JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

BESGE

Addition à la note sur une transformation d'intégrales définies, insérée dans le cahier de mars

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 18 (1853), p. 168.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1853_1_18__168_0>

Addition à la Note sur une transformation d'intégrales définies, insérée dans le cahier de mars;

Par M. BESGE.

On m'a demandé la démonstration rigoureuse que je dis avoir de l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u) \cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u) \cos u\, du$$

La voici en peu de mots. Dans l'intégrale placée au premier membre, je groupe les éléments relatifs aux valeurs de la variable à égale distance des deux limites, moyennant quoi cette intégrale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\sin 2u)(\cos u + \sin u)\, du.$$

Puis je fais $\sin 2u = \cos^2 x$, d'où $\cos 2u\, du = -\sin x \cos x\, dx$; et j'observe que u variant de o à $\frac{\pi}{4}$, x varie de $\frac{\pi}{2}$ à o. Je trouve ainsi notre intégrale égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \frac{\sin x \cos x\, dx}{\cos 2u} (\cos u + \sin u).$$

Mais

$$(\cos u + \sin u)^2 = 1 + \sin 2u = 1 + \cos^2 x:$$

donc

$$\cos u + \sin u = \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

D'un autre côté

$$\cos 2u = \sqrt{1 - \cos^4 x} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

L'intégrale dont nous nous occupons est donc finalement égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \cos x\, dx:$$

ce qu'il fallait démontrer.