l'autre équation, je la représenterai simplement par

$$\Pi_1 = 0,$$

comme dans le cas général du § III. Cela posé, pour avoir la solution particulière des équations proposées, il faut joindre aux deux équations précédentes celle obtenue en différentiant la première d'entre elles par rapport à x_1, y_1, z_1, équation qui est

$$dx_1\,dx + dy_1\,dy + dz_1\,dz = 0,$$

puis intégrer ensuite le système ainsi formé. Or, il est évident qu'on peut remplacer l'équation $\Pi_1 = 0$ par celle qu'on obtient en différentiant la précédente et chassant ensuite les différentielles deuxièmes de x, y et z par le moyen des équations (1). On peut écrire ainsi l'équation précédente,

$$dx_1\frac{dx}{ds} + dy_1\frac{dy}{ds} + dz_1\frac{dz}{ds} = 0;$$

différentiant et observant qu'on a, à cause des équations (1),

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{ds}{\rho}\cos\xi = -\frac{(x - x_1)\,ds}{\rho^2} = -\frac{(x - x_1)\,ds}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

$$d\frac{dy}{ds} = \frac{ds}{\rho}\cos v = -\frac{(y - y_1)\,ds}{\rho^2} = -\frac{(y - y_1)\,ds}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

$$d\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{\rho}\cos\zeta = -\frac{(z - z_1)\,ds}{\rho^2} = -\frac{(z - z_1)\,ds}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

il vient

$$d^2 x_1 \frac{dx}{ds} + d^2 y_1 \frac{dy}{ds} + d^2 z_1 \frac{dz}{ds}$$
$$-\frac{(x-x_1)\,dx_1 + (y-y_1)\,dy_1 + (z-z_1)\,dz_1}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}\,ds = 0,$$

ou

$$d^2 x_1\, dx + d^2 y_1\, dy + d^2 z_1\, dz$$
$$-(dx^2 + dy^2 + dz^2)\frac{(x-x_1)\,dx_1 + (y-y_1)\,dy_1 + (z-z_1)\,dz_1}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = 0.$$

Ainsi la solution particulière des équations différentielles proposées, ou, en d'autres termes, la véritable solution de notre problème est donnée par les trois équations

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(x-x_1)\,dx + (y-y_1)\,dy + (z-z_1)\,dz = 0,\\ &dx_1\,dx + dy_1\,dy + dz_1\,dz = 0,\\ &d^2 x_1\, dx + d^2 y_1\, dy + d^2 z_1\, dz\\ &-(dx^2 + dy^2 + dz^2)\frac{(x-x_1)\,dx_1 + (y-y_1)\,dy_1 + (z-z_1)\,dz_1}{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2} = 0. \end{aligned}\right.$$

On peut, à cause des équations (2), considérer x_1, y_1, z_1 comme fonctions d'une même variable indépendante θ, et, par suite, les équations (6) auront lieu entre les quatre variables x, y, z, θ et leurs différentielles premières. Le système de ces équations admet une intégrale qui renferme trois constantes arbitraires, et il peut, en outre, avoir des solutions particulières répondant à notre problème, ainsi qu'on le verra dans la seconde partie de ce Mémoire.

VIII.

Je ferai remarquer, en terminant cette première partie, qu'il faut encore rattacher à la théorie du § III l'intégration des deux équations simultanées

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} y &= px + f(p, q),\\ z &= qx + F(p, q), \end{aligned}\right.$$

où f et F sont des fonctions données, et où p et q désignent les dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$. Si, en effet, on pose

$$(2) \qquad p = a, \quad q = b, \quad y - px = \alpha, \quad z - qx = \beta,$$

on a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= f(a, b), \\ \beta &= F(a, b); \end{aligned} \right.$$

d'ailleurs, si l'on considère a, b, α, β comme des constantes, les équations (2) sont les quatre intégrales du système

$$d^2 y = 0, \quad d^2 z = 0;$$

donc les équations (1) appartiennent à la classe de celles que nous avons considérées au § III.

Si l'on élimine p et q des équations (2), les deux résultantes, savoir

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} y &= ax + \alpha, \\ z &= bx + \beta, \end{aligned} \right.$$

formeront l'intégrale générale des proposées, pourvu que l'on considère a et b comme des constantes arbitraires, et α et β comme des fonctions de a et b données par les équations (3).

Pour avoir la solution particulière des équations (1), il faut joindre aux équations (4) celles qu'on en déduit par la différentiation relative à a, b, α, β; ces équations sont

$$x da + d\alpha = 0, \quad x db + d\beta = 0,$$

ou

$$\left(x + \frac{df}{da}\right) da + \frac{df}{db} db = 0, \quad \left(x + \frac{dF}{db}\right) db + \frac{dF}{da} da = 0.$$

On a ainsi le système de quatre équations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & y = ax + f(a, b), \\ & z = bx + F(a, b), \\ & x = -\frac{df}{da} - \frac{df}{db}\frac{db}{da} = -\frac{dF}{da}\frac{da}{db} - \frac{dF}{db}, \\ & \frac{df}{db}\left(\frac{db}{da}\right)^2 + \left(\frac{df}{da} - \frac{dF}{db}\right)\frac{db}{da} - \frac{dF}{da} = 0. \end{aligned} \right.$$

En intégrant la dernière équation (5), on aura la valeur de b en fonction de a et d'une constante arbitraire; les trois premières équations feront ensuite connaître x, y, z en fonction de a. Il importe de remarquer que la dernière équation (5) admettra, en général, une solution particulière à laquelle correspondra une solution des équations proposées.

En appliquant ce qui précède aux deux équations

$$\begin{cases} y = px + p^2 + q, \\ z = qx + pq, \end{cases}$$

on trouve, pour l'intégrale,

$$\begin{cases} y = ax + a^2 + b, \\ z = bx + ab, \end{cases}$$

a et b étant les deux constantes; puis on a, en outre, les deux solutions particulières

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}(x+\alpha)^2 + \alpha^2, \\ z = -\frac{\alpha}{4}(x-\alpha)^2, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ z = -\frac{1}{27}x^3. \end{cases}$$

Dans la première de ces deux solutions, α désigne une constante arbitraire.

En général, le système des équations (1) admet, outre son intégrale, deux solutions particulières distinctes, mais il y a des cas où l'une de ces solutions particulières cesse d'avoir lieu; cela arrive, par exemple, si les fonctions f et F ne contiennent que q et p respectivement, comme il est aisé de s'en assurer. Il peut se faire aussi que le nombre des solutions particulières distinctes des équations (1) soit supérieur à 2 ; cela arrivera si les quantités

$$\frac{df}{db},\quad \frac{df}{da}-\frac{dF}{db},\quad \frac{dF}{da},$$

ont un facteur commun; car, en égalant à zéro ce facteur commun, on obtiendra une solution particulière de la dernière équation (5), à laquelle pourra correspondre une solution nouvelle des équations (1). Nous allons en donner un exemple. Considérons les deux équations

$$\begin{cases} y = px - 9q^2 + 18p^2q - 4p^4, \\ z = qx + 12pq^2 - 4p^3q. \end{cases}$$

L'intégrale générale sera d'abord

$$\begin{cases} y = ax - 9b^2 + 18a^2b - 4a^4, \\ z = bx + 12ab^2 - 4a^3b, \end{cases}$$

a et b étant les deux constantes arbitraires; on trouve ensuite que la dernière équation (5) se décompose dans les deux suivantes qu'il faut considérer successivement,

$$b = a^2 \quad \text{et} \quad b = a\frac{db}{da} - \frac{3}{2}\left(\frac{db}{da}\right)^2;$$

alors le système (5) donne lieu aux deux suivants :

$$\begin{cases} y = ax - 9b^2 + 18a^2b - 4a^4, \\ z = bx + 12ab^2 - 4a^3b, \\ x = -(36ab - 16a^3) + 18(b - a^2)\frac{db}{da}, \\ b = a\frac{db}{da} - \frac{3}{2}\left(\frac{db}{da}\right)^2, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y = ax - 9b^2 + 18a^2b - 4a^4, \\ z = bx + 12ab^2 - 4a^3b, \\ x = -20a^2, \\ b = a^2. \end{cases}$$

Le premier de ces deux systèmes fournit deux solutions particulières des équations proposées; l'une de ces solutions renferme une constante arbitraire. Le deuxième système fournit une troisième solution particulière sans constante arbitraire, et qui est

$$\left\{\begin{aligned} y &= -15\left(\frac{x}{20}\right)^{\frac{4}{3}},\\ z &= +12\left(\frac{x}{20}\right)^{\frac{5}{4}}.\end{aligned}\right.$$

DEUXIÈME PARTIE.

1.

J'ai été conduit naturellement aux résultats exposés dans la première partie de ce Mémoire, en étudiant les deux problèmes qui ont pour objet de trouver une courbe quand on connaît le lieu des centres de ses sphères osculatrices ou de ses cercles osculateurs. Je me suis borné, dans ce qui précède, à établir les équations différentielles dont ces problèmes dépendent immédiatement, sans entrer dans les détails. Je me propose, dans cette seconde partie, de faire connaître une solution nouvelle et directe des deux problèmes dont il s'agit, et d'analyser les divers cas remarquables que présente le second d'entre eux. Je ferai un usage fréquent de quelques formules que j'ai publiées dans un Mémoire inséré au tome XVI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et qu'il est nécessaire de rappeler ici.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une courbe; ds la différentielle de l'arc de cette courbe, c'est-à-dire $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; ρ le rayon de la première courbure; r le rayon de la seconde courbure ou le rayon de torsion; α, β, γ; ξ, υ, ζ; λ, μ, ν les angles formés avec les axes des x, des y et des z, par la tangente, par la normale principale suivant laquelle est dirigé le rayon de courbure, et par l'axe du plan osculateur respectivement. On a

$$\left\{\begin{aligned} d\cos\alpha &= \cos\xi\frac{ds}{\rho},\\ d\cos6 &= \cos\upsilon\frac{ds}{\rho},\\ d\cos\gamma &= \cos\zeta\frac{ds}{\rho};\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} d\cos\lambda &= \cos\xi\frac{ds}{r},\\ d\cos\mu &= \cos\upsilon\frac{ds}{r},\\ d\cos\nu &= \cos\zeta\frac{ds}{r}:\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} d\cos\xi &= -\cos\alpha\frac{ds}{\rho} - \cos\lambda\frac{ds}{r},\\ d\cos\upsilon &= -\cos6\frac{ds}{\rho} - \cos\mu\frac{ds}{r},\\ d\cos\zeta &= -\cos\gamma\frac{ds}{\rho} - \cos\nu\frac{ds}{r}.\end{aligned}\right.$$

Ces formules expriment, comme on voit, les différentielles des neuf cosinus des angles α, $6,\ldots$, par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont les coefficients ne contiennent que r, ρ et ds.

II.

Nous nous proposons, en premier lieu, de trouver la courbe dont les centres des sphères osculatrices soient sur une courbe donnée. Je désignerai par des lettres sans indice les quantités relatives à la courbe inconnue, et par les mêmes lettres affectées d'un indice les quantités analogues relatives à la courbe donnée. Ainsi, par exemple, x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe inconnue; x_1, y_1, z_1 seront celles du centre de la sphère osculatrice. Cela posé, on a

$$\text{(1)}\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 - x &= \rho\cos\xi - r\frac{d\rho}{ds}\cos\lambda,\\ y_1 - y &= \rho\cos\upsilon - r\frac{d\rho}{ds}\cos\mu,\\ z_1 - z &= \rho\cos\zeta - r\frac{d\rho}{ds}\cos\nu.\end{aligned}\right.$$

Différentiant, il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} dx_1 = -\left[\frac{\rho}{r} ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\lambda, \\ dy_1 = -\left[\frac{\rho}{r} ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\mu, \\ dz_1 = -\left[\frac{\rho}{r} ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\nu. \end{cases}$$

Élevant au carré et ajoutant, on aura ds_1^2, et l'on peut poser

$$(3)\qquad ds_1 = -\left[\frac{\rho}{r} ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right],$$

puisque l'origine des arcs s_1 est arbitraire. Des équations (2) et (3), on déduit

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \cos\lambda,\quad \frac{dy_1}{ds_1} = \cos\mu,\quad \frac{dz_1}{ds_1} = \cos\nu,$$

ou

$$(4)\qquad \cos\alpha_1 = \cos\lambda,\quad \cos\beta_1 = \cos\mu,\quad \cos\gamma_1 = \cos\nu,$$

équations très-connues et qu'on aurait pu écrire tout de suite.

Différentiant les équations (4) et ayant égard à celles rappelées au § I, il vient

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\xi_1 = \frac{ds}{r}\cos\xi, \\ \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\upsilon_1 = \frac{ds}{r}\cos\upsilon, \\ \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\zeta_1 = \frac{ds}{r}\cos\zeta; \end{cases}$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{ds_1}{\rho_1} = \pm\frac{ds}{r},$$

et

$$(6)\qquad \cos\xi_1 = \pm\cos\xi,\quad \cos\upsilon_1 = \pm\cos\upsilon,\quad \cos\zeta_1 = \pm\cos\zeta.$$

Des équations (3) et (5), on tire

$$(7)\qquad \frac{d\left(\rho_1\frac{d\rho}{ds_1}\right)}{ds_1} + \frac{\rho}{\rho_1} \pm 1 = 0,$$

et, en vertu des équations (4), (5) et (6), les équations (1) deviennent

$$(8)\qquad \begin{cases} x = x_1 \pm \rho_1 \dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\alpha_1 \mp \rho\cos\xi_1, \\ y = y_1 \pm \rho_1 \dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\beta_1 \mp \rho\cos\upsilon_1, \\ z = z_1 \pm \rho_1 \dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\gamma_1 \mp \rho\cos\zeta_1. \end{cases}$$

ρ_1 est une fonction connue de s_1; par suite, l'équation (7) étant intégrée, on aura la valeur de ρ exprimée en fonction de s_1 et de deux constantes arbitraires; les équations (8) feront ensuite connaître x, y et z. Il faut remarquer que, dans les précédentes équations, on doit prendre ensemble les signes supérieurs ou les inférieurs; ce signe d'ailleurs est indifférent, car on passe d'un cas à l'autre en changeant ρ en $-\rho$.

III.

Proposons-nous maintenant de trouver la courbe dont les centres de courbure soient sur une courbe donnée.

Comme dans le problème précédent, j'emploierai des lettres sans indice pour représenter les quantités relatives à la courbe inconnue, tandis que les mêmes lettres affectées d'un indice désigneront les quantités analogues relatives à la courbe donnée. Nous prendrons pour variable indépendante l'arc s_1 de la courbe donnée. Cela posé, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 - x = \rho\cos\xi, \\ y_1 - y = \rho\cos\upsilon, \\ z_1 - z = \rho\cos\zeta. \end{cases}$$

Différentiant et observant que

$$dx = ds\cos\alpha,\quad dy = ds\cos\beta,\quad dz = ds\cos\gamma,$$

il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} dx_1 = d\rho\cos\xi - \dfrac{\rho\, ds}{r}\cos\lambda, \\ dy_1 = d\rho\cos\upsilon - \dfrac{\rho\, ds}{r}\cos\mu, \\ dz_1 = d\rho\cos\zeta - \dfrac{\rho\, ds}{r}\cos\nu; \end{cases}$$

élevant ces équations (2) au carré et ajoutant, il vient

$$ds_1^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2 ds^2}{r^2},$$

d'où

$$\frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{\rho}\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}. \tag{3}$$

Si l'on divise les équations (2) par ds_1 et qu'on y remplace $\frac{ds}{r}$ par sa valeur tirée de (3), il vient

$$\left\{\begin{aligned}
\cos\alpha_1 &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\xi - \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\cos\lambda,\\
\cos 6_1 &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\upsilon - \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\cos\mu,\\
\cos\gamma_1 &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\zeta - \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\cos\nu;
\end{aligned}\right. \tag{4}$$

multipliant ces équations (4) respectivement par $\cos\alpha$, $\cos 6$, $\cos\gamma$, puis par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, puis par $\cos\xi$, $\cos\upsilon$, $\cos\zeta$, et ajoutant chaque fois les trois produits, il vient

$$\left\{\begin{aligned}
&\cos\alpha_1\cos\alpha + \cos 6_1\cos 6 + \cos\gamma_1\cos\gamma = 0,\\
&\cos\alpha_1\cos\lambda + \cos 6_1\cos\mu + \cos\gamma_1\cos\nu = -\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}},\\
&\cos\alpha_1\cos\xi + \cos 6_1\cos\upsilon + \cos\gamma_1\cos\zeta = \frac{d\rho}{ds_1}.
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

Différentions ces équations (5); il vient, en ayant égard à ces mêmes équations et à celles rappelées au § I,

$$\left\{\begin{aligned}
&\cos\xi_1\cos\alpha + \cos\upsilon_1\cos 6 + \cos\zeta_1\cos\gamma = -\frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds_1},\\
&\cos\xi_1\cos\lambda + \cos\upsilon_1\cos\mu + \cos\zeta_1\cos\nu = \rho_1\frac{\frac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}\right),\\
&\cos\xi_1\cos\xi + \cos\upsilon_1\cos\upsilon + \cos\zeta_1\cos\zeta = \rho_1\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}\right);
\end{aligned}\right.$$

en élevant ces équations au carré, puis ajoutant ensuite les résultats, il vient

$$1 = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \frac{\rho_1^2}{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds_1} = \sqrt{1 - \frac{\rho_1^2}{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}\right)^2},$$

équation qui détermine ds en fonction de ρ, $\frac{d\rho}{ds_1}$, $\frac{d^2\rho}{ds_1^2}$ et des quantités connues.

Faisant, pour abréger,

$$V = \frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}, \tag{6}$$

les équations précédentes deviennent

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\cos\xi_1\cos\alpha + \cos\upsilon_1\cos\beta + \cos\zeta_1\cos\gamma = -\frac{\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}}{\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}},\\ &\cos\xi_1\cos\lambda + \cos\upsilon_1\cos\mu + \cos\zeta_1\cos\nu = \rho_1\frac{\frac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}V,\\ &\cos\xi_1\cos\xi + \cos\upsilon_1\cos\upsilon + \cos\zeta_1\cos\zeta = \rho_1 V; \end{aligned}\right.$$

et

$$\frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds_1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}}{\sqrt{1 - \frac{d\rho}{ds_1^2}}}. \tag{8}$$

Remarquons maintenant que les carrés des quantités

$$\cos\lambda_1\cos\alpha + \cos\mu_1\cos\beta + \cos\nu_1\cos\gamma,$$
$$\cos\lambda_1\cos\lambda + \cos\mu_1\cos\mu + \cos\nu_1\cos\nu,$$
$$\cos\lambda_1\cos\xi + \cos\mu_1\cos\upsilon + \cos\nu_1\cos\zeta,$$

ajoutés respectivement avec les carrés des premiers membres des équations (5) et (7), donnent des résultats égaux à l'unité; d'où il résulte que l'on a

$$(9)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos\lambda_1\cos\alpha+\cos\mu_1\cos\beta+\cos\nu_1\cos\gamma=\frac{\rho_1 V}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}},\\
&\cos\lambda_1\cos\lambda+\cos\mu_1\cos\mu+\cos\nu_1\cos\nu=\frac{\frac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2},\\
&\cos\lambda_1\cos\xi+\cos\mu_1\cos\upsilon+\cos\nu_1\cos\zeta=\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2 V}.
\end{aligned}\right.$$

Dans ces équations (9), les signes des seconds membres ont été déterminés de manière à satisfaire les deux équations suivantes qu'on déduit facilement des équations (4) et (7), savoir :

$$\frac{d\rho}{ds_1}(\cos\lambda_1\cos\xi+\ldots)-\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}(\cos\lambda_1\cos\lambda+\ldots)=0,$$

$$-\frac{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2}}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}(\cos\lambda_1\cos\alpha+\ldots)+\rho_1V\frac{\frac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}(\cos\lambda_1\cos\lambda+\ldots)$$
$$+\rho_1V(\cos\lambda_1\cos\xi+\ldots)=0.$$

Prenons maintenant la dernière équation dans chacun des systèmes (5), (7) et (9); on formera le système suivant:

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&\cos\alpha_1\cos\xi+\cos\beta_1\cos\upsilon+\cos\gamma_1\cos\zeta=\frac{d\rho}{ds_1},\\
&\cos\xi_1\cos\xi+\cos\upsilon_1\cos\upsilon+\cos\zeta_1\cos\zeta=\rho_1V,\\
&\cos\lambda_1\cos\xi+\cos\mu_1\cos\upsilon+\cos\nu_1\cos\zeta=\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2};
\end{aligned}\right.$$

multipliant ces équations respectivement par $\cos\alpha_1$, $\cos\xi_1$, $\cos\lambda_1$, puis par $\cos\beta_1$, $\cos\upsilon_1$, $\cos\mu_1$, puis enfin par $\cos\gamma_1$, $\cos\zeta_1$, $\cos\nu_1$, et ajoutant chaque fois les résultats, il vient

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\xi &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\alpha_1 + \rho_1 V\cos\xi_1 + \sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2 V^2}\,\cos\lambda_1,\\ \cos\upsilon &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\beta_1 + \rho_1 V\cos\upsilon_1 + \sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2 V^2}\,\cos\mu_1,\\ \cos\zeta &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\gamma_1 + \rho_1 V\cos\zeta_1 + \sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2 V^2}\,\cos\nu_1;\end{aligned}\right.$$

portant ces valeurs de $\cos\xi$, $\cos\upsilon$, $\cos\zeta$ dans les équations (1), celles-ci deviennent

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} x &= x_1 - \rho\frac{d\rho}{ds_1}\cos\alpha_1 - \rho_1\rho V\cos\xi_1 - \rho\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2}\,\cos\lambda_1,\\ y &= y_1 - \rho\frac{d\rho}{ds_1}\cos\beta_1 - \rho_1\rho V\cos\upsilon_1 - \rho\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2}\,\cos\mu_1,\\ z &= z_1 - \rho\frac{d\rho}{ds_1}\cos\gamma_1 - \rho_1\rho V\cos\zeta_1 - \rho\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2}\,\cos\nu_1.\end{aligned}\right.$$

Ces équations (12) feront connaître les coordonnées de la courbe cherchée en fonction de s_1, lorsqu'on connaîtra l'expression de ρ en fonction de cette variable.

La quantité ρ dépend d'une équation différentielle du troisième ordre que nous allons actuellement former.

Différentions les équations (7); on trouvera, en ayant égard à ces mêmes équations, ainsi qu'aux équations (3) et (8) et à celles rappelées au § I,

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \cos\lambda_1\cos\alpha + \cos\mu_1\cos\beta + \cos\nu_1\cos\gamma &= -\frac{r_1\rho_1^2 V}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho^2 V^2}}\,U,\\ \cos\lambda_1\cos\lambda + \cos\mu_1\cos\mu + \cos\nu_1\cos\nu &= -\frac{r_1\rho_1\frac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}\,U,\\ \cos\lambda_1\cos\xi + \cos\mu_1\cos\upsilon + \cos\nu_1\cos\zeta &= -r_1\rho_1 U,\end{aligned}\right.$$

en faisant, pour abréger,

$$(14)\qquad U = \frac{dV}{ds_1} + \frac{V^2}{\frac{d\rho}{ds_1}\left(1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}\right)} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{ds_1}\right)V - \frac{1}{\rho_1^2}\,\frac{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}{\frac{d\rho}{ds_1}}.$$

Pour que les équations (13) coïncident avec les équations (9), il faut et il suffit que l'on ait

$$(15)\qquad U+\frac{1}{r_1\rho_1}\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2}=0.$$

Cette équation renferme ρ, $\frac{d\rho}{ds_1}$, $\frac{d^2\rho}{ds_1^2}$ et $\frac{d^3\rho}{ds_1^3}$, avec les quantités connues r_1 et ρ_1, qui sont des fonctions données de s_1. L'intégration amènera donc trois constantes arbitraires, ainsi que nous en avons déjà fait la remarque dans la première partie de ce travail.

Dans le cas particulier où la courbe donnée est plane, on a

$$\frac{1}{r_1}=0,$$

et l'équation (15) se réduit à

$$U=0.$$

Il est très-aisé de vérifier que les équations (12) satisferont aux équations (1), si l'on admet que l'équation (15) ait lieu. Il y a pourtant une exception à faire à l'égard d'une certaine solution de l'équation (15). Celle-ci est satisfaite si l'on pose

$$(16)\qquad 1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}-\rho_1^2V^2=0;$$

mais alors la plupart de nos formules deviennent illusoires. L'équation (8) montre que l'équation (16) ne peut être admise que dans deux hypothèses : 1° si $\frac{d\rho}{ds_1}=0$; 2° si $\frac{d\rho}{ds_1}=1$. Dans le premier cas, l'équation (16) se réduit à $\rho=\rho_1$; il faut donc que le rayon de courbure de la courbe donnée soit constant. Les équations (11) et (12) deviennent alors

$$(17)\qquad \begin{cases}\cos\xi=\cos\xi_1,\\ \cos\upsilon=\cos\upsilon_1,\\ \cos\zeta=\cos\zeta_1,\end{cases}$$

$$(18)\qquad \begin{cases}x=x_1-\rho_1\cos\xi_1,\\ y=y_1-\rho_1\cos\upsilon_1,\\ z=z_1-\rho_1\cos\zeta_1.\end{cases}$$

On vérifie aisément que ces équations (18) satisfont aux équations (1), à moins que la courbe donnée ne soit plane.

Dans l'hypothèse de $\frac{d\rho}{ds_1} = 1$, les équations (12) deviennent

$$(19) \qquad \begin{cases} x = x_1 - \rho\cos\alpha_1, \\ y = y_1 - \rho\cos 6_1, \\ z = z_1 - \rho\cos\gamma_1; \end{cases}$$

et l'on vérifie aisément que ces équations ne satisfont aux équations (1) que dans le seul cas de $r_1 = \infty$, c'est-à-dire dans le cas où la courbe donnée est plane. Alors les équations (19) appartiennent aux développantes de la courbe donnée en prenant

$$\rho = s_1 + \text{une constante}.$$

Il résulte de là qu'en excluant de l'équation (15) la solution particulière qui satisfait à l'équation (16), on ne rejette que les développantes de la courbe donnée si celle-ci est plane, et la courbe parallèle à la courbe donnée est distante de celle-ci d'une quantité égale à son rayon de courbure, si celui-ci est constant.

IV.

L'équation différentielle du troisième ordre dont ρ dépend, s'abaisse au deuxième ordre si r_1 et ρ_1 sont constants, auquel cas la courbe donnée est une hélice ou un cercle. Supposons, en effet,

$$\rho_1 = \text{une constante } a, \quad r_1 = \text{une constante } b;$$

l'équation en ρ devient

$$\frac{dV}{ds_1} + \frac{V^2}{\frac{d\rho}{ds_1}\left(1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}\right)} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}V - \frac{1}{a^2}\frac{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}{\frac{d\rho}{ds_1}} + \frac{1}{ab}\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2} - a^2V^2} = 0,$$

et l'on a

$$V = \frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}.$$

Prenons deux nouvelles variables t et u, telles que

$$t = \rho^2, \quad u = \rho\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}};$$

on aura

$$du = -\frac{V\sqrt{t}\,dt}{2u},$$

d'où

$$V = -\frac{2u}{\sqrt{t}}\frac{du}{dt};$$

et si l'on prend t pour variable indépendante, notre équation différentielle devient

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{u}{t-u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{u}{4a^2(t-u^2)} - \frac{1}{4ab}\frac{\sqrt{1-4a^2\frac{du^2}{dt^2}}}{\sqrt{t-u^2}} = 0.$$

Si l'on fait $b = \infty$, c'est-à-dire si l'on suppose que la courbe donnée soit un cercle, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{u}{t-u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{u}{4a^2(t-u^2)} = 0.$$

Telle est l'équation dont dépend, en dernière analyse, la recherche des courbes à double courbure dont les centres de courbure sont situés sur une circonférence de cercle. Il ne paraît pas que cette équation puisse être intégrée sous forme finie.