JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E.-G. BJÖRLING

Sur une classe remarquable de séries infinies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 17 (1852), p. 454-472.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1852_1_17__454_0>

SUR

UNE CLASSE REMARQUABLE DE SÉRIES INFINIES;

PAR M. E.-G. BJÖRLING.

(Mémoire lu à l'Académie des Sciences de Stockholm, le 13 mai 1846.)

Le terme général u_n d'une série infinie étant tel qu'on ne peut assigner quelque limite définie vers laquelle le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge quand n croît indéfiniment, on sait, qu'en général, on ne peut rien décider, à l'aide des découvertes faites jusqu'à présent dans le champ des séries infinies, relativement à la convergence ou la divergence de la série. On peut voir pourtant de quelle importance est cette sorte de séries infinies, si l'on observe, par exemple, que la plupart des séries dont les termes généraux sont

$$(1) \qquad f(n).\sin w_n \quad \text{et} \quad f(n).\cos w_n,$$

$f(n)$ étant le $n^{ième}$ des termes *positifs*,

$$(2) \qquad f(1), \quad f(2), \quad f(3), \quad \text{etc.}$$

s'y rapportent. Une espèce de ces séries [*], et précisément celle qui se présente le plus souvent, vient d'être examinée décisivement par M. Malmsten dans les *Nova Acta* de la Société royale des Sciences d'Upsal [*]. Par suite de cet examen, on est maintenant assuré que

[*] *Nova Acta reg. Societ. scient. Upsal*, vol. XII : *Note sur la convergence des séries*, par C.-J. Malmsten. Cette Note, du moins en partie, a été insérée ensuite dans le Journal de M. Grunert (*Archiv der Mathemat. und Physik*, tome VI).

les séries dont les termes généraux sont

$$f(n).\sin nw \quad \text{et} \quad f(n).\cos nw, \tag{3}$$

lorsque, n croissant indéfiniment, $\lim f(n)$ *est* $= 0$, *sont convergentes pour toute valeur réelle de* w [*] *qui ne soit pas de la forme* $\pm 2k\pi$ (*k étant un nombre entier ou zéro*). Au reste, parmi les séries de la forme (1), l'espèce en question est, je crois, la seule qui ait été jusqu'à présent étudiée d'une manière satisfaisante [**].

§ I^{er}.

En examinant, il y a peu de temps, le théorème concernant le développement de la fonction générale $(1+x)^{\mu+\nu\sqrt{-1}}$, le module de la variable x étant précisément l'unité [***], suivant les puissances ascendantes et entières de cette variable, il m'a été permis de jeter un

[*] Pour éviter toute espèce de confusion dans ce qui va suivre, qu'il me soit permis de rappeler ici une précaution fort nécessaire dans la théorie des séries. En effet, *quand on est parvenu à démontrer qu'une série, dont les termes sont des fonctions d'une quantité x, converge (ou diverge) pour chaque valeur donnée de x jusqu'à une certaine limite* X, *il ne faut pas croire que la série continue nécessairement de converger (ou de diverger) pour des valeurs de x indéfiniment près de cette limite.* C'est ce que j'ai observé plus en détail dans une note sous le texte du § I[er] dans mes *Doctrinæ serierum infinitarum exercitationes, pars* 1[a], insérées dans les *Nova Acta reg. Societ. scient. Upsal,* vol. XIII. Pour l'instant il suffit du peu de mots qu'on vient de lire, afin que, dans ce qui va suivre, des termes tels que, par exemple, une série est convergente (divergente) pour chaque valeur positive de x ou pour chaque valeur négative de x, soient bien entendus.

[**] La démonstration même dont se sert M. Malmsten, dans la Note citée, est à la fois très-claire et très-simple. Cependant, on peut lui donner un plus grand degré d'évidence encore, et la faire dépendre du seul caractère $\lim f(n) = 0$. Je suis bien fâché de me voir ici réduit à la nécessité de prévenir, à cet égard, l'auteur éminent, pour me procurer le moyen d'effectuer la démonstration du théorème III ci-dessous. Aussi il faut avouer que c'est l'auteur lui-même qui a fixé premièrement mon attention, non-seulement sur la possibilité, mais aussi sur la forme même d'une démonstration améliorée de sa proposition.

[***] Dans la *pars* 1[a] des *Doctrinæ serierum, etc.*, déjà citées, je me suis occupé de recherches sur le développement de cette fonction générale, dans le cas du module

coup d'œil dans l'intérieur du système des séries mentionnées dans les premières lignes ci-dessus. Il m'en a réussi, entre autres choses, de démontrer rigoureusement un théorème général (*voir* le théorème III ci-dessous) dont la proposition que je viens rappeler, concernant les séries (3), ne fait qu'un simple corollaire.

Parmi les séries dont nous allons nous occuper dans le présent Mémoire, considérons d'abord l'espèce des séries (1) pour lesquelles

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} w_n = \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1} + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2} + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+3} + \ldots \\ + \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}, \end{aligned}\right.$$

le signe arc tang désignant, comme à l'ordinaire, un arc limité par $\pm\frac{\pi}{2}$, ρ étant réel non négatif et v positif ou négatif. La somme (4), dans ce qui va suivre, sera représentée, pour abréger, par le signe A_n.

Il est bon d'observer d'avance, quant à la nature de la somme A_n, que (v étant positif) cette somme croît indéfiniment avec n, bien qu'à partir du terme $n^{ième}$, chaque terme particulier pour de très-grandes valeurs de n soit très-petit [*]. Cela posé, il est clair, pour parler géométriquement, que, n croissant, l'extrémité de l'arc que représente la somme variable A_n, successivement, mais par des pas de plus en plus courts, à mesure que n croîtra, parcourra la circonférence entière autant de fois que l'on voudra, et que, plus on

---

de x inférieur à l'unité, et sur les avantages qu'on en peut tirer pour la théorie des séries dont les termes sont réels. L'examen de cette même chose pour le cas du module de x égal à l'unité est réservé pour la *pars* 2ª des mêmes *Exercitationes*.

[*] En effet, il est clair, qu'à cet égard, il y a la même chose à dire de la série

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+1},\quad \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+2},\ldots,\quad \operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+m},$$

que de la série même

$$\frac{v}{\rho+n+1},\quad \frac{v}{\rho+n+2},\ldots,\quad \frac{v}{\rho+n+m}.$$

avance dans les séries

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} f(1).\sin\left(\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+1}\right),\\ f(2).\sin\left(\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+2}\right),\ldots,\\ f(n).\sin\left(\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+2}+\ldots+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+n}\right),\\ \text{et}\\ f(1).\cos\left(\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+1}\right),\\ f(2).\cos\left(\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+2}\right),\ldots,\\ f(n).\cos\left(\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+2}+\ldots+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+n}\right), \end{array}\right.$$

plus y seront longues les périodes des termes *de même signe*.

Observons en outre que, dans le même cas (ν positif), la somme

$$(6)\quad \text{arc tang}\,\frac{\nu}{\rho+n+1}+\text{arc tang}\,\frac{\nu}{\rho+n+2}+\ldots+\text{arc tang}\,\frac{\nu}{\rho+n+m},$$

ou, pour abréger,

$$\mathrm{B}_{n+m},$$

est constamment inférieure à

$$\frac{\nu}{\rho+n+1}+\frac{\nu}{\rho+n+2}+\ldots+\frac{\nu}{\rho+n+m},$$

partant aussi inférieure à

$$\frac{\nu}{n+1}+\frac{\nu}{n+2}+\ldots+\frac{\nu}{n+m},$$

et, à fortiori, plus petite que

$$\frac{m}{n+1}\nu,$$

en sorte qu'on a, pour toutes les valeurs de n,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{B}_{2n}\ \text{ou}\ \text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+n+1}+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+n+2}+\ldots\\ \qquad\qquad+\text{arc tang}\,\dfrac{\nu}{\rho+2n}<\dfrac{n}{n+1}\nu<\nu; \end{array}\right.$$

et, de cette remarque jointe à la précédente, nous pourrons aisément déduire la proposition que voici :

THÉORÈME I. *Si les termes positifs*

$$f(1),\quad f(2),\quad f(3),\ldots,\quad f(n),\quad etc., \tag{8}$$

sont tels que, pour chaque valeur entière de n au delà d'une certaine limite,

$$nf(n) \text{ soit } \geqq \text{ à un nombre fini N}, \tag{9}$$

les deux séries, dont les termes généraux sont

$$\left\{\begin{array}{l} f(n).\sin\left(\text{arc tang}\frac{\nu}{\rho+1}+\text{arc tang}\frac{\nu}{\rho+2}+\ldots+\text{arc tang}\frac{\nu}{\rho+n}\right) \\ \text{et} \\ f(n).\cos\left(\text{arc tang}\frac{\nu}{\rho+1}+\text{arc tang}\frac{\nu}{\rho+2}+\ldots+\text{arc tang}\frac{\nu}{\rho+n}\right), \end{array}\right. \tag{10}$$

ρ étant réel, non négatif, seront divergentes pour des valeurs quelconques positives ou négatives de ν.

Démonstration. D'abord il est clair qu'il suffira de faire la démonstration pour le cas seul des valeurs *positives* de ν. D'ailleurs, comme on sait, il suffira de montrer que, s_n désignant la somme des n premiers termes de l'une et de l'autre des séries dont il s'agit, la différence

$$s_{n+m} - s_n$$

n'est point pour chaque valeur de n au delà d'une certaine limite, quelque grand que soit le nombre entier m, numériquement inférieure à toute limite donnée.

Quant à la première des deux séries (10), il ne faudra, pour atteindre ce but-là, que considérer un nombre n quelconque dont l'arc correspondant A_n se termine ou au point $\frac{\pi}{6}$ de la circonférence, ou du moins à quelque point intermédiaire entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$, de manière que l'on ait $\sin A_n =$ ou $> \frac{1}{2}$. Qu'il y ait, en effet, de tels nombres n

aussi grands qu'on voudra, c'est ce qui est évident d'après ce qu'on vient de dire de la nature de A_n. Ici notre n doit être supposé très-grand, afin que les nombres $\frac{v}{\rho+n}$, $\frac{v}{\rho+n+1}$, etc., soient tous très-petits.

Maintenant, soit, 1°. $v =$ ou $< \frac{\pi}{3}$. Alors il suit de ce qui a été dit ci-dessus, que chaque *sinus*, dans la série

$$f(n+1).\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1}\right),$$

$$f(n+2).\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1} + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+2}\right),\ldots,$$

$$f(2n).\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+n+1} + \ldots + \text{arc tang}\,\frac{v}{\rho+2n}\right),$$

sera positif et supérieur à $\frac{1}{2}$, vu que, d'après la formule (7), toute somme B_{2n} est $< v$, et partant ici $< \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, tous ces termes seront positifs, et leur somme

$$> \frac{1}{2}\left[f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(2n)\right],$$

et partant aussi, en vertu du caractère (9),

$$> \frac{N}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right);$$

et, à fortiori,

$$> \frac{N}{4}.$$

Soit, 2°. *en général,* $v =$ ou $< k\cdot\frac{\pi}{3}$ (k désignant un nombre entier quelconque). Puisque, pour chaque nombre entier m,

$$B_{n+m} \text{ est } < \frac{m}{n+1}\,v < \frac{mk}{n+1}\cdot\frac{\pi}{3} < \frac{mk}{n}\cdot\frac{\pi}{3},$$

il s'ensuit que, si l'on prend pour m le plus grand nombre entier compris dans $\frac{n}{k}$ $\left(\text{d'où } \frac{mk}{n} \overset{=}{<} 1\right)$, chaque *sinus* dans cette série

$$f(n+1)\,.\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{\varphi}{\rho+n+1}\right),$$

$$f(n+2)\,.\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{\varphi}{\rho+n+1} + \text{arc tang}\,\frac{\varphi}{\rho+n+2}\right),\ldots,$$

$$f(n+m)\,.\sin\left(A_n + \text{arc tang}\,\frac{\varphi}{\rho+n+1} + \ldots + \text{arc tang}\,\frac{\varphi}{\rho+n+m}\right),$$

sera supérieur à $\frac{1}{2}$, vu que toute somme B_{n+m} est $< \frac{\pi}{3}$. Par conséquent, tous ces termes seront positifs, et leur somme

$$> \frac{1}{2}\left[f(n+1) + f(n+2) + \ldots + f(n+m)\right],$$

et partant aussi, en vertu du caractère (9),

$$> \frac{N}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+m}\right),$$

et, à fortiori,

$$> \frac{m}{n+m}\cdot\frac{N}{2} > \frac{m}{\frac{n}{k}(k+1)}\cdot\frac{N}{2}, \text{ vu que } m \text{ est } \overset{=}{<} \frac{n}{k}.$$

$$> \frac{m}{(m+1)(k+1)}\cdot\frac{N}{2}, \text{ vu que } \frac{n}{k} \text{ est } < m+1,$$

et, par suite,

$$> \frac{N}{2(k+1)}.$$

Donc la première des deux séries (10) est divergente.

Quant à la seconde, on peut dire à bon titre que sa divergence est une conséquence nécessaire et évidente de celle de l'autre; mais on peut aussi s'en convaincre d'une manière parfaitement semblable à celle que nous avons employée dans ce qui précède, pourvu que l'on y considère un nombre quelconque n dont l'arc correspondant A_n se termine ou au point $\frac{5\pi}{3}$ de la circonférence, ou, du moins, à quelque point compris entre $\frac{5\pi}{3}$ et 2π (en sorte que

$\cos A_n =$ ou $> \frac{1}{2}\Big)$, et que, du reste, on y remplace simplement le mot *sinus* par le mot *cosinus*.

§ II.

Considérons, en second lieu, la proposition suivante, dont, au surplus, la première partie n'est qu'un corollaire du précédent théorème I, et dont la seconde partie peut servir d'introduction à la proposition plus générale qui fait l'objet du § III.

THÉORÈME II. 1°. *Les termes positifs* (8) *étant, dans le théorème précédent, tels que, pour chaque valeur entière de n au delà d'une certaine limite,*

$$(9) \qquad n f(n) \text{ soit } \geqq \text{ à un nombre fini } \mathrm{N},$$

les deux séries, dont les termes généraux sont

$$(11)\ \begin{cases} f(n)\cdot\dfrac{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}, \\ \text{et} \\ f(n)\cdot\dfrac{\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\dfrac{v}{\rho+n}\right)}, \end{cases}$$

seront divergentes pour des valeurs quelconques positives ou négatives de v.

2°. *Mais, si lesdits termes* (8) *sont tels que, pour chaque valeur entière de n au delà d'une certaine limite,*

$$(9') \qquad n f(n) \text{ soit } \leqq \text{ à un nombre fini } \mathrm{N};$$

alors les deux séries dont les termes généraux sont, non pas précisément les deux expressions (11), *mais bien ces mêmes expressions affectées l'une et l'autre du facteur* $(-1)^n$, *seront convergentes pour toute valeur réelle de v.*

La première partie de ce théorème n'est que la proposition même que l'on vient de démontrer dans le paragraphe précédent, parce que l'expression

$$(12)\qquad \frac{f(n)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(n)\cdot\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n}\right)^2\right]},$$

est elle-même une $f(n)$ positive qui satisfait à la condition (9), vu que le dernier facteur radical n'est évidemment jamais inférieur à l'unité.

La seconde partie, nous le répétons, n'est qu'un cas très-particulier de la proposition générale que contient le théorème III [*] dont la démonstration sera complétement faite dans le paragraphe qui va suivre. Cependant il est à propos d'énoncer ici déjà, comme une conséquence évidente et remarquable du présent théorème II, la proposition suivante :

COROLLAIRE. *Tout comme la série qui a pour terme général* $\frac{1}{n+1}$ *est divergente, tandis que celle qui a pour terme* $(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$ *est convergente; de même aussi les séries dont les termes généraux sont*

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}, \\ \text{et} \\ \dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}, \end{array}\right.$$

[*] *Voir* la Note I à la fin de ce Mémoire.

ou, ce qui revient au même,

$$(13')\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{n+1}\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n}\right)^2\right]}\\
&\quad\times\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right),\\
&\text{et}\\
&\frac{1}{n+1}\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{v}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n}\right)^2\right]}\\
&\quad\times\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right),
\end{aligned}\right.$$

seront divergentes (v étant soit positif, soit négatif), tandis que, au contraire, les séries dont les termes généraux sont ces mêmes expressions affectées, l'une et l'autre, du facteur $(-1)^{n+1}$, seront convergentes pour toute valeur réelle de v.

§ III.

Maintenant nous allons démontrer cette proposition capitale :

THÉORÈME III. *Les termes positifs (8) étant tels que, pour chaque valeur entière de n au delà d'une certaine limite,*

$$(9')\qquad nf(n) \text{ soit } \overset{=}{<} \text{ à un nombre fini } \mathrm{N},$$

les quatre séries, dont les termes généraux sont ou le produit de

$$(14)\quad f(n)\cdot\frac{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\rho}{\rho+n}\right)},$$

soit par $\cos nw$, *soit par* $\sin nw$, *ou bien le produit de*

$$(15)\quad f(n)\cdot\frac{\sin\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)},$$

soit par $\cos nw$, *soit par* $\sin nw$ *(ρ étant réel, non négatif), seront toutes convergentes pour des valeurs réelles quelconques de v et de w, excepté seulement pour des valeurs de w de la forme $\pm 2k\pi$ (k désignant un nombre entier ou zéro).*

Démonstration. Observons d'abord que, si l'on désigne, pour abréger, par A_p la somme

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}+\ldots+\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+p},$$

on a évidemment

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\cos A_{p+1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+p+1}\right)}\\&=\frac{\cos A_p-\frac{v}{\rho+p+1}\sin A_p}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+p}\right)},\end{aligned}\right.$$

et

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\sin A_{p+1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+p+1}\right)}\\&=\frac{\sin A_p-\frac{v}{\rho+p+1}\cos A_p}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+p}\right)}.\end{aligned}\right.$$

Maintenant, pour éviter toute espèce de confusion, distinguons deux cas A et B, suivant que v diffère de zéro, ou que $v=0$.

A. *Supposant d'abord que v ne soit pas zéro,* voici comment nous raisonnerons :

1°. *Quant à la série dont le terme général est*

$$(14')\quad f(n)\cdot\frac{\cos A_n}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}\cos nw,$$

il suffira, comme on sait, pour prouver la vérité de notre assertion, de montrer que, s_n désignant la somme des n premiers termes de la série, la différence

$$(18)\quad\left\{\begin{aligned}&s_{n+m}-s_n\\&=\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m}f(n+i)\frac{\cos A_{n+i}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+i}\right)}\cos(n+i)w,\end{aligned}\right.$$

devient pour chaque valeur de n au delà d'une certaine limite, et quelque grand que soit le nombre entier m, numériquement inférieure à toute limite donnée.

En vertu de la formule

$$2\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\ [*], \tag{19}$$

l'égalité (18), en y prenant $\alpha=(n+i)\,w$, $\beta=\frac{w}{2}$, se réduit à

$$\left\{\begin{aligned}
&2\,(s_{n+m}-s_n)\sin\frac{w}{2}\\
&=\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m} f(n+i)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+i}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+i}\right)}\\
&\times\left[\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w-\sin\left(n+i-\frac{1}{2}\right)w\right],
\end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&=f(n+m)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+m}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+m}\right)}\sin\left(n+m+\frac{1}{2}\right)w\\
&-f(n+1)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+1}\right)}\sin\left(n+1-\frac{1}{2}\right)w\\
&+\left\{\begin{aligned}&f(n+1)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+1}\right)}\\&-f(n+2)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+2}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+2}\right)}\end{aligned}\right\}\sin\left(n+1+\frac{1}{2}\right)w\\
&+\left\{\begin{aligned}&f(n+2)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+2}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+2}\right)}\\&-f(n+3)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+3}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+3}\right)}\end{aligned}\right\}\sin\left(n+2+\frac{1}{2}\right)w\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left\{\begin{aligned}&f(n+m-1)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+m-1}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n+m-1}\right)}\\&-f(n+m)\frac{\cos \mathrm{A}_{n+m}}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n-m}\right)}\end{aligned}\right\}\sin\left(n+m-\frac{1}{2}\right)w.
\end{aligned}\right. \tag{20'}$$

[*] On voit que nous prenons pour point de départ la même formule élémentaire que M. Malmsten dans son Mémoire ci-dessus mentionné.

Cela posé, il est clair que, n croissant indéfiniment, les quantités contenues dans les deux premières lignes de cette expression, s'approcheront indéfiniment de zéro avec $f(n)$ même [selon la formule $(9')$], à cause que le facteur

$$(21)\qquad \frac{1}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\nu}{\rho+1}\right)\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\nu}{\rho+2}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{\nu}{\rho+n}\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sqrt{\left[1+\left(\frac{\nu}{\rho+1}\right)^2\right]\left[1+\left(\frac{\nu}{\rho+2}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{\nu}{\rho+n}\right)^2\right]},$$

bien que n croisse à l'infini, conserve toujours une valeur finie, vu que ce facteur, en vertu de la formule $1+x<e^x$ (x positif) est évidemment inférieur à

$$(22)\qquad \sqrt{e^{\nu^2\left[\frac{1}{(\rho+1)^2}+\frac{1}{(\rho+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(\rho+n)^2}\right]}}.$$

Pour abréger, nous désignerons par l le nombre fini qui est la *limite* dont s'approche indéfiniment l'expression (21), lorsque n croît indéfiniment [*].

De plus, quant à l'autre partie de l'expression $(20')$, savoir la

---

[*] Quoique cela ne soit point *nécessaire* ici, il est bien loin d'être étranger au sujet dont il s'agit, de remarquer en passant, que cette limite, dans le cas particulier $\rho=0$, est précisément le nombre

$$(\alpha)\qquad \sqrt{\frac{e^{\nu\pi}-e^{-\nu\pi}}{2\nu\pi}}.$$

En effet, puisqu'on a, pour chaque valeur de x, réelle ou imaginaire,

$$\frac{\sin x}{x}=\lim\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

en faisant croître n indéfiniment, et en posant $\frac{x}{\pi}=\nu\sqrt{-1}$, on obtient de suite

$$\frac{\sin\left(\nu\pi\sqrt{-1}\right)}{\nu\pi\sqrt{-1}},\quad \text{c'est-à-dire}\quad \frac{e^{\nu\pi}-e^{-\nu\pi}}{2\nu\pi}=\lim\left(1+\frac{\nu^2}{1^2}\right)\left(1+\frac{\nu^2}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{\nu^2}{n^2}\right).$$

somme

$$(23)\quad \underset{i=1}{\overset{i=m-1}{\mathrm{S}}}\left\{\begin{array}{l} f(n+i)\dfrac{\cos A_{n+i}}{\cos\left(\text{arc tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\dfrac{v}{\rho+n+i}\right)} \\ -f(n+i+1)\dfrac{\cos A_{n+i+1}}{\cos\left(\text{arc tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\dfrac{v}{\rho+n+i+1}\right)}\end{array}\right\}\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w,$$

elle se réduit, en vertu de la relation (16), à

$$(23')\quad \underset{i=1}{\overset{i=m-1}{\mathrm{S}}}\left\{\begin{array}{l}[f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i} \\ +\dfrac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i}\end{array}\right\}\frac{\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w}{\cos\left(\text{arc tang}\dfrac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\dfrac{v}{\rho+n+i}\right)}.$$

Cette somme, évidemment, n'est pas plus grande que celle qu'on obtient après avoir remplacé l'expression sous le signe S par sa valeur numérique, et, par suite, elle est numériquement non supérieure à

$$(24)\quad \underset{i=1}{\overset{i=m-1}{\mathrm{S}}}\ \text{valeur numérique}\left\{\begin{array}{l}[f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i} \\ +\dfrac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i}\end{array}\right\}$$
$$\times\sqrt{\left[1+\left(\frac{v}{\rho+1}\right)^2\right]\cdots\left[1+\left(\frac{v}{\rho+n+i}\right)^2\right]},$$

par conséquent, numériquement inférieure au produit

$$l\cdot\underset{i=1}{\overset{i=m-1}{\mathrm{S}}}\ \text{valeur numérique}\left\{\begin{array}{l}[f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i} \\ +\dfrac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i}\end{array}\right\},$$

et, à plus forte raison, au produit

$$(25)\quad l\cdot\underset{i=1}{\overset{i=m-1}{\mathrm{S}}}\left[f(n+i)-f(n+i+1)+\mathrm{V}\cdot\frac{f(n+i+1)}{\rho+n+i+1}\right]\ [^*],$$

---

[*] En effet, il est clair que la différence $f(n+i)-f(n+i+1)$ étant positive aussi bien que $\dfrac{1}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)$, la valeur numérique de l'expression

$$[f(n+i)-f(n+i+1)]\cos A_{n+i}+\frac{v}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\sin A_{n+i}$$

V désignant la valeur numérique de v; en d'autres termes, elle est numériquement inférieure au produit de l par

$$(26)\qquad f(n+1) - f(n+m) + \mathrm{V}\cdot\left[\frac{f(n+2)}{n+2} + \frac{f(n+3)}{n+3} + \ldots + \frac{f(n+m)}{n+m}\right],$$

et enfin, en vertu du caractère (9′), numériquement inférieure au produit de l par

$$(27)\qquad f(n+1) - f(n+m) + \mathrm{VN}\cdot\left[\frac{1}{(n+2)^2} + \frac{1}{(n+3)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+m)^2}\right].$$

Ce produit, tout comme la fonction même $f(n)$, est évidemment pour chaque valeur de n au delà d'une certaine limite, quelque grand que soit le nombre entier m, inférieur à tout nombre donné, vu que la série du terme général $\frac{1}{n^2}$ est convergente; on peut, dès lors, à plus forte raison, en dire autant de la valeur numérique de la somme (23), donc aussi de celle de toute la somme (20′) ou du produit $2(s_{n+m} - s_n)\sin\frac{w}{2}$, et partant aussi, au moins si l'on excepte les valeurs de w de la forme $\pm 2k\pi$, de la valeur numérique de la différence même $s_{n+m} - s_n$. C. Q. F. D.

2°. *Quant à la série dont le terme général est*

$$(14'')\qquad f(n)\cdot\frac{\cos A_n}{\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{v}{\rho+n}\right)}\sin nw,$$

on peut prouver la vérité de notre assertion par un raisonnement semblable au précédent, pourvu que l'on y prenne pour point de départ, au lieu de la formule élémentaire (19), cette autre

$$(19')\qquad 2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta).$$

Mais exposer ici de nouveau ce raisonnement, serait se jeter mal à propos dans des détails tout à fait superflus, car évidemment toute

---

ne peut surpasser le nombre que l'on obtient en y remplaçant $\cos A_{n+i}$ par $+1$, et, en même temps, $\sin A_{n+i}$ par ± 1, selon que v est positif ou négatif.

la différence entre le cas actuel et le précédent consiste en ce que certains facteurs figurant dans les formules ci-dessus, savoir,

$$\cos(n+i)w, \quad \sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w, \quad \sin\left(n+i-\frac{1}{2}\right)w,$$

doivent être à présent remplacés par ces autres

$$\sin(n+i)w, \quad -\cos\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w, \quad -\cos\left(n+i-\frac{1}{2}\right)w.$$

3°. Pour prouver la vérité de notre assertion *concernant la série dont le terme général est*

$$(15') \qquad f(n)\cdot\frac{\sin A_n}{\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{\rho}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{\rho}{\rho+n}\right)}\cos nw,$$

on peut procéder parfaitement de la même manière que dans le 1°, pourvu que l'on y remplace chaque expression de la forme $\cos A_{n+i}$ par $\sin A_{n+i}$, jusqu'à la ligne marquée par la formule (23) inclusivement; après quoi il faut se servir de la formule (17) au lieu de la formule (16), en vertu de laquelle on obtient, au lieu de la formule (23'),

$$\mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1}\left\{\begin{array}{l}[f(n+i)-f(n+i+1)]\sin A_{n+i}\\ -\dfrac{\rho}{\rho+n+i+1}f(n+i+1)\cos A_{n+i}\end{array}\right\}\frac{\sin\left(n+i+\frac{1}{2}\right)w}{\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{\rho}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{\rho}{\rho+n+i}\right)}.$$

Comment, après cela, s'accomplira la démonstration, c'est chose évidente par ce qui a été dit, dans le 1°, après la formule (23').

4°. Et de même, on concevra aisément, d'après ce qui a été donné déjà et sans qu'il soit besoin d'ajouter aucune explication, ce qu'il faut faire pour prouver enfin la vérité de l'assertion *concernant la série dont le terme général est*

$$f(n)\cdot\frac{\sin A_n}{\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{\rho}{\rho+1}\right)\cdots\cos\left(\text{arc tang}\,\frac{\rho}{\rho+n}\right)}\sin nw.$$

Ainsi nous avons établi notre théorème III pour toute valeur réelle de v, différente de zéro [*]; le cas de $v = 0$ reste à examiner.

B. *Soit donc à présent* $v = 0$. Il est clair d'abord qu'il ne faut de démonstration que pour les séries des termes généraux (14) [**]. De plus, cette démonstration, qui n'est qu'une simple modification de celle indiquée dans la section 1° ci-dessus, va montrer que, dans la supposition dont il s'agit ici, *le théorème est vrai, non-seulement quand* $f(n)$ *satisfait à la condition* (9'), *mais encore toutes les fois que, n croissant indéfiniment,* lim $f(n)$ *est* $= 0$ [***].

En effet, il est évident d'abord que la démonstration, donnée dans le 1°, jusqu'à la formule (20') inclusivement, subsiste pour toute valeur réelle de v. De plus, comme le nombre désigné par l, dans le cas particulier dont il s'agit ici, se réduit à l'unité, on pourra de la remarque seule, que l'on a $\lim\limits_{(n=\infty)} f(n) = 0$, conclure que, n croissant indéfiniment, les quantités dans les deux premières lignes de cette formule (20') s'approcheront indéfiniment de zéro. Et quant à l'autre partie de cette même formule (20'), savoir, dans le cas présent,

$$(23'') \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1} [f(n+i) - f(n+i+1)] \sin\left(n+i+\tfrac{1}{2}\right)\omega,$$

la valeur numérique de cette somme évidemment n'est pas supérieure à

$$(25') \qquad \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{i=m-1} [f(n+i) - f(n+i+1)],$$

c'est-à-dire à la différence

$$(27') \qquad f(n+1) - f(n+m),$$

---

[*] Il est bon de remarquer que, d'après la démonstration ci-dessus, la proposition énoncée subsiste encore pour des valeurs numériques *indéfiniment* petites de v.

[**] Voilà le cas particulier de notre théorème dont nous avons dit, au commencement de ce Mémoire, qu'il a fait l'objet de la discussion de M. Malmsten dans les *Nova Acta* de la Société des Sciences d'Upsal.

[***] *Voir* la troisième note dans le texte, immédiatement avant le § Ier ci-dessus.

qui, visiblement, en vertu de la seule propriété $\lim f(n) = 0$, s'évanouit pour $n = \infty$.

Cela suffit, pour le cas de $\nu = 0$, quant à la série du terme général (14'). De plus, si l'on observe qu'une semblable modification de la démonstration, dans la section 2° ci-dessus indiquée, suffit pour ce qui concerne la série du terme général (14''), on se trouve maintenant autorisé à cette conclusion, que *le théorème dont il s'agit, dans le cas particulier de* $\nu = 0$, *subsiste dès que* $\lim\limits_{(n=\infty)} f(n)$ *est* $= 0$, ce qui peut aussi s'exprimer ainsi :

Corollaire. *Les termes positifs* (8) *étant tels que, n croissant indéfiniment,* $\lim f(n)$ *soit* $= 0$; *les séries dont les termes généraux sont*

$$(3) \qquad f(n).\sin nw, \quad f(n).\cos nw,$$

seront convergentes pour des valeurs réelles quelconques de w, *qui ne soient pas de la forme* $\pm 2k\pi$.

NOTE I.

La vérité de la proposition 2°, dans le théorème II ci-dessus, résulte immédiatement de ce qui vient d'être démontré, vu que poser $w = \pi$, dans les expressions (14') et (15'), suffit pour les réduire aux expressions (11) affectées l'une et l'autre du facteur $(-1)^n$.

Ajoutons que la *divergence* des séries de ces mêmes termes généraux (14') et (15') pour des valeurs quelconques positives ou négatives de ν lorsque w est de la forme $\pm 2k\pi$ et qu'en même temps on a constamment, pour des valeurs de n au delà d'une certaine limite,

$$nf(n) \geqq \text{ à un nombre fini N},$$

est elle-même constatée par la proposition 1° de ce même théorème II.

NOTE II.

Pour plus de simplicité, nous avons posé, dans le théorème précédent,

$$\cos nw \quad \text{et} \quad \sin nw,$$

comme facteurs dans les termes généraux des séries proposées. Cependant il est évident par la nature même de la démonstration, que le théorème subsiste également pour des facteurs de la forme plus générale

$$\cos(n+k)\omega \quad \text{et} \quad \sin(n+k)\omega,$$

k désignant un nombre entier quelconque ou zéro.

NOTE III.

Il est à propos de remarquer, en finissant, 1° que le théorème I ci-dessus suffit pour établir la *divergence* de la série binomiale [*],

$$1, \quad (\mu + \nu\sqrt{-1})_1 x, \quad (\mu + \nu\sqrt{-1})_2 x^2, \quad (\mu + \nu\sqrt{-1})_3 x^3, \quad \text{etc.},$$

quand on y suppose $x = -1$ pour des valeurs quelconques positives ou négatives de ν, μ étant ou $= 0$ ou négatif et numériquement < 1; et 2° qu'on peut obtenir la somme de certaines familles de séries qui font l'objet du théorème III précédent, en appliquant convenablement le théorème binomial à des expressions de la forme $(1+x)^{-\rho+\nu\sqrt{-1}}$, le module de $x = u(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)$ étant $= 1$. A cet égard, nous renvoyons le lecteur aux *Doctrinæ seriérum infinitarum exercitationes* ci-dessus mentionnées.

[*] Ou bien des deux parties à la fois, de la partie réelle et des coefficients du $\sqrt{-1}$ de cette série