JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Note sur la théorie des formules différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 478-480.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__478_0>

NOTE

Sur la théorie des formules différentielles;

par J. LIOUVILLE.

Dans des leçons au Collége de France, dont j'ai déjà eu occasion de parler (tome XV de ce Journal, page 130), j'ai considéré la formule

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

par laquelle s'exprime en particulier le carré ds^2 de la distance de deux points d'une surface infiniment voisins, sous un point de vue plus général que celui qu'offrirait naturellement la géométrie, où les racines de l'équation

$$ds^2 = 0$$

ne peuvent jamais être réelles. J'ai traité en elle-même, et dans toute sa généralité, cette formule différentielle, et j'ai essayé de l'étudier comme dans la théorie des nombres on étudie, par des moyens très-différents, il est vrai, la formule quadratique

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

J'ai dit aussi quelques mots de la formule différentielle à trois variables dont dépend l'expression du carré de la distance de deux points infiniment voisins pris à volonté dans l'espace. Mais le petit nombre de leçons que j'avais à faire m'a permis à peine d'exposer alors les premiers rudiments du peu même que j'ai réussi à trouver dans cette vaste théorie de la discussion des formules différentielles entières et homogènes que j'avais prise pour texte. Aussi ai-je dessein d'y revenir un jour dans des leçons nouvelles, en y ajoutant la théorie des formules différentielles fractionnaires, qui n'offre pas moins d'utilité.

Quand il n'y a que deux variables, la formule proposée se décompose en facteurs linéaires, et l'expression à discuter peut être écrite ainsi :

$$(l\,du + m\,dv)^{\mu}\,(n\,du + p\,dv)^{\nu}\ldots,$$

l, m, etc., étant des fonctions de u, v, et μ, ν, etc., des exposants constants, positifs ou négatifs. Les deux formules

$$(l\,du + m\,dv)(n\,du + p\,dv), \quad (l\,du + m\,dv) : (n\,du + p\,dv),$$

dont la première est celle de la théorie des surfaces, y sont comprises et offrent surtout de l'intérêt. Mais quel que soit le nombre des facteurs, et quels que soient les exposants μ, ν,..., toujours la théorie reste facile et se ramène à la discussion approfondie des simples formules linéaires. Mes recherches à ce sujet sont terminées depuis longtemps et pourraient être publiées dès à présent dans leur ensemble. La matière assurément n'est pas épuisée : je veux dire seulement que j'ai rempli le cadre limité dont j'avais fait l'objet de mon travail.

Les formules à trois ou à plus de trois variables offrent bien plus de difficultés, et je suis loin d'avoir obtenu là tout le succès que j'aurais désiré. Mais j'ai du moins, je crois, réussi, par exemple, quant à ce qui concerne la formule

$$E_1\,du_1^2 + E_2\,du_2^2 + E_3\,du_3^2 + 2F_1\,du_2\,du_3 + 2F_2\,du_1\,du_3 + 2F_3\,du_1\,du_2,$$

lorsque cette formule représente le carré ds^2 de la distance de deux points infiniment voisins quelconques, c'est-à-dire est réductible à la forme

$$dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Je me contenterai, dans cette Note, de dire un mot d'un des problèmes que j'ai résolus. Étant donnée l'équation

$$\varphi(u_1,\ u_2,\ u_3) = 0$$

d'une surface, on demande de trouver, à l'aide de la seule valeur de ds^2, et sans connaître la relation des coordonnées curvilignes u_1, u_2, u_3 avec les coordonnées rectangles ordinaires x, y, z, 1° la direction de la normale et celles des lignes de courbure en chaque point; 2° la grandeur du rayon de courbure d'une section normale quelconque.

L'analyse qui résout cette question, donnant en particulier pour le produit des rayons de courbure principaux une valeur qui doit revenir à celle qu'on obtiendrait directement par une formule connue de M. Gauss, en chassant de l'expression de ds^2 une des quantités u_1, u_2, u_3 au moyen de l'équation

$$\varphi(u_1,\ u_2,\ u_3) = 0$$

de la surface, on a, en égalant les deux résultats, une équation de condition que E_1, E_2, etc., doivent vérifier, quelle que soit la fonction φ, si ds représente en effet la distance de deux points. Mais ne nous livrons pas à des digressions qui nous entraîneraient beaucoup trop loin.

La place me manque même pour écrire les formules générales qui résolvent le problème énoncé plus haut. Bornons-nous donc au cas où la surface proposée a pour équation

$$u_3 = \textit{constante}.$$

Voici la formule qui donnera alors le rayon de courbure R d'une section normale quelconque :

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\sqrt{D.\Delta}}\left[L\left(\frac{du_1}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du_1}{ds}\frac{du_2}{ds} + N\left(\frac{du_2}{ds}\right)^2\right],$$

où l'on a fait

$$\begin{aligned} L = {} & (E_2F_2 - F_1F_3)\frac{dE_1}{du_1} + (E_1F_1 - F_2F_3)\left(2\frac{dF_3}{du_1} - \frac{dE_1}{du_2}\right) \\ & + (E_1E_2 - F_3^2)\left(\frac{dE_1}{du_3} - 2\frac{dF_2}{du_1}\right), \\ M = {} & (E_1F_1 - F_2F_3)\frac{dE_2}{du_1} + (E_2F_2 - F_1F_3)\frac{dE_1}{du_2} \\ & + (E_1E_2 - F_3^2)\left(\frac{dF_3}{du_3} - \frac{dF_1}{du_1} - \frac{dF_2}{du_2}\right), \\ N = {} & (E_1F_1 - F_2F_3)\frac{dE_2}{du_2} + (E_2F_2 - F_1F_3)\left(2\frac{dF_3}{du_2} - \frac{dE_2}{du_1}\right) \\ & + (E_1E_2 - F_3^2)\left(\frac{dE_2}{du_3} - 2\frac{dF_1}{du_2}\right), \end{aligned}$$

et

$$\Delta = E_1E_2 - F_3^2, \quad D = E_1E_2E_3 - E_1F_1^2 - E_2F_2^2 - E_3F_3^2 + 2F_1F_2F_3.$$

Dans le cas particulier de $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, c'est-à-dire des coordonnées curvilignes rectangulaires, il vient simplement

$$L = E_1E_2\frac{dE_1}{du_3}, \quad M = 0, \quad N = E_1E_2\frac{dE_2}{du_3}, \quad \Delta = E_1E_3, \quad D = E_1E_2E_3.$$

Ce cas était déjà connu par un beau travail de M. Lamé. La simplification même qui s'y opère montre assez qu'il y avait quelque chose à faire et une autre méthode à chercher, pour aborder le cas général.

Le problème de trouver la direction de la normale principale et la grandeur du rayon de courbure d'une courbe dont on a les deux équations en u_1, u_2, u_3, est plus facile que le précédent. D'autres problèmes, que j'aurais bien désiré pouvoir mentionner ici, sont plus difficiles; j'en parlerai dans un autre article.

FIN DU DIX-SEPTIÈME VOLUME.